Problemas

Para la Universidad - Colección de problemas tipo de Matemáticas Generales de varias carreras científicas

Índice de contenido

Desigualdades de números reales

Desigualdades 1

Dados los valores reales x, y discútase la valides de las siguientes afirmaciones.

a) $x^3-2x^2-x+2>0$

b) $\frac{3-x}{x+4}<\frac{x+2}{2x-3}$

c) $|2x-1|\leq 5$

d) $|x-5|<|x+1|$

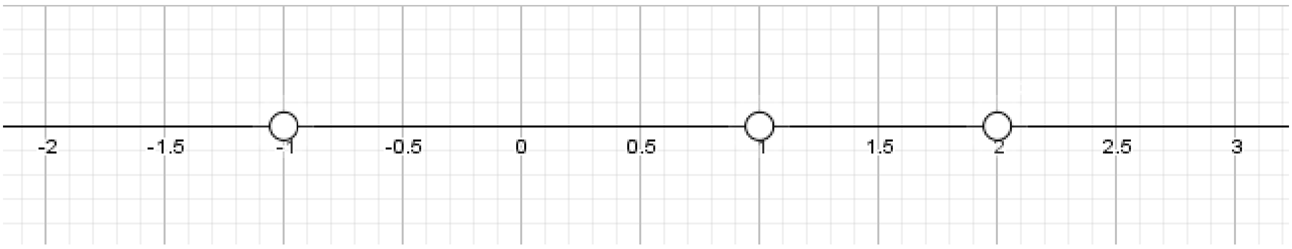
a) $x^3-2x^2-x+2>0$

Cuando encontramos un polinomio en una inecuación los pasos a seguir son:

1. Dejar todo el polinomio a un lado.
2. Sacar raíces del polinomio.
3. Representar las raíces en la recta real. Si la desigualdad tiene el signo igual, las raíces se representan como puntos cerrados. En caso contrario, como puntos abiertos.
4. Evaluar el signo del polinomio en el interior de los intervalos que se han formado.
5. La solución será la unión de los intervalos donde se cumpla el signo de la desigualdad.

Sacamos las raíces por Rufinni → $x^3-2x^2-x+2=0$ → $x=-1$, $x=1$, $x=2$

Los situamos en la recta real.



Evaluamos el signo del polinomio $P(x)=x^3-2x^2-x+2$ en cada intervalo.

$x<-1$ → si $x=-100$ → $P(-100)<0$

$-1<x<1$ → si $x=0$ → $P(0)>0$

$1<x<2$ → si $x=1{,}5$ → $P(1{,}5)<0$

$2<x$ → si $x=100$ → $P(100)>0$

Como la inecuación de partida es $x^3-2x^2-x+2>0$, nos quedaremos con los intervalos donde el signo del polinomio sea mayor que cero.

Solución: $(-1,1)\cup(2,+\infty)$

b) $\frac{3-x}{x+4}<\frac{x+2}{2x-3}$

Cuando encontramos una inecuación con fracciones los pasos a seguir son:

1. Dejar todas las fracciones a un lado (no multiplicar en cruz).

2. Aplicar m.c.m. y operar hasta obtener una única raiz.

2. Sacar raíces del numerador y del denominador.

3. Representar las raíces en la recta real. Si la desigualdad tiene el signo igual, las raíces del numerador se representan como puntos cerrados. En caso contrario, las raíces del numerador son puntos abiertos. Las raíces del denominador siempre son puntos abiertos, ya que podemos dividir por 0.

4. Evaluar el signo de la fracción en el interior de los intervalos que se han formado.

5. La solución será la unión de los intervalos donde se cumpla el signo de la desigualdad.

$$\frac{3-x}{x+4}<\frac{x+2}{2x-3} \rightarrow \frac{3-x}{x+4}-\frac{x+2}{2x-3}<0 \rightarrow \text{m.c.m.} \rightarrow \frac{(3-x)(2x-3)-(x+2)(x+4)}{(x+4)(2x-3)}<0$$

$$\frac{6x-9-2x^2+3x-(x^2+4x+2x+8)}{(x+4)(2x-3)}<0 \rightarrow \frac{-3x^2+3\text{x}-17}{(x+4)(2x-3)}<0$$

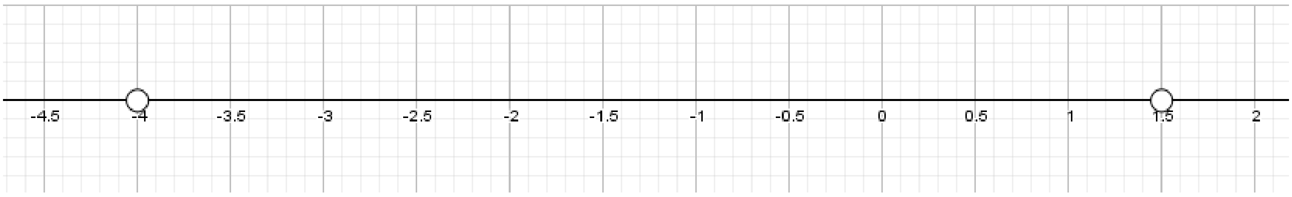
Si intentamos factorizar el numerador, comprobamos que no tiene soluciones reales.

$$-3x^2+3x-17=0 \rightarrow x=\frac{-3\pm\sqrt{9-4\cdot 3\cdot 17}}{-6} \rightarrow \nexists\ \textit{solución real}$$

Las únicas raíces son las del denominador.

$$(x+4)(2x-3)=0 \rightarrow x=-4 \ , \ x=\frac{3}{2}$$

Colocamos las raíces en la recta real.



Evaluamos el signo de la fracción $P(x)=\frac{-3x^2+3x-17}{(x+4)(2x-3)}$ en cada intervalo.

$x<-4 \rightarrow$ si $x=-100 \rightarrow P(-100)=\frac{-}{(-)(-)}<0$

$-4<x<\frac{3}{2} \rightarrow$ si $x=0 \rightarrow P(0)=\frac{-}{(+)(-)}>0$

$\frac{3}{2}<x \rightarrow$ si $x=100 \rightarrow P(100)=\frac{-}{(+)(+)}<0$

Como la inecuación de partida es $\frac{-3x^2+3x-17}{(x+4)(2x-3)}<0$, nos quedaremos con los intervalos donde el signo de la fracción sea menor que cero.

Solución: $(-\infty,-4)\cup(\frac{3}{2},+\infty)$

c) $|2x-1|\leq 5$

Cuando tengamos un vaor absoluto en una desigualdad con un número real, podemos aplicar la siguiente propiedad de acotación.

$$|f(x)|\leq k \quad , \quad k\in\mathbb{R}, k>0 \quad \rightarrow \quad -k\leq f(x)\leq +k$$

Es decir, la expresión contenida en el argumento del valor absoluto está acotada superiormente (tiene mayorantes) y está acotada inferiormente (tiene minorantes).

$$|2x-1|\leq 5 \quad \rightarrow \quad -5\leq 2x-1\leq 5$$

Resolvemos cada inecuación por separado. Recuerda que si al despejar debemos multiplicar o dividir por (-1) , la desigualdad cambia de sentido

$-5 \leq 2x-1 \rightarrow -4 \leq 2x \rightarrow -2 \leq x$

$2x-1 \leq 5 \rightarrow 2x \leq 6 \rightarrow x \leq 3$

Ahora la solución es la intersección de las soluciones individuales obtenidas.

Solución: $\{-2 \leq x\} \cap \{x \leq 3\} \rightarrow [-2, 3]$

d) $|x-5| < |x+1|$

Como en cualquier inecuación, llevamos todos los término a un lado.

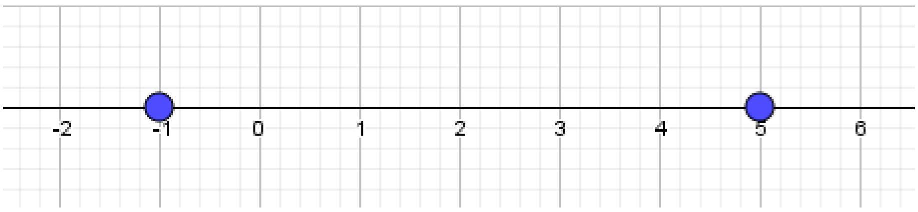
$|x-5| - |x+1| < 0$

Debemos recordar que no podemos operar analíticamente con valores absolutos. Debemos quitar las barras rompiendo en intervalos. Los pasos a seguir son:

1. Igualar los argumentos de los valores absolutos a 0 para sacar las raíces.
2. Representar las raíces en la recta real.
3. Ver el signo de los argumentos de los valores absolutos en el interior de cada intervalo. Donde sea positivo podremos quitar las barras sin más. Donde sea negativo podremos quitar las barras siempre que coloquemos delante un signo negativo.

$x-5=0 \rightarrow x=5$

$x+1=0 \rightarrow x=-1$



Evaluamos el signo de los argumentos en cada intervalo.

$x < -1$ $\rightarrow$ si $x=-100 \rightarrow x-5<0$, $x+1<0$

$-1 < x < 5$ $\rightarrow$ si $x=0 \rightarrow x-5<0$, $x+1>0$

$5 < x$ $\rightarrow$ si $x=100 \rightarrow x-5>0$, $x+1>0$

Nuestra inecuación se rompe en tres inecuaciones, una en cada intervalo.

$$\begin{Bmatrix} -(x-5)+(x+1)<0 \ si \ x<-1 \\ -(x-5)-(x+1)<0 \ si \ -1\leq x\leq 5 \\ (x-5)-(x+1)<0 \ si \ 5<x \end{Bmatrix}$$

Resolvemos cada inecuación. La solución será válida siempre que esté dentro del intervalo donde se define cada inecuación.

Si $x<-1 \rightarrow -x+5+x+1<0 \rightarrow 6<0$ → Absurdo matemático → No hay solución

Si $-1\leq x\leq 5 \rightarrow -x+5-x+1<0 \rightarrow -2x+6<0 \rightarrow -2x<-6 \rightarrow x>3$ → Por lo tanto la solución será $3<x\leq 5$ debido al intervalo donde está definida la inecuación.

Si $5<x \rightarrow x-5-x-1<0 \rightarrow -6<0$ → Tautología o verdad evidente → Por lo tanto la inecuación se cumple en cualquier punto del intervalo donde está definida. La solución resulta $5<x$.

La solución final será la unión de los intervalos solución de cada inecuación en particular.

Solución: $\{3<x\leq 5\}\cup\{5<x\}=(3,+\infty)$

Desigualdades 2

Demostrar:

a) $||x|-|y|| \leq |x-y|$

b) $||x|-|y|| \leq |x+y|$

a) Demostrar $||x|-|y|| \leq |x-y|$ significa demostrar que el valor absoluto de la diferencia de valores absolutos, es menor o igual que el valor absoluto de la diferencia.

Para ello vamos a utilizar la **propiedad de la desigualdad triangular del valor absoluto**:

$$|a+b| \leq |a|+|b|$$

Esta es una propiedad importante, que aparece con frecuencia en los ejercicios de valor absoluto. Es bueno no olvidarla.

Partimos de $|x|$. Si dentro del valor absoluto sumamos y restamos la misma cantidad, es como si sumáramos 0. Es decir:

$$|x|=|x+y-y|=|(y)+(x-y)|$$

Hemos puesto entre paréntesis los dos términos sobre los que vamos a aplicar la desigualdad triangular.

$$|x|=|(y)+(x-y)| \leq |y|+|x-y| \rightarrow |x| \leq |y|+|x-y| \rightarrow |x|-|y| \leq |x-y| \quad \textbf{(A)}$$

Si ahora partimos de $|y|$ podemos razonar de la misma manera.

$$|y|=|y+x-x|=|(x)+(y-x)|$$

Aplicamos desigualdad triangular.

$$|y|=|(x)+(y-x)| \leq |x|+|y-x| \rightarrow |y| \leq |x|+|y-x| \rightarrow |y|-|x| \leq |y-x|$$

Si multiplicamos ambos miembros por (-1) la desigualdad cambia de sentido.

$$(-1)(|y|-|x|)\geq(-1)|y-x| \quad \rightarrow \quad |x|-|y|\geq-|y-x|$$

Y nos damos cuenta que **el valor absoluto de un número coincide con el valor absoluto de su opuesto**. Es decir:

$$|a|=|-a|$$

Por lo tanto → $|y-x|=|x-y| \quad \rightarrow \quad |x|-|y|\geq-|x-y|$ **(B)**

Si unimos las condiciones (A) y (B) llegamos a la conclusión:

$-|x-y|\leq|x|-|y|\leq|x-y|$ **(C)**

Y recordamos una nueva propiedad: la acotación de un valor absoluto.

$$-b\leq a\leq b \Leftrightarrow |a|\leq b$$

Si aplicamos esta propiedad sobre la condición (C):

$||x|-|y||\leq|x-y|$ → c.q.d.

b) Para demostrar $||x|-|y||\leq|x+y|$ seguimos unos pasos muy parecidos al del apartado anterior.

$|x|=|x+y-y|=|(x+y)+(-y)|$ → Desigualdad triangular → $|x|\leq|x+y|+|-y|$

Y como el valor absoluto de un número coincide con el valor absoluto de su opuesto, nos queda:

$|x| \leq |x+y| + |y| \rightarrow |x| - |y| \leq |x+y|$ **(A)**

Por otro lado:

$|y| = |y+x-x| = |(y+x)+(-x)|$ → Desigualdad triangular → $|y| \leq |y+x| + |-x|$

Y como el valor absoluto de un número coincide con el valor absoluto de su opuesto, nos queda:

$|y| \leq |x+y| + |x| \rightarrow |y| - |x| \leq |x+y|$

Si multiplicamos ambos miembros por (-1) la desigualdad cambia de sentido.

$(-1)(|y| - |x|) \geq (-1)|x+y| \rightarrow |x| - |y| \geq -|x+y|$ **(B)**

Si unimos las condiciones (A) y (B) llegamos a la conclusión:

$-|x+y| \leq |x| - |y| \leq |x+y|$ **(C)**

Por la propiedad de acotación del valor absoluto:

$-b \leq a \leq b \Leftrightarrow |a| \leq b$

Aplicado a (C):

$||x| - |y|| \leq |x+y|$ → c.q.d.

Demostraciones por inducción matemática

Inducción 1

Demuéstrese que las siguienes igualdades son ciertas para todo número natural n .

a) $1+1+2+...+2^n=2^{n+1}$

b) $1+3+...+(2n-1)=n^2$

c) $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

a) $1+1+2+...+2^n=2^{n+1} \rightarrow 2+...+2^n=2^{n+1}-2 \rightarrow 2^1+2^2+...+2^n=2^{n+1}-2$

En notación de sumatoria → $\sum_{i=1}^{n} 2^i=2^{n+1}-2$

Tenemos una serie $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ formada por los valores $2, 6, 14, ..., 2^{n+1}-2$, tal y como podemos comprobar:

$$a_1=2^1=\sum_{i=1}^{1} 2^i=2$$

$$a_2=2^1+2^2=\sum_{i=1}^{2} 2^i=6$$

$$a_3=2^1+2^2+2^3=\sum_{i=1}^{3} 2^i=14$$

…...

$$a_n=2^1+2^2+2^3+...+2^n=\sum_{i=1}^{n} 2^i=2^{n+1}-2$$

Debemos demostrar la validez de la expresión general del término n-ésimo de la serie. En este tipo de ejercicios es útil recurrir a la demostración por inducción matemática ("inducir" significa ir de lo particular a lo general). Los pasos a seguir son:

1. Comprobar que se cumple para el término a_1 .
2. Suponer cierto el término n-ésimo a_n .
3. Demostrar el término (n+1)-ésimo a partir de a_1 y a_n .

Si $n=1$ → $a_1=2^{1+1}-2=2$ → Coincide con el primer valor $a_1=2$

Suponemos cierto el término n-ésimo → $a_n=2^{n+1}-2$

Nos preguntamos: ¿Es cierto $a_{n+1}=2^{n+2}-2$?

Debemos demostrarlo utilizando únicamente los términos a_1 y a_n .

$a_{n+1}=2^1+2^2+...+2^n+2^{n+1}$

Como $2^1+2^2+...+2^n=a_n=2^{n+1}-2$ → $a_{n+1}=2^{n+1}-2+2^{n+1}=2\cdot 2^{n+1}-2=2^{n+2}-2$ → c.q.d.

b) $1+3+...+(2n-1)=n^2$

Los términos de la serie lo forman la suma de los n-primeros números naturales impares, es decir: $1,4,9,...,n^2$. Donde:

$a_1=1=1$

$a_2=1+3=4$

$a_3=1+3+5=9$

…...

$a_n=1+3+...+(2n-1)=n^2$

Comprobamos que la fórmula general se cumple para el primer término → $a_1=1^2=1$

Suponemos cierta la expresión para el término n-ésimo → $a_n=n^2$

Nos preguntamos: ¿Es cierto $a_{n+1}=(n+1)^2=n^2+2n+1$?

Debemos demostrarlo utilizando únicamente los términos a_1 y a_n .

$a_{n+1}=1+3+...+(2n-1)+(2n+1)$

Como $a_n=1+3+...+(2n-1)=n^2$ → $a_{n+1}=n^2+(2n+1)=n^2+2n+1$ → c.q.d.

c) $1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Los términos de la serie son la suma de los cuadrados de los n-primeros números naturales.

Es decir: $1,5,14,...,\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. Donde:

$a_1=1^1=1$

$a_2=1^2+2^2=5$

$a_3=1^2+2^2+3^2=14$

…...

$a_n=1^2+2^2+3^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Comprobamos que se cumple para el primer término → $a_1=\frac{1(1+1)(2\cdot 1+1)}{6}=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6}=1$

Suponemos cierto el término n-ésimo → $a_n=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$

Nos preguntamos:

¿Es cierto $a_{n+1}=\frac{(n+1)(n+1+1)(2(n+1)+1)}{6}=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}=\frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}$?

Debemos demostrarlo utilizando únicamente los términos a_1 y a_n .

$a_{n+1}=1^2+2^2+3^3+...+n^2+(n+1)^2$

Como $a_n=1^2+2^2+...+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ → $a_{n+1}=a_n+(n+1)^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2$

$a_{n+1}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}+(n+1)^2$ → m.c.m. → $a_{n+1}=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}+\frac{6(n^2+2n+1)}{6}$

$a_{n+1}=\frac{2n^3+9n^2+13n+6}{6}$ → c.q.d.

Inducción 2

En el conjunto de polinomios en las indeterminaciones x e y con coeficientes reales, demuéstrese que $x-y$ es divisor de x^n-y^n siendo $N\in\mathbb{N}$.

El polinomio $x-y$ es divisior de x^n-y^n si la división $\frac{x^n-y^n}{x-y}=p\ ,\ p\in\mathbb{R}$. O lo que es lo mismo, si se cumple $x^n-y^n=p(x-y)\ ,\ p\in\mathbb{R}$

Aplicando inducción matemática, comprobamos que es cierto para $n=1$.

Si $n=1\ \rightarrow\ x^1-y^1=(x-y)=1(x-y)\ \rightarrow\ p=1$.

Suponemos cierta la igualdad para el valor n-ésimo $n\ \rightarrow\ x^n-y^n=p(x-y)\ ,\ p\in\mathbb{R}$.

Demostramos la igualdad para $n+1$, utilizando únicamente $n=1$ y n .

Nos preguntamos: ¿Es cierto $x^{n+1}-y^{n+1}=p(x-y)\ ,\ p\in\mathbb{R}$?

Partimos de $x^{n+1}-y^{n+1}$, donde sumamos y restamos la misma cantidad $x\,y^n$. Es decir:

$x^{n+1}-y^{n+1}=x^{n+1}-y^{n+1}+x\,y^n-xy^n=x^{n+1}-xy^n+x\,y^n-y^{n+1}=x^n\cdot x-xy^n+x\,y^n-y^n\cdot y$ **(A)**

Sacamos factor común.

$x^n\cdot x-xy^n+x\,y^n-y^n\cdot y=x(x^n-y^n)+y^n(x-y)$ **(B)**

Usamos el valor n-ésimo $x^n-y^n=p(x-y)\ ,\ p\in\mathbb{R}$ y lo sustituimos en (B).

$x(x^n-y^n)+y^n(x-y)=x\,p(x-y)+y^n(x-y)=(x\,p+y^n)(x-y)$ **(C)**

Por lo general, la expresión $(xp+y^n)$ será un número real, que llamaremos por ejemplo q . Y sustituimos en (C) la igualdad $(xp+y^n)=q\ ,\ q\in\mathbb{R}$.

$(x\,p+y^n)(x-y)=q(x-y)$ **(D)**

Si igualamos el inicio de la expresión en (A) con el final de la expresión en (D), nos queda:

$x^{n+1}-y^{n+1}=q(x-y)\ ,\ q\in\mathbb{R}\ \rightarrow$ c.q.d.

Complejos

Complejos 1

Calcular la parte real e imaginaria de los números:

a) $\frac{2}{1-3i}$

b) $(1+i\sqrt{3})^6$

a) Un número complejo se escribe en forma afija $z=a+bi$, donde a es la parte real y b la parte imaginaria.

En forma polar $a=|z|_\alpha$, donde el módulo $|z|=\sqrt{a^2+b^2}$ y la fase $\alpha=arcotg(\frac{b}{a})$.

Para sumar y restar complejos la notación afija es más cómoda.

Para multiplicar, dividir, potencias y raíces la notación polar suele ser mejor.

$z=\frac{2}{1-3i}$

2 → número real puro → $2=2_0$

$1-3i$ → $módulo=\sqrt{10}$, $fase=arctg(\frac{-3}{1})=288{,}44^o$ → fase del cuarto cuadrante, con tener parte real positiva y parte imaginaria negativa.

$z=\frac{2}{1-3i}=\frac{2_0}{\sqrt{10}_{288{,}44^o}}$ → Se dividen los módulos y se restan las fases

$z=(\frac{2}{\sqrt{10}})_{-288{,}44^o}=(\frac{2}{\sqrt{10}})_{71{,}56^o}=(\frac{\sqrt{10}}{5})_{71{,}56^o}$ → Dejamos fase positiva en la primera vuelta

b) $z=(1+i\sqrt{3})^6$

$1+i\sqrt{3}$ → $módulo=\sqrt{4}=2$, $fase=arctg(\frac{\sqrt{3}}{1})=60º$ → fase del primer cuadrante, con parte real e imaginaria positiva.

$z=(1+i\sqrt{3})^6=(2_{60º})^6$ → Se eleva el módulo a la potencia, y la fase se multiplica por la potencia.

$z=(2^6)_{60º\cdot 6}=64_{360º}=64_{0º}$

Complejos 2

Calcular la raiz $z=\sqrt[5]{1+i}$

$1+i \rightarrow$ $módulo=\sqrt{2}$, $fase=arctg(\frac{1}{1})=45º \rightarrow 1+i=(\sqrt{2})_{45º}$

$z=\sqrt[5]{(\sqrt{2})_{45º}} \rightarrow$ Se aplica raíz al módulo y se divide la fase, saliendo 5 soluciones distintas debido a la raíz quinta de la siguiente forma.

$z=(\sqrt[10]{2})_{\frac{45º+k\cdot 360º}{5}}, k=\{0,1,2,3,4\}$

Si $k=0 \rightarrow z_1=(\sqrt[10]{2})_{\frac{45º}{5}}=(\sqrt[10]{2})_{9º}$

Si $k=1 \rightarrow z_2=(\sqrt[10]{2})_{\frac{45º+1\cdot 360º}{5}}=(\sqrt[10]{2})_{81º}$

Si $k=2 \rightarrow z_3=(\sqrt[10]{2})_{\frac{45º+2\cdot 360º}{5}}=(\sqrt[10]{2})_{153º}$

Si $k=3 \rightarrow z_4=(\sqrt[10]{2})_{\frac{45º+3\cdot 360º}{5}}=(\sqrt[10]{2})_{225º}$

Si $k=4 \rightarrow z_5=(\sqrt[10]{2})_{\frac{45º+4\cdot 360º}{5}}=(\sqrt[10]{2})_{297º}$

Recordamos que entre solución y solución solo cambia la fase, sumando cada vez $\frac{360º}{5}=72º$ respecto a la fase anterior.

Si hacemos $k=5$ volvemos a obtener ma misma solución que para $k=0$ pero añadiendo un giro completo.

Límites

Límites 1

Estudiar el comportamiento de la función $f: A \to \mathbb{R}$ en el punto indicado en cada caso:

a) $A=\mathbb{R}-\{0\}, f(x)=\dfrac{sen(3x)}{x}, x=0$

b) $A=\mathbb{R}-\{-2,2\}, f(x)=\dfrac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}, x=2$

c) $A=\mathbb{R}^+-\{1\}, f(x)=\dfrac{1}{\ln(x)}-\dfrac{1}{x-1}, x=1$

a) La función no está definida en $x=0$, ya que no puedo dividir por cero. Aplico límite.

$$\lim_{x\to 0}\frac{sen(3x)}{x}=\frac{0}{0} \rightarrow \text{indeterminación} \rightarrow \text{L'Hôpital} \rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)\cdot 3}{1}=\frac{3}{1}=3$$

Existe el límite cuando $x\to 0$. Por lo que en $x=0$ encontramos una discontinuidad evitable.

b) La función no está definida en $x=2$, ya que no puedo dividir por cero. Aplico límite.

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}=\frac{0}{0} \rightarrow \text{Indeterminación} \rightarrow \text{Multiplico y divido por conjugado del numerador}$$

$$\lim_{x\to 2}\frac{\sqrt{x^2+5}-3}{x^2-4}\cdot\frac{\sqrt{x^2+5}+3}{\sqrt{x^2+5}+3}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2+5-9}{(x^2-4)(\sqrt{x^2+5}+3)}=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-4}{(x^2-4)(\sqrt{x^2+5}+3)}$$

Simplificamos.

$$\lim_{x\to 2}\frac{1}{\sqrt{x^2+5}+3}=\frac{1}{6}$$

Existe el límite, por lo que en $x=2$ tenemos una discontinuidad evitable.

c) La función no está definida en $x=1$, ya que no puedo dividir por cero. Aplico límite.

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{\ln(x)}-\frac{1}{x-1}\right)=\infty-\infty \rightarrow \text{Indeterminación}$$

Operamos y dejamos todo en forma de una sola fracción.

$$\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)-\ln(x)}{(x-1)\ln(x)} = \frac{0}{0} \quad \to \text{L'Hôpital} \to \quad \lim_{x\to 1} \frac{1-\frac{1}{x}}{\ln(x)+(x-1)\frac{1}{x}}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{\frac{x-1}{x}}{\ln(x)+\frac{x-1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{\frac{x-1}{x}}{\frac{x\ln(x)+x-1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x-1}{x\ln(x)+x-1} = \frac{0}{0} \quad \to \text{L'Hôpital}$$

$$\lim_{x\to 1} \frac{1}{\ln(x)+x\frac{1}{x}+1} = \frac{1}{2}$$

Existe el límite, por lo que en $x=1$ tenemos una discontinuidad evitable.

Límites 2

Resolver:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{2+3e^x}{\sqrt{2+3x^2}}$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2+3e^x}{\sqrt{2+3x^2}}$

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{2+3e^x}{\sqrt{2+3x^2}}$ → Evaluamos → $\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación

Podemos aplicar L'Hôpital, o bien dividir todo por la exponencial (ya que en el infinito, la exponencial es la función que más rápido se dispara hacia infinito).

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2+3e^x}{\sqrt{2+3x^2}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{e^x}+\frac{3e^x}{e^x}}{\sqrt{\frac{2}{e^{2x}}+\frac{3x^2}{e^{2x}}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{e^x}+3}{\sqrt{\frac{2}{e^{2x}}+\frac{3x^2}{e^{2x}}}} = \frac{3}{0} = \infty$$

b) $\lim_{x\to-\infty} \frac{2+3e^x}{\sqrt{2+3x^2}}$ → Recordamos que la exponencial, en $-\infty$, tiende a cero.

$\lim_{x\to-\infty} \frac{2+3e^x}{\sqrt{2+3x^2}}$ → Evaluamos → $\frac{2+0}{\infty}=0$

Teoremas de continuidad y derivabilidad

Teoremas 1

Sea $a>1$. Probar que la ecuación $x+e^{-x}=a$ tiene, al menos, una solución positiva y otra negativa.

Los problemas de existencia de solución se demuestran, por norma general, con el Teorema de Bolzano. Este teorema afirma:

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$ y $f(a)\cdot f(b)<0$ → Se cumple que $\exists c\in(a,b)/f(c)=0$

Por lo tanto, debemos buscar dos intervalos donde se cumpla Bolzano y que respondan a las necesidades del enunciado.

Si $x+e^{-x}=a$ → $x+e^{-x}-a=0$ → Llamemos $f(x)=x+e^{-x}-a$, por lo que debemos estudiar la existencia de solución en $f(x)=0$.

La función $f(x)$ es continua en toda la recta real, por ser suma de polinomio y exponencial (ambas, funciones continuas en toda la recta real).

Proponemos el primer intervalo:

[$-\infty$, 0]

$f(-\infty)>0$ → ya que la exponencial vence a cualquier polinomio en el infinito

$f(0)=0+e^{0}-a=1-a<0$ → ya que $a>1$

$f(-\infty)\cdot f(0)<0$ → $\exists c_1\in(-\infty,0)/f(c_1)=0$

Y el segundo intervalo:

[0, $+\infty$]

$f(0)<0$

$f(+\infty)>0$ → ya que un $e^{-\infty}=0$ y el polinomio $x-a$ es estrictamente creciente

$f(0)\cdot f(+\infty)<0$ → $\exists c_2\in(0,+\infty)/f(c_2)=0$ → c.q.d.

Teoremas 2

Determinar el número de raíces reales de la ecuación $2x^3-3x^2-12x=m$ según el valor de $m\in\mathbb{R}$.

Por el teorema fundamental del álgebra un polinomio de grado n puede tener, como máximo, n soluciones reales. Por lo tanto, el polinomio $P(x)=2x^3-3x^2-12x-m$ puede tener, como máximo, tres soluciones reales.

Aplicamos en primer lugar el Teorema de Bolzano para demostrar si existe al menos una solución.

En el intervalo $(-\infty,+\infty)$ el polinomio es continuo y, por ser de grado impar, se cumple:

$$P(x\to-\infty)<0 \quad , \quad P(x\to+\infty)>0 \quad \to \quad P(x\to-\infty)\cdot P(x\to+\infty)<0$$

Se cumplen las condiciones del Teorema de Bolzano, por lo que podemos afirmar que $\exists c\in(-\infty,+\infty)/P(c)=0$. Es decir, nuestro polinomio posee, como mínimo, una solución real independientemente del valor del parámetro m .

El polinomio podrá tener dos o tres soluciones según donde se sitúen su máximo y mínimo relativo.

$P(x)=2x^3-3x^2-12x-m \quad \to \quad P'(x)=6x^2-6x-12$

$P'(x)=0 \quad \to \quad x=-1, x=2$ → puntos críticos

$P''(x)=12x-6$

$P''(-1)<0 \quad \to \quad x=-1$ máximo relativo

$P''(2)>0 \quad \to \quad x=2$ mínimo relativo

Nuestra función, por ser polinómica de grado impar, será estictamente creciente en $(-\infty,-1)$, estrictamente decreciente en $(-1,2)$ y estrictamente creciente en el intervalo $(2,+\infty)$.

Si el máximo relativo cumple $P(-1)<0$ o bien el mínimo relativo cumple $P(2)>0$, la función solo cortará al eje horizontal una vez.

Si $P(-1)=0$ o bien $P(2)=0$, la función cortará al eje horizontal dos veces.

En caso contrario, la función cortará al eje horizontal tres veces.

$P(x)=2x^3-3x^2-12x-m \rightarrow P(-1)=7-m$, $P(x)=-20-m$

Solución única: $P(-1)<0$ o bien $P(2)>0$

$7-m<0 \rightarrow 7<m$

$-20-m>0 \rightarrow -20>m$

$m\in(-\infty,-20)\cup(7,+\infty)$

Dos soluciones: $P(-1)=0$ o bien $P(2)=0$

$7-m=0 \rightarrow m=7$

$-20-m=0 \rightarrow m=-20$

Tres soluciones: $m\in(-20,7)$

Estudio de funciones

Estudio de funciones 1

Pruébese que si $0<a<1$ **se verifica** $(1+x)^a \leq 1+ax\ ,\ \forall x \geq -1$

Sea $f(x)=(1+x)^a$ y sea $g(x)=1+ax$.

Definimos $h(x)=f(x)-g(x)=(1+x)^a-(1+ax)$ $\rightarrow$ función continua en $x \geq -1$ por ser suma de funciones continuas en ese intervalo. Recordamos que $0<a<1$.

De esta forma la desigualdad del enunciado la podemos escribir:

$$(1+x)^a \leq 1+ax \quad \rightarrow \quad (1+x)^a-(1+ax) \leq 0 \quad \rightarrow \quad f(x)-g(x) \leq 0 \quad \rightarrow \quad h(x) \leq 0\ ,\ \forall x \geq -1$$

Nuestro ejercicio se reduce a demostrar que la función $h(x)=(1+x)^a-(1+ax)$ es negativa o nula en el intervalo $x \geq -1$.

En primer lugar evaluamos la función $h(x)$ en el punto frontera $x=-1$.

$$h(-1)=(1-1)^a-(1-a)=0^a-1+a=-1+a<0 \quad \rightarrow \text{ya que } 0<a<1$$

Es decir, la función es negativa en el punto $x=-1$ donde comienza su dominio de definición. Estudiamos la existencia de extremos relativos, para conocer el comportamiento de la función y si cortará o no al eje horizontal. Aplicamos la condición necesaria de extremo relativo (primera derivada nula).

$$h(x)=(1+x)^a-(1+ax) \quad \rightarrow \quad h'(x)=a(1+x)^{a-1}-a=a[(1+x)^{a-1}-1]$$
$$h'(x)=0 \quad \rightarrow \quad a[(1+x)^{a-1}-1]=0$$

Esta igualdad supone:

- o bien $a=0$ (lo cual no es posible porque $0<a<1$)
- o bien $(1+x)^{a-1}-1=0$ $\rightarrow$ $(1+x)^{a-1}=1$ $\rightarrow$ $x=0$ $\rightarrow$ punto crítico

En $x=0$ la función $h(x)$ toma el valor $h(0)=0$. Si demostramos que $x=0$ es un máximo relativo de la función habremos demostrado que $h(x)$ nunca estará por encima del eje horizontal, ya que la imagen de su máximo relativo es $h(0)=0$, la imagen de

$h(-1)<0$ y la función es continua. Y habremos resuelto el ejercicio.

Para ello aplicamos la condición suficiente de extremo relativo con el método de la segunda derivada.

$h'(x)=a(1+x)^{a-1}-a \rightarrow h''(x)=a(a-1)(1+x)^{a-1}$

$h''(0)=a(a-1)<0$ → ya que $0<a<1 \rightarrow x=0$ es máximo relativo de $h(x)$ → c.q.d.

Estudio de funciones 2

Dada la función $f:A\to\mathbb{R}$ **, estudiese la continuidad y la derivabilidad de:**

$A=[-1,1]$ **y** $f(x)=\sqrt{1-x^2}$

El dominio de la función es $A=[-1,1]$, ya que esos valores hacen el discrimante no nulo.

La continuidad se estudia, en primer lugar, en los intervalos abiertos y en segundo lugar en los puntos frontera.

En $(-1,1)$ la función es continua por ser un polinomio no nulo dentro de una raíz cuadrada. Cualquier polinomio es continuo en toda la recta real, por lo que $f(x)$ será continua en $(-1,1)$.

En el punto frontera $x=-1$ aplicamos las tres condiciones de continuidad en un punto.

1. $\exists f(-1)=0$
2. Estudiamos solo el límite lateral derecho, ya que la función no está definida a la izquierda de $x=-1$ $\rightarrow$ $L^{+}=\lim_{x\to 1^{+}}\sqrt{1-x^2}=0$ $\rightarrow$ $L^{+}=L=0$
3. $f(-1)=L$ $\rightarrow$ $0=0$

La función es continua en $x=-1$. Repetimos el razonamiento para $x=1$.

1. $\exists f(1)=0$
2. Estudiamos solo el límite lateral izquierdo, ya que la función no está definida a la derecha de $x=1$ $\rightarrow$ $L^{-}=\lim_{x\to 1^{-}}\sqrt{1-x^2}=0$ $\rightarrow$ $L^{-}=L=0$
3. $f(1)=L$ $\rightarrow$ $0=0$

La función es continua en $x=-1$.

Para estudiar la derivabilidad, derivamos la función y estudiamos nuevamente el intervalo abierto por un lado y los puntos frontera por otro.

$$f(x)=\sqrt{1-x^2} \rightarrow f'(x)=\frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}$$

En $(-1,1)$ la función derivada está correctamente definida, ya que el numerador es un polinomio (continuo en toda la recta real), el denominador no se anula (ya que no estamos considerando los valores $x=\pm 1$) y el discriminante nunca se hace negativo. Si la función derivada $f'(x)$ es continua en $(-1,1)$ significa que la función original $f(x)$ es derivable en $(-1,1)$.

Para estudiar la derivabilidad en los puntos frontera debemos comprobar si las derivadas laterales existen, son finitas y coinciden.

Si $x=-1$ $\rightarrow$ Nos preguntamos solo por la derivada lateral derecha $\rightarrow$ $f'(-1^+)=\lim_{x\to -1^+} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{2}{0^+}=+\infty$ $\rightarrow$ $f(x)$ no es derivable en $x=-1$

Si $x=1$ $\rightarrow$ Nos preguntamos solo por la derivada lateral izquierda $\rightarrow$ $f'(-1^+)=\lim_{x\to -1^+} \frac{-2x}{\sqrt{1-x^2}}=\frac{-2}{0^+}=-\infty$ $\rightarrow$ $f(x)$ no es derivable en $x=1$

Derivadas Parciales

Derivadas parciales 1

Determinar las derivadas parciales de $f(x,y,z)=xy+xz+yz$. Calcular los extremos relativos y comprobar si esos extremos son absolutos o no.

Para derivar de forma parcial consideramos **una de las incógnitas como variable de derivación y el resto como constantes** (recordamos que la derivada de una constante vale cero).

Por ejemplo, la derivada parcial de $f(x,y,z)$ respecto la variable x sería:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x}=y+z$$

Y de forma análoga con el resto de derivadas parciales:

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y}=x+z$$

$$\frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z}=x+y$$

Cada derivada parcial, a su vez, se puede volver a derivar (sobre la misma variable o sobre otra variable). Esto daría paso a las derivadas parciales de orden dos, orden tres, etc. Por ejemplo, todas las derivadas de orden dos serían:

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}=\frac{\partial f}{\partial x}[y+z]=0$ → Primero derivo sobre x y luego derivo otra vez sobre x

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}=\frac{\partial f}{\partial y}[y+z]=1$ → Primero derivo sobre x y luego derivo sobre y

$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}=\frac{\partial f}{\partial z}[y+z]=1$ → Primero derivo sobre x y luego derivo sobre z

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}=\frac{\partial f}{\partial x}[x+z]=1$ → Primero derivo sobre y y luego derivo sobre x

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}[x+z] = 0$ → Primero derivo sobre y y luego derivo otra vez sobre y

$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial f}{\partial z}[x+z] = 1$ → Primero derivo sobre y y luego derivo sobre z

$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \frac{\partial f}{\partial x}[x+y] = 1$ → Primero derivo sobre z y luego derivo sobre x

$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \frac{\partial f}{\partial y}[x+y] = 1$ → Primero derivo sobre z y luego derivo sobre y

$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}[x+y] = 0$ → Primero derivo sobre z y luego derivo otra vez sobre z

Si con las derivadas parciales de orden uno hacemos el vector $(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$ tendremos lo que se conoce como **gradiente** y se denota:

$$\nabla f(x, y, z) = (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z})$$

En nuestro ejemplo el vector gradiente sería:

$\nabla f(x, y, z) = (y+z, x+z, x+y)$ → Vector en $\mathbb{R}^3$

Aquellos valores que anulen todas las componentes del vector gradiente, son los puntos criticos (candidatos a extremos relativos).

$\nabla f(x, y, z) = (0,0,0)$ → Condición necesaria de extremo relativo

En nuestro ejemplo, tendremos un sistema 3×3 , que podemos resolver.

$\begin{Bmatrix} y+z=0 \\ x+z=0 \\ x+y=0 \end{Bmatrix}$ → Resolvemos → $x=0, y=0, z=0$ → $(0,0,0)$ es punto crítico

Como ocurría en una variable, los puntos críticos pueden ser extremos relativos o pueden no serlo. Necesitamos una condición suficiente para comprobarlo.

Esta condición suficiente de extremos relativo en varias variables se hace estudiando el determinante de una matriz. ¡¡Qué cosas tienen las Mates!! ¿Quién nos iba a decir que podíamos mezclar funciones con matrices?

La **matriz Hessiana** es una matriz cuadrada formada por las derivadas parciales de orden dos. Y se expresa así:

$$H(x,y,z)=\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial z} \end{pmatrix}$$

Evaluar la matriz Hessiana en el punto (a,b,c) significa hacer $H(a,b,c)$. Es decir, debemos sutituir los valores (a,b,c) en las expresiones que hayan salido en cada coeficiente de la matriz.

Se llama **Hessiano al determinante de la matriz** $H(a,b,c) \rightarrow det(H(a,b,c))$

En nuestro ejemplo la matriz Hessiana será:

$$H(x,y,z)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Los coeficientes de este ejemplo son constantes, por lo que si evaluamos la matriz en el punto crítico $(0,0,0)$ nos queda igualmente:

$$H(0,0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Y el Hessiano es igual al determinante de esta matriz.

$$det(H(0,0,0))=0+1+1-(0+0+0)=2$$

Antes de explicar la condición suficiente de extremo relativo, debemos recordar el concepto de **menor de un determinant**e. Dado un determinante $|H|$ el menor $|H_{ij}|$ es el determinante resultante de eliminar la fila i-ésima y la columna j-ésima.

Si $|H|$ es un determinante de orden 3, tendremos menores de orden 2 y de orden 1.

El menor de orden 2 resultante de eliminar la fila 3 y la columna 3 se llama menor principal de orden 2 y lo denotamos $|H_2|$.

El menor de orden 1 resulante de eliminar las filas 2 y 3, y las columnas 2 y 3 se llama menor principal de orden 1 y lo denotamos $|H_1|$.

Pues bien, la **condición suficiente de extremo relativo** en (a,b,c) para funciones $f(x,y,z)$ de tres variables es:

- Si $|H(a,b,c)|>0$ y sus menores principales de orden 2 y 1 son también positivos, tendremos un mínimo relativo en (a,b,c) .

- Si $|H(a,b,c)|<0$ y sus menores principales son de signo alterno ($|H_1|<0$, $|H_2|>0$, $|H|<0$), tendremos un máximo relativo en (a,b,c) .

- Si $|H(a,b,c)|\neq 0$ y sus menores principales son distintos de cero, y no es ninguno de los casos anteriores, tendremos un punto de silla (lo que en una dimensión llamábamos punto de inflexión). No habrá extremo relativo en (a,b,c) .

- Si $|H(a,b,c)|=0$ ó al menos alguno de los menores principales es nulo, no podremos concluir nada sobre el punto crítico. Necesitaremos otro criterio de estudio de la función en ese punto.

En nuestro ejemplo:

$$H(0,0,0)=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |H|=2>0 \quad , \quad |H_2|=-1<0 \quad , \quad |H_1|=0$$

En consecuencia, con el Hessiano, no podemos determinar si estamos ante un extremo relativo.