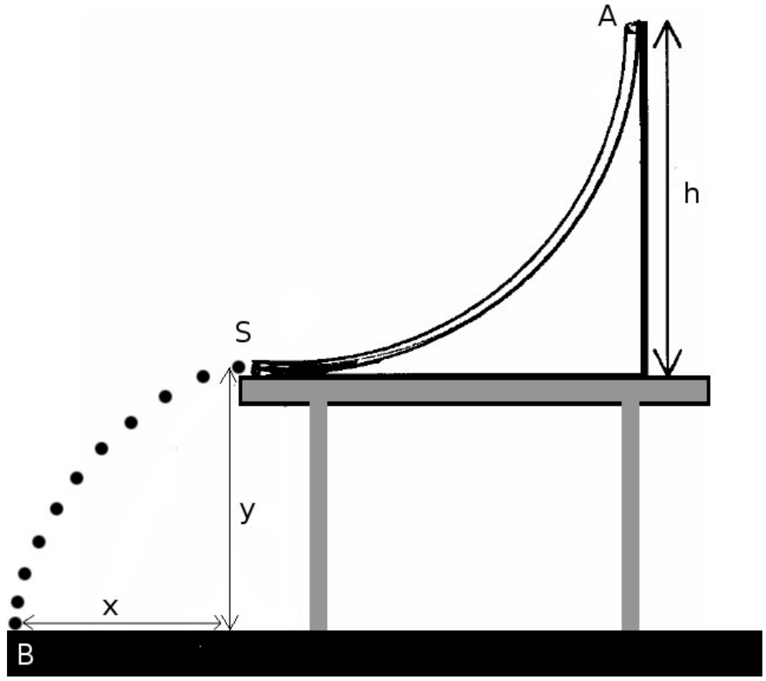
Práctica

Tiro Parabólico

Planteamiento

Deseamos **estimar la velocidad en un instante determinado de un sólido que cae por una pendiente**, bajo la hipótesis de movimiento uniformemente acelerado (m.u.a.) afectado únicamente por la acción de la fuerza gravitatoria terrestre.

Como sólido tomaremos una bolita metálica, y como pendiente la formada por el tubo curvado indicado en la siguiente imagen.



Inicialmente consideraremos que la bolita **desliza sin rodar** (no gira sobre si misma) **y sin rozar con la superficie**. Estas hipótesis de partida son **aproximaciones**, que nos facilitarán la tarea de plantear las ecuaciones físicas de nuestro problema, pero que conllevarán inevitablemente un porcentaje de error que deberemos considerar en nuestros cálculos.

Fundamento teórico

Según indica la imagen superior, la bolita se deja en caída libre en el punto A y alcanza el punto S con una velocidad v_s . Esta velocidad vamos a deducirla teóricamente (siguiendo las aproximaciones ya indicadas) y compararemos el valor teórico con el valor experimental que obtendremos en el laboratorio.

Si tomamos como referencia de alturas el tablero de la mesa, el punto S se encuentra a una altura de 0 metros, mientras que el punto A se encuentra a una altura h por encima del punto S.

Si la bolita parte del reposo en el punto A, su energía en ese punto será potencial gravitatoria. Es decir:

$$E_A = m \cdot g \cdot h$$
$$m \equiv masa$$
$$g \simeq 9{,}8\, m/s^2 \quad (aceleración\ \ gravitatoria\ \ en\ \ la\ \ corteza\ \ terrestre)$$
$$h \equiv altura$$

En el punto S, donde el nivel de referencia de alturas es 0, la energía de la bolita estará asociada únicamente a la velocidad que lleva en ese punto. Es decir, solo tendrá energía cinética:

$$E_S = \frac{1}{2} m \cdot v_s^{\ 2}$$
$$m \equiv masa$$
$$v_S \equiv velocidad$$

Según el **principio de conservación de la energía**, bajo la hipótesis ideal de ausencia de rozamiento, la energía del objeto en A debe ser igual a la energía del objeto en S. Por lo tanto:

$$E_A = E_S$$
$$m \cdot g \cdot h = \frac{1}{2} m \cdot v_s^{\ 2}$$
$$v_s = \sqrt{2 \cdot g \cdot h} \quad (velocidad\ \ teórica\ \ en\ \ S\ \ bajo\ \ condiciones\ \ ideales)$$

Con lo que obtenemos una ecuación que nos permite calcular, de **manera ideal (sin rozamiento y sin rotación)**, la velocidad de la bolita en el punto S. Como vemos, esta velocidad es independiente de la masa del objeto.

Solo hemos considerado el estado inicial del objeto en A y su estado final en S, ya que **en el supuesto ideal de ausencia de rozamiento** con las paredes del tubo que frene el avance de la bolita, **la velocidad de salida** v_s **es independiente del camino tomado para llegar de A hasta S**.

En la vida real sabemos que siempre existe rozamiento cuando un sólido avanza sobre una superficie. Es lógico pensar que este rozamiento será proporcional a la masa del objeto: a mayor masa, mayor rozamiento con la superficie, y viceversa.

El rozamiento dependerá, además, de un factor característico de cada superficie llamado coeficiente de rozamiento. Es decir, no es lo mismo deslizar sobre hielo (con bajo coeficiente de rozamiento) que deslizar sobre un material rugoso que se oponga fuertemente al movimiento (con alto coeficiente de rozamiento).

Este coeficiente de rozamiento se determina experimentalmente para cada material. En nuestra práctica vamos a suponer, idealmente, que su valor es 0.

Otra **segunda aproximación** que hemos tomado es **considerar que la bola desliza sin girar**. Si gira, parte de la energía inicial en A se dedica a realizar este giro. Es lógico pensar que la bolita (maciza y esférica) girará alrededor de su diámetro. Por lo tanto en el punto S deberíamos considerar una energía de rotación que para una esfera maciza de masa m, radio r y que avanza con velocidad lineal v_s es (no vamos a deducirla, ya que excede los conocimientos de Bachillerato):

$$E_{rotación}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{5}\cdot m\cdot r^2\cdot\left(\frac{v_s}{r}\right)^2=\frac{1}{5}m\cdot v_s^2$$

Si añadimos este factor a la energía cinética en S, tendremos la siguiente igualdad:

$$m\cdot g\cdot h=\frac{1}{2}m\cdot v_s^2+\frac{1}{5}m\cdot v_s^2$$

$$v_s=\sqrt{\frac{10}{7}\cdot g\cdot h}\quad(velocidad\ \ teórica\ \ en\ \ S\ \ considerando\ \ rotación\ \ de\ \ la\ \ bolita)$$

Determinación experimental de la velocidad en S

Si la bola sale del tubo en S con una velocidad v_s, y despreciando cualquier rozamiento con el aire, **describirá una parábola hasta alcanzar el suelo** (como viene indicado en la imagen anterior).

El punto de impacto con el suelo es B. **Tomando el punto S como origen del sistema de referencia**, el punto B tendrá una componente vertical y y una componente horizontal x.

El valor de y (siempre con signo positivo, al estar hablando de distancias) será igual a la altura de la mesa (que deberemos medir con precisión en el laboratorio). Y el valor de x lo obtendremos como valor medio tras realizar repetidas veces la caída libre de la bolita por el tubo y medir su desplazamiento horizontal al tocar el suelo (como indicaremos más adelante).

En S tenemos lo que se conoce como **tiro parabólico horizontal**: un movimiento con velocidad inicial horizontal v_{o_x} que adquiere poco a poco velocidad vertical v_y debido a la acción de la fuerza gravitatoria.

Usando las ecuaciones del movimiento rectilíneo uniformemente acelerado (m.r.u.a.) para cada componente del movimiento, tendremos:

$$x=x_0+v_{0_x}\cdot t+\frac{1}{2}\cdot a_x\cdot t^2=0+v_{0_x}\cdot t+0=v_{0_x}\cdot t\quad\rightarrow\quad x=v_{0_x}\cdot t\quad\rightarrow\quad t=\frac{x}{v_{0_x}}$$

$$y=y_0+v_{0_y}\cdot t+\frac{1}{2}\cdot a_y\cdot t^2=0+0+\frac{1}{2}\cdot a_y\cdot t^2=\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2\quad\rightarrow\quad y=\frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2\quad\rightarrow\quad t=\sqrt{\frac{2y}{g}}$$

Donde hemos considerado que el punto S es el origen del sistema de referencia y, por lo tanto, tiene coordenadas $(x_0,y_0)=(0,0)$. También consideramos que no existe aceleración horizontal $a_x=0$, no existe velocidad inicial vertical $v_{0_y}=0$ y la aceleración vertical coincide con la gravitatoria $a_y=g$.

Igualando el tiempo en ambas ecuaciones del tiro parabólico tendremos una ecuación para la velocidad horizontal inicial en función de la altura de la mesa y y del desplazamiento horizontal x .

$$v_{0_x}=\frac{x}{\sqrt{\frac{2y}{g}}} \quad (velocidad \;\; en \;\; S \;\; en \;\; función \;\; de: \;\; altura \;\; de \;\; la \;\; mesa \;\; h, \;\; desplazamiento \;\; x)$$

Este valor v_{0_x} debe coincidir con el valor teórico v_s deducido por el principio de conservación de la energía. Por lo tanto si somos capaces de medir con precisión el desplazamiento horizontal x tendremos una técnica experimental para estimar la velocidad de la bolita en el punto S.

Tareas a realizar en el laboratorio e informe a entregar

1. Fijar adecuadamente la posición del tubo y de la mesa.

2. Medir la altura h del tubo respecto el tablero de la mesa. Obtener el valor teórico v_s tanto en el caso ideal como en el caso que consideremos la rotación de la bolita.

3. Medir la altura y de la mesa respecto el suelo.

4. Dejar caer la bolita una primera vez para estimar la zona del suelo donde impactará. En esa zona fijar con celo al suelo un papel blanco, y encima un papel carbón con la parte oscura hacia bajo. De esta forma, cada vez que la bolita caiga sobre el papel carbón, dejará una marca oscura sobre el papel blanco.

5. Realizar **50 veces** la caída libre de la bolita. Cada 25 caídas, es recomendable medir la distancia de los 25 impactos y cambiar el papel blanco. Para medir, quitar con cuidado únicamente el papel carbón y medir con una cinta métrica el desplazamiento horizontal x de cada una de las marcas recogidas sobre el papel blanco. Medir x con una cinta métrica con **precisión de milímetro**.

6. Es probable que varias caídas coincidan en un mismo punto y sea difícil estimar el número de veces que ha impactado la bolita en ese punto. Lo importante es que tengamos **un número suficientemente grande de medidas para minimizar los errores humanos del experimento**: soltar la bola a distintas alturas, temblor del pulso, medidas no exactas con la cinta métrica, etc.

7. Realizar un tratamiento estadístico de las N medidas obtenidas para el valor de x . Obtener:

- Recorrido.
- Media aritmética.
- Frecuencia absoluta de cada valor x_i .
- Frecuencia relativa de cada valor x_i .
- Frecuencia absoluta acumulada de cada valor x_i .
- Frecuencia relativa acumulada de cada valor x_i .
- Moda.
- Mediana.
- Desviación típica.
- Varianza.

- Trazar un diagrama de barras verticales (histograma) con una anchura de barra de 1 cm. En el eje horizontal representar los distintos intervalos cerrados de valores y en el eje vertical la suma de las frecuencias absolutas de los valores x_i incluidos dentro de cada intervalo. Representar gráficamente, con ayuda de una hoja de cálculo (LibreOffice Calc, Excel, etc.), la distribución obtenida.
- Distribución normal o gaussiana para la variable continua x, con los parámetros valor medio y desviación típica obtenidos anteriormente. Representar gráficamente, con ayuda de un editor de funciones (GeoGebra, WolframAlpha, Graph, etc.), la distribución obtenida.
- Tipificar la variable x para obtener una distribución normal estándar. Representar gráficamente, con ayuda de un editor de funciones (GeoGebra, WolframAlpha, Graph, etc.), la distribución estándar obtenida.
- Estimar, con ayuda de las tablas de la distribución normal tipificada, la probabilidad de que un valor experimental de x elegido al azar se encuentre dentro del intervalo $[\bar{x}-\sigma , \bar{x}+\sigma]$.

8. Con el valor medio de x obtener el valor estimado de v_{0_x} y compararlo con los valores teóricos de v_s . Obtener el error absoluto y el error relativo de cada comparación. Estimar posibles causas de errores que justifiquen el error cometido.

9. Al terminar la práctica, debes **mostrar al profesor todos los resultados tomados y los cálculos que haya dado tiempo realizar**. Es obligatorio que el profesor revise y dé el visto bueno a la toma de datos para poder presentar el posterior informe.

10. El profesor evaluará la práctica a partir de un **informe**, realizado **a mano**, que recoja **todos los cálculos, medidas y estimaciones realizadas** en el laboratorio, además de un **breve resumen del fundamento teórico y del procedimiento experimental** seguido en el laboratorio. Si se han solicitado gráficas, pueden realizarse a ordenador, imprimirlas y pegarlas dentro del informe a mano. Cuidar la buena presentación, el orden y claridad en la exposición, y la correcta presentación de los resultados y las conclusiones. Entregar el informe antes de la fecha límite indicada por el profesor.