Teoría – Tema 9

Distancias, producto vectorial y producto mixto

Índice de contenido

Distancias entre dos puntos

La distancia entre dos puntos $A(x_1, y_1, z_1)$ y $B(x_2, y_2, z_2)$ es igual al módulo del vector que tiene por extremos ambos puntos.

$$d(A,B)=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

Producto vectorial

El producto vectorial es una operación interna entre dos vectores de tres dimensiones.

¿Qué significa esto? Que el resultado del producto vectorial es otro vector de tres dimensiones.

El producto vectorial de dos vectores $\vec{u}=(u_x, u_y, u_z)$ y $\vec{v}=(v_x, v_y, v_z)$ se denota $\vec{u}\times\vec{v}$ o bien $\vec{u}\wedge\vec{v}$.

Para obtener una “regla mnemotécnica” que permita calcular el vector resultante del producto vectorial, debemos recordar que todo vector puede expresarse como combinación lineal delos tres vectores unitarios de la base canónica.

$$\vec{u}=(u_x, u_y, u_z)=u_x\hat{i}+u_y\hat{j}+u_z\hat{k}$$

$$\vec{v}=(v_x, v_y, v_z)=v_x\hat{i}+v_y\hat{j}+v_z\hat{k}$$

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ u_x & u_y & u_z\\ v_x & v_y & v_z\end{vmatrix}=(u_y v_z-u_z v_y)\hat{i}+(u_z v_x-u_x v_z)\hat{j}+(u_x v_y-u_y v_x)\hat{k}=(u_y v_z-u_z v_y, u_z v_x-u_x v_z, u_x v_y-u_y v_x)$$

Importante: El resultado del producto vectorial es otro vector. Repetimos: El resultado del producto vectorial es otro vector.

Ejemplo

Calcula el producto vectorial de $\vec{u}=(2,3,1)$ y $\vec{v}=(1,2,1)$.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=3\hat{i}+\hat{j}+4\hat{k}-(3\hat{k}+2\hat{j}+2\hat{i})=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}=(1,-1,1)$$

Algunas propiedades importantes del producto vectorial:

- Es anticonmutativo → $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$
- Es distributivo respecto de la suma de vectores → $\vec{u}\times(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}\times\vec{v}+\vec{u}\times\vec{w}$
- El producto vectorial $\vec{u}\times\vec{v}$ es perpendicular al plano que contiene a las vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ → $(\vec{u}\times\vec{v})\perp\vec{u}$, $(\vec{u}\times\vec{v})\perp\vec{v}$. Esta propiedad nos permite, por ejemplo, obtener de forma directa un vector perpendicular a un plano, si conocemos dos vectores linealmente independientes del plano.
- El sentido del producto vectorial $\vec{u}\times\vec{v}$ viene dado por la regla del sacacorcho o por la regla de la mano derecha: girar el primer vector sobre el segundo

describiendo el camino más corto (por el menor ángulo). Algunos ejemplos intuitivos de este signo son: $\hat{i}\times\hat{j}=\hat{k}$, $\hat{j}\times\hat{i}=-\hat{k}$, $\hat{j}\times\hat{k}=\hat{i}$, $\hat{k}\times\hat{j}=-\hat{i}$, $\hat{k}\times\hat{i}=\hat{j}$, $\hat{i}\times\hat{k}=-\hat{j}$.

- El módulo del producto vectorial de dos vectores es igual al producto de los módulos de cada vector por el seno del ángulo que forman ambos vectores. Es decir: $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot sen(\alpha)$.
- El módulo al cuadrado de un producto vectorial cumple la siguiente relación → $|\vec{u}\times\vec{v}|^2=|\vec{u}|^2\cdot|\vec{v}|^2-(\vec{u}\cdot\vec{v})^2$

Ejemplo

Sea el punto $P(1,2,-1)$ y el plano dado en paramétricas $\Pi:\left\{\begin{array}{c} x=\alpha-\beta \\ y=1+\alpha-\beta \\ z=3-\alpha+2\beta \end{array}\right\}$. Obtener una recta perpendicular al plano que pase por el punto P .

Una opción para resolver este problema sería obtener la ecuación general del plano, y de ahí sacar directamente el vector normal al plano. Y con ese vector perpendicular al plano y el punto P , escribir la ecuación de la recta solución.

Otra opción, usando el producto vectorial, es realizar el producto vectorial de los dos vectores linealmente independientes que pertenecen al plano, y cuyos valores podemos obtener de la expresión en paramétricas.

$$\vec{u}=(1,1,-1) \quad , \quad \vec{v}=(-1,-1,2) \quad \rightarrow \quad \vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{vmatrix}=2\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}-()$$

$$\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=\hat{i}-\hat{j}=(1,-1,0)$$

Este vector es perpendicular al plano. En efecto, si hubiésemos obtenido la ecuación general del plano, obtendríamos $\Pi: x-y+1=0$ → Donde es obvio que el vector normal al plano es $\vec{u_\Pi}=(1,-1,0)$.

Pues bien. Con este vector y el punto del enunciado, podemos trazar la ecuación de la recta perpendicular al plano.

$$r:\left\{\begin{array}{c} x=1+\lambda \\ y=2-\lambda \\ z=-1 \end{array}\right\}$$

Ejemplo

Obtener una recta que corte de forma perpendicular a las dos siguientes rectas cruzadas:

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{5} \quad , \quad s:\frac{x+3}{1}=\frac{y-5}{4}=\frac{z-3}{2}$$

Busco una recta t que corte de forma perpendicular a la recta r y a la recta s .

El vector director $\vec{u}_t$ será perpendicular a cada vector director $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_s$. Por lo que se cumplirá → $\vec{u}_t=\vec{u}_r\times\vec{u}_s$

En nuestro ejemplo:

$$\vec{u}_r=(2,-3,5) \quad , \quad \vec{u}_s=(1,4,2) \quad \rightarrow \quad \vec{u}_t=\vec{u}_r\times\vec{u}_s=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & -3 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \end{vmatrix}=-26\,\hat{i}+\hat{j}+11\,\hat{k}=(-26,1,11)$$

Ya tenemos el vector director de la recta perpendicular solución. Necesitamos un punto. Recordamos que esta recta perpendicular corta a las rectas r y s en sendos puntos.

Vamos a obtener el plano Π que contiene a los vectores $\vec{u}_s$ y $\vec{u}_t$, y que pase por un punto de la recta s . Este plano es perpendicular a la recta r y lo cortará en un punto. Y por ese punto de intersección pasará la recta perpendicular t que estamos buscando.

$\vec{u}_s$ y $\vec{u}_t$ pertenecen a Π → $\vec{u}_s=(1,4,2)$, $\vec{u}_t=(-26,1,11)$

$$B(-3,5,3)\in s \quad \rightarrow \quad B(-3,5,3)\in\Pi$$

$$\Pi(\vec{u}_s,\vec{u}_t,B):\begin{vmatrix} 1 & -26 & x+3 \\ 4 & 1 & y-5 \\ 2 & 11 & z-3 \end{vmatrix}=0 \quad \rightarrow \quad \Pi:14x-21y+35z+42=0$$

Ahora debemos obtener el punto de intersección de este plano con la recta r . Lo más cómodo es pasar r a paramétricas y sustituir en la ecuación del plano.

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{5} \quad \rightarrow \quad r:\begin{Bmatrix} x=1+2m \\ y=-2-3m \\ z=5m \end{Bmatrix}$$

$14(1+2m)-21(-2-3\text{m})+35(5m)+42=0 \quad \rightarrow \quad m=\frac{49}{133}$ → El punto de corte del plano con la recta r resulta → $P(\frac{231}{133},\frac{-413}{133},\frac{245}{133})$

Y con el punto y el vector $\vec{u}_t=(-26,1,11)$ la recta solución es:

$$t:\frac{x-\frac{231}{133}}{-26}=\frac{y+\frac{413}{133}}{1}=\frac{z-\frac{245}{133}}{11}$$

Ejemplo

Hallar la ecuación de un plano que pase por el punto $A(-1,4,0)$ y sea perpendicular, respectivamente, a los planos:

$\Pi_1: x+4y-z+8=0$, $\Pi_2: -x+y+z-1=0$

El plano solución Π que buscamos debe ser perpendicular a los dos planos del anunciado. Por lo tanto, el vector normal $\vec{u_\Pi}$ debe ser perpendicular, respectivamente, al vector normal $\vec{u_{\Pi_1}}$ del primer plano, y al vector normal $\vec{u_{\Pi_2}}$ del segundo plano.

¿Y como obtenemos un vector que sea, simultáneamente, a otros dos vectores? ¡Exacto! Con el producto vectorial. ¡Bien pensado!

$\Pi_1: x+4y-z+8=0 \rightarrow \vec{u_{\Pi_1}}=(1,4,-1)$, $\Pi_2: -x+y+z-1=0 \rightarrow \vec{u_{\Pi_2}}=(-1,1,1)$

El vector $\vec{u_\Pi}$ cumple la relación:

$$\vec{u_\Pi}=\vec{u_{\Pi_1}}\times\vec{u_{\Pi_2}}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=5\hat{i}+5\hat{k}=(5,0,5) \rightarrow \text{Puedo simplificar} \rightarrow \vec{u_\Pi}=(1,0,1)$$

Como el plano debe pasar por el punto $A(-1,4,0)$, tendremos:

$\Pi: x+z+D=0$, $A(-1,4,0)\in\Pi \rightarrow -1+D=0 \rightarrow D=1 \rightarrow \Pi: x+z+1=0$

Producto mixto

Las matemáticas no dejan de sorprendernos. Hay operadores matemáticos para todo.

Al igual que existe el sandwich mixto y la cerveza mixta, también tenemos un producto mixto de vectores.

El producto mixto de tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ se define como el producto escalar del primero por el producto vectorial de los otros dos.

$$Producto \quad mixto \quad de \quad tres\, vectores \equiv \vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$$

Como el producto escalar sí es conmutativo, se cumple la siguiente relación:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=(\vec{v}\times\vec{w})\cdot\vec{u}$$

El resultado de un producto mixto siempre es un número, un escalar. Para obtenerlo, **primero realizamos el producto vectorial y luego el producto escalar**.

Ejemplo

Calcula el producto mixto de los vectores $\vec{u}=(1,0,-1)$, $\vec{v}=(2,3,1)$ y $\vec{w}=(1,2,1)$.

Por definición: $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$ → Primer realizo el producto vectorial y, a ese resultado, le aplico el producto escalar.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=3\,\hat{i}+\hat{j}+4\,\hat{k}-(3\,\hat{k}+2\,\hat{j}+2\,\hat{i})=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}=(1,-1,1)$$

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=(1,0,-1)\cdot(1,-1,1)=1-1=0$$

¿Cómo entender un valor nulo en el producto mixto?

Muy sencillo, el vector $\vec{u}=(1,0,-1)$ es perpendicular al vector obtenido tras el producto vectorial $(\vec{v}\times\vec{w})=(1,-1,1)$. Y el producto escalar de dos vectores perpendiculares es nulo.

¿Existe alguna "regla mnemotécnica" que nos permita obtener el escalar que genera el producto mixto de tres vectores?

Sí. **El producto mixto de tres vectores es igual al determinante de la matriz cuadrada que se obtiene al colocar cada vector en forma de fila o en forma de columna**.

Ejemplo

Calcula el producto mixto de los vectores $\vec{u}=(1,0,-1)$, $\vec{v}=(2,3,1)$ y $\vec{w}=(1,2,1)$.

Aplicamos la “regla mnemotécnica” del determinante.

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix}1 & 0 & -1\\ 2 & 3 & 1\\ 1 & 2 & 1\end{vmatrix}=3+0-4-(-3+2)=-1+1=0$$

Distancia de un punto a una recta

La distancia de un punto $P(x_{0,}y_{0,}z_0)$ a una recta r es la distancia del punto P al punto de corte M de la recta perpendicular a r que pasa por P .

Este punto M es la proyección ortogonal del punto P sobre la recta r .

¿Cómo obtenemos este punto M ?

Operamos de la siguiente forma. Ponemos la recta r en paramétricas y expresamos un punto genérico $M\in r$ en función del parámetro.

Obtenemos el vector $\vec{PM}$ que también dependerá del parámetro. Este vector es perpendicular al vector director de la recta r . Y el producto escalar de dos vectores perpendiculares es nulo.

$$\vec{PM}\cdot\vec{u}_r=0$$

De esta condición sacamos el valor concreto del parámetro que nos dará las coordenadas del punto M . La distancia buscada será el módulo del vector $|\vec{PM}|$.

Ejemplo

Obtener la distancia del punto $P(2,-1,2)$ a la recta $r:\begin{Bmatrix}x=-1+2t\\ y=-2t\\ z=1+t\end{Bmatrix}$.

Un punto genérico $M\in r$ es $M(-1+2t,-2t,1+t)$.

Y el vector $\vec{PM}=(-3+2t,1-2t,-1+t)$ es perpendicular al vector director de la recta $\vec{u}_r=(2,-2,1)$. Y su producto escalar será nulo.

$$\vec{PM}\cdot\vec{u}_r=(-3+2t,1-2t,-1+t)\cdot(2,-2,1)=0 \;\rightarrow\; -6+4t-2+4t-1+t=0$$

$$9t-9=0 \;\rightarrow\; t=1 \;\rightarrow\; \vec{PM}=(-1,-1,0)$$

Por lo tanto la distancia del punto a la recta la obtenemos del módulo del siguiente vector:

$$|\vec{PM}|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}\ u$$

Este ejercicio de distancia de un punto a una recta también se puede resolver con la siguiente fórmula.

$$d(P,r)=\frac{|\vec{AP}\times\vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|}$$

P → Es el punto externo a la recta

$\vec{u}_r$ → Vector director de la recta

A → Punto de la recta

Vamos a rehacer el ejemplo anterior, utilizando esta fórmula.

Ejemplo

Obtener la distancia del punto $P(2,-1,2)$ a la recta $r:\begin{Bmatrix} x=-1+2t \\ y=-2t \\ z=1+t \end{Bmatrix}$.

El vector director de la recta es $\vec{u}_r=(2,-2,1)$.

Un punto $A\in r$ es $A(-1,0,1)$.

$$\vec{AP}=(3,-1,1)$$

$$\vec{AP}\times\vec{u}_r=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{vmatrix}=-\hat{i}+2\hat{j}-6\hat{k}-(-2\hat{k}-2\hat{i}+3\hat{j})=\hat{i}-\hat{j}-4\hat{k}=(1,-1,-4)$$

$$|\vec{AP}\times\vec{u}_r|=\sqrt{18}$$

$$|\vec{u}_r|=\sqrt{9}$$

$$d(P,r)=\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{9}}=\sqrt{2}\ u$$

Distancia entre dos rectas paralelas

La distancia entre dos rectas paralelas $r \| s$ es la distancia de un punto de una de las rectas a la otra recta.

Es decir, reducimos el problema al caso estudiado en el apartado anterior.

Ejemplo

Obtener la distancia entre las siguientes rectas paralelas:

$$r: \frac{x}{1} = \frac{y-1}{2} = \frac{z+3}{2} \quad , \quad s: \frac{x+2}{2} = \frac{y-4}{4} = \frac{z-4}{4}$$

Comprobamos que ambas rectas son paralelas porque sus vectores directores son proporcionales.

$$\vec{u}_r = (1,2,2)$$

$$\vec{u}_s = (2,4,4)$$

Elegimos un punto $A \in r$. Por ejemplo $A(0,1,-3)$.

Elegimos un punto genérico $M \in s$. Para ello, pasamos s a paramétricas:

$$s: \begin{Bmatrix} x = -2+2t \\ y = 4+4t \\ z = 4+4t \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad M(-2+2t, 4+4t, 4+4t)$$

El vector $\vec{AM} = (-2+2t, 3+4t, 7+4t)$ es perpendicular al vector director de la recta $\vec{u}_s = (2,4,4)$. Por simplificar las coordenadas del vector de la forma $\vec{u}_s = (1,2,2)$.

$$\vec{AM} \cdot \vec{u}_s = (-2+2t, 3+4t, 7+4t) \cdot (1,2,2) = 0 \quad \rightarrow \quad -2+2t+6+8t+14+8t = 0$$

$$18t+18 = 0 \quad \rightarrow \quad t = -1 \quad \rightarrow \quad \vec{AM} = (-4, -1, 3)$$

Por lo tanto la distancia del punto a la recta la obtenemos del módulo del siguiente vector:

$$|\vec{AM}| = \sqrt{16+1+9} = \sqrt{26}$$

También podemos rehacer el ejercicio con la fórmula $d(P,r)=\dfrac{|\vec{AP}\times\vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|}$, sabiendo que:

$\vec{u}_r$ → Vector director de la recta r

A → Punto de la recta r

P → Punto de la recta s

Ejemplo

Obtener la distancia entre las siguientes rectas paralelas:

$r:\dfrac{x}{1}=\dfrac{y-1}{2}=\dfrac{z+3}{2}$, $s:\dfrac{x+2}{2}=\dfrac{y-4}{4}=\dfrac{z-4}{4}$

$\vec{u}_r=(1,2,2)$

$A\in r=(0,1,-3)$

$P\in s=(-2,4,4)$

Y razonamos de la siguiente forma: vamos a obtener la distancia desde el punto $P\in s$ a la recta r con la fórmula $d(P,r)=\dfrac{|\vec{AP}\times\vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|}$.

$\vec{AP}=(-2,3,7)$

$$\vec{AP}\times\vec{u}_r=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ -2 & 3 & 7\\ 1 & 2 & 2\end{vmatrix}=6\hat{i}+7\hat{j}-4\hat{k}-(3\hat{k}+14\hat{i}-4\hat{j})=-8\hat{i}+11\hat{j}-7\hat{k}=(-8,11,-7)$$

$|\vec{AP}\times\vec{u}_r|=\sqrt{64+121+49}=\sqrt{234}$

$|\vec{u}_r|=\sqrt{1+4+4}=\sqrt{9}$

$d(P,r)=\dfrac{\sqrt{234}}{\sqrt{9}}=\sqrt{26}\ u$

Distancia de un punto a un plano

La distancia de un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ a un plano $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$ es la distancia del punto P a su proyección ortogonal sobre el plano, que llamaremos punto M.

$$d(P,\Pi)=d(P,M), \ \ siendo \ \ M \ \ la \ \ proyección \ \ ortogonal \ \ de \ \ P \ \ sobre \ \ \Pi$$

Este problema de obtener la proyección ortogonal del punto P sobre el plano, lo hemos realizado paso por paso en las clases anteriores. Y si tenemos el punto M, podemos calcular la distancia entre P y M.

Ahora vamos a ofrecer una "formulita" para obtener directamente esa distancia (con lo poco que me gusta usar formulas sin razonarlas ni demostrarlas). Pero lo cierto que es práctico recordarla para este tipo de problemas.

La expresión es muy parecida a la que vimos en 1ºBachillerato para la distancia de un punto a una recta en dos dimensiones; lo único es que ahora tenemos un plano y trabajamos en tres dimensiones.

$$d(P,\Pi)=d(P,M)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Ejemplo

Hallar la distancia del punto $P(3,2,1)$ al plano $\Pi: 2x+y-z-2=0$.

Aplicamos nuestra expresión para distancia de un punto a un plano.

$$d(P,\Pi)=\frac{|2\cdot 3+1\cdot 2-1\cdot 1-2|}{\sqrt{4+1+1}}=\frac{5}{\sqrt{6}}=\frac{5\sqrt{6}}{6} \ \ u$$

Distancia entre dos planos paralelos

Sean dos planos paralelos $\Pi_1 = Ax + By + Cz + D$ y $\Pi_2 = Ax + By + Cz + D'$. Recuerda que dos planos paralelos solo se diferencian en el término independiente de la ecuación general.

Saber la distancia que los separa consiste en tomar un punto cualquiera de uno de los planos y obtener la distancia de ese punto al otro plano. Es decir, reducimos el estudio a un caso del apartado anterior (distancia de un punto a un plano).

Ejemplo

Obtener la distancia entres los planos paralelos $\Pi_1 : 2x + y - z - 2 = 0$ y $\Pi_2 : 2x + y - z - 9 = 0$.

Obtenemos un punto de un plano y calculamos la distancia de ese punto al otro plano.

$$\Pi_1 : 2\text{x} + y - z - 2 = 0 \quad \rightarrow \quad \Pi_1 : x + \frac{y}{2} + \frac{z}{-2} = 1$$

Hay tres puntos del plano que podemos obtener de la ecuación canónica:

$(1,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,-2)$

Elegimos uno cualquiera. Por ejemplo $A(1,0,0)$.

obtenemos su distancia respecto al segundo plano $\Pi_2 : 2x + y - z - 9 = 0$.

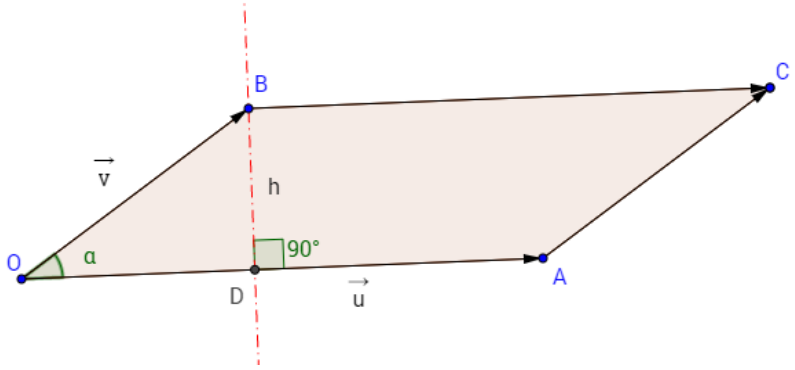
$$d(A, \Pi_1) = \frac{|2 \cdot 1 + 1 \cdot 0 - 1 \cdot 0 - 9|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{|-7|}{\sqrt{6}} = \frac{7}{\sqrt{6}} \quad u$$

Otra forma rápida de obtener esta distancia entre planos paralelos, si sabemos seguro que son paralelos, es aplicar una "modificación" de la ecuación:

$$d(\Pi_{1,} \Pi_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|-2 - (-9)|}{\sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{7}{\sqrt{6}} \quad u$$

Área del paralelogramo y del triángulo a partir del módulo producto vectorial

Sean dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ que representamos con un origen común O . Si trazamos por los extremos de estos vectores líneas paralelas a ambos vectores, generamos un paralelogramo.



El área de un paralelogramo, como en cualquier cuadrilátero, es base por altura. La base en nuestra imagen es el módulo del vector $\vec{u}$ y la altura es h

$$A_{paralelogramo}=|\vec{u}|\cdot h$$

Si recordamos, el módulo del producto vectorial de dos vectores es igual a:

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot sen(\alpha)$$

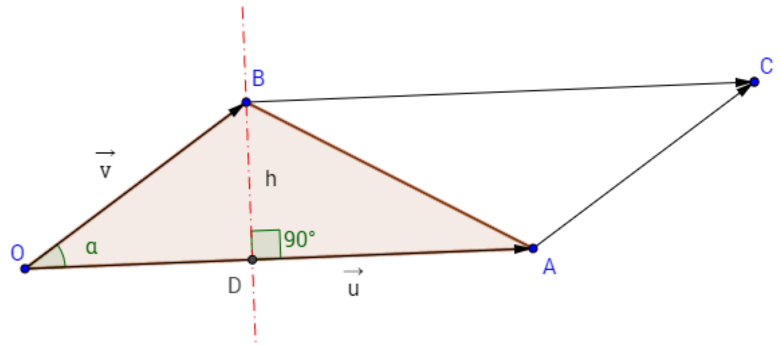
En el triángulo rectángulo de la imagen superior, el $sen(\alpha)$ se define como cateto opuesto (h) partido hipotenusa $(|\vec{v}|)$. Es decir:

$$sen(\alpha)=\frac{h}{|\vec{v}|} \quad\rightarrow\quad |\vec{v}|\cdot sen(\alpha)=h$$

Sustituimos en la expresión del producto vectorial → $|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot h\equiv Área \quad paralelogramo$

Es decir, **el módulo del producto vectorial de dos vectores coincide con el área del paralelogramo definido al situar ambos vectores con un origen común y proyectar por los extremos líneas paralelas a cada vector, respectivamente**.

Si colocamos los vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ con un origen común O y unimos los extremos de ambos vectores, nuestro paralelogramo se divide en dos triángulos exactamente iguales.



Es fácil intuir que el área de cada triángulo es igual a la mitad del área del paralelogramo.

$$\text{Área} \quad \text{triángulo} = \frac{1}{2}(\text{Área} \quad \text{paralelogramo}) = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$$

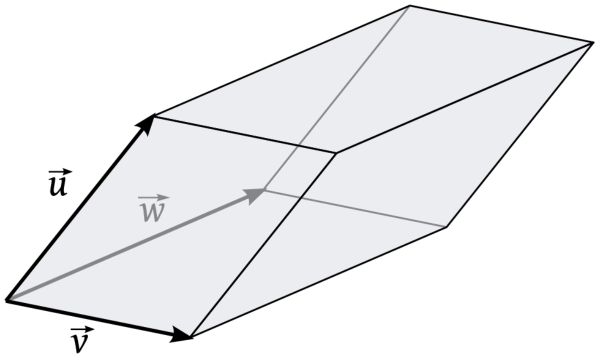
Es decir, **la mitad del módulo del producto vectorial de dos vectores coincide con el área del triángulo definido al situar ambos vectores con un origen común unir los extremos de ambos vectores.**

Volumen de un tetraedro y de un paralelepípedo a partir del producto mixto

Sean tres vectores $\vec{u}=(u_x u_y , u_z)$, $\vec{v}=(v_x , v_y , v_z)$ y $\vec{w}=(w_x , w_y , w_z)$ representados con un origen común y en distintos planos.

Si por el extremo final de cada vector proyectamos rectas paralelas al resto de vectores, formamos una figura tridimensional llamada paralelepípedo (ver imagen).

«Paralelepípedo determinado por tres vectores» de Pedro Sánchez - Trabajo propio. Disponible bajo la licencia GFDL vía Wikimedia Commons - http://commons.wikimedia.org/wiki/File:Paralelep%C3%ADpedo_determinado_por_tres_vectores.svg#/media/File:Paralelep%C3%ADpedo_determinado_por_tres_vectores.svg



El volumen de esta figura es el área de la base por la altura.

El producto vectorial $(\vec{v}\times\vec{w})$ nos da el área del paralelogramo que forma la base. Y al realizar el producto escalar del primer vector sobre el resultado del producto vectorial, obtenemos la altura del paralelípedo. Y base por altura nos da el volumen.

$$A_{base}=|\vec{v}\times\vec{w}|$$

$$altura\equiv h=|\vec{u}|\cdot\cos(\alpha)$$

$$V_{paralelepípedo}=A_{base}\cdot altura=|\vec{v}\times\vec{w}|\cdot|\vec{u}|\cdot\cos(\alpha)$$

Es decir: **El valor absoluto del producto mixto de estos tres vectores coincide con el volumen del paralelepípedo**.

$$V_{paralelepípedo}=|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$$

Ejemplo

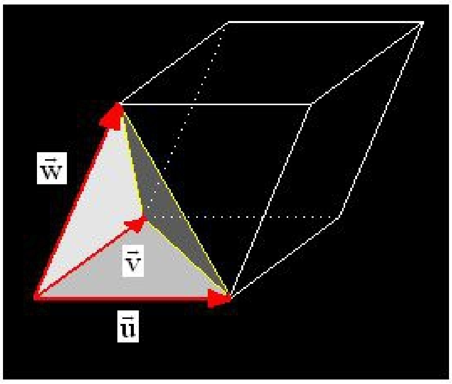
Calcula el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{u}=(1,3,3)$, $\vec{v}=(-2,3,1)$ y $\vec{w}=(-1,2,1)$.

El volumen de la figura coincide con el módulo del producto mixto. Si aplicamos la "regla mnemotécnica" del determinante.

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix}1 & 3 & 3\\ -2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=3-3-12-(-9+2-6)=1 \quad\rightarrow\quad V_{paralelepípedo}=|1|=1 \quad u^3$$

Dentro del paralelepípedo encontramos un tetraedro, que tiene por aristas cada uno de los tres vectores con origen común. Recuerda que el tetraedro es una figura tridimensional con cuatro caras, siendo cada cara triángulos (ver imagen).

Imagen tomada de: http://www.aulafacil.com/cursos/l10796/ciencia/matematicas/vectores-en-el-plano-y-en-el-espacio/volumen-de-un-tetraedro-a-partir-del-producto-mixto-de-tres-vectores



Se demuestra que el volumen del tetraedro es un sexto del módulo del producto mixto.

$$V_{tetraedro}=\frac{1}{6}|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$$

Ejemplo

Calcula el volumen del tetraedro de vértices $A(1,2,3)$, $B(-1,0,1)$, $C(2,1,3)$ y $D(3,4,-1)$.

Formamos tres vectores con un origen común. Por ejemplo:

$\vec{AB}=(-2,-2,-2)$, $\vec{AC}=(1,-1,0)$, $\vec{AD}=(2,2,-4)$

Y aplicamos la relación que cumple el volumen del tetraedro en función del módulo del producto mixto.

$$\vec{AD}\cdot(\vec{AB}\times\vec{AC})=\begin{vmatrix}2 & 2 & -4\\ -2 & -2 & -2\\ 1 & -1 & 0\end{vmatrix}=0-4-8-(8+4+0)=-24$$

$$V_{tetraedro}=\frac{1}{6}|-24|=4\quad u^3$$

Distancia entre dos rectas que se cruzan

Vamos a estudiar dos métodos para determinar la distancia de dos rectas que se cruzan.

Sean dos rectas r y s cruzadas. La distancia entre ambas es la distancia de un punto de una de las rectas al plano que contiene a la otra recta.

¿Cómo podemos razonar para obtener esta distancia?

En primer lugar tomamos un punto cualquiera de la recta r, que llamaremos $A \in r$.

En segundo lugar, con los dos vectores directores de las rectas cruzadas, obtendremos el plano que contiene a esos vectores (que son linealmente independientes, por ser cruzadas las rectas) y que pase por un punto $B \in s$.

Y si tenemos un punto $A \in r$ y un plano Π que contiene a s, la distancia entre ambas rectas será la distancia del punto al plano: $d(r,s)=d(a,\Pi)$.

Ejemplo

Obtener la distancia que separa a las siguientes rectas cruzadas.

$$r: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{2} \quad , \quad s: \frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{1}$$

Un punto de la recta r y un vector director son:

$$A(1,0,3) \in r \quad , \quad \vec{u}_r=(2,1,2)$$

Un punto de la recta s y un vector director son:

$$B(2,1,-1) \in s \quad , \quad \vec{u}_s=(1,2,1)$$

El plano Π que contiene a s y es paralelo a r lo obtenemos porque tenemos dos vectores paralelos a ese plano y un punto que pertenece al plano.

$$\Pi(\vec{u}_r, \vec{u}_s, B): \begin{vmatrix} 1 & 2 & x-2 \\ 0 & 1 & y-1 \\ 3 & 2 & z+1 \end{vmatrix}=0 \quad \rightarrow \quad \Pi: -x+z+3=0$$

La distancia del punto $A(1,0,3) \in r$ al plano $\Pi: -x+z+3=0$ nos da la distancia entre ambas rectas cruzadas.

$$d(r,s)=d(A,\Pi)=\frac{|-1+3+0+3|}{\sqrt{1+1}}=\frac{5\sqrt{2}}{2} \quad u$$

Existe otra forma de razonar.

Supongamos que conocemos un punto de cada recta cruzada, que forman el vector $\vec{AB}$. Ese vector, junto a los vectores directores de ambas rectas, forman un paralelepípedo.

La base del paralelepípedo es un paralelogramo, formado por los vectores directores de las rectas. Por lo tanto, su área es:

$$A_{base}=|\vec{u}_r\times\vec{u}_s|$$

La altura del paralelepípedo es la distancia $d(r,s)$ buscada entre las rectas. Por lo tanto, el volumen del paralelepípedo es:

$$V_{paralelepípedo}=d(r,s)\cdot|\vec{u}_r\times\vec{u}_s|$$

El volumen del paralelepípedo, como ya sabemos, es el valor absoluto del producto mixto.

$$V_{paralelepípedo}=|\vec{AB}\cdot(\vec{u}_r\times\vec{u}_s)|$$

Igualando ambas expresiones del volumen, obtenemos una expresión para la distancia en función del producto mixto y del producto vectorial.

$$d(r,s)=\frac{|\vec{AB}\cdot(\vec{u}_r\times\vec{u}_s)|}{|\vec{u}_r\times\vec{u}_s|}$$

Ejemplo

Obtener la distancia que separa a las siguientes rectas cruzadas.

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{1}=\frac{z-3}{2} \quad , \quad s:\frac{x-2}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+1}{1}$$

Un punto de la recta r y un vector director son:

$$A(1,0,3)\in r \quad , \quad \vec{u}_r=(2,1,2)$$

Un punto de la recta s y un vector director son:

$$B(2,1,-1)\in s \quad , \quad \vec{u}_s=(1,2,1)$$

Por lo tanto → $\vec{AB}=(1,1,-4)$

La distancia resulta:

$$d(r,s)=\frac{|\vec{AB}\cdot(\vec{u}_r\times\vec{u}_s)|}{|\vec{u}_r\times\vec{u}_s|}$$

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix}1 & 3 & 3\\ -2 & 3 & 1\\ -1 & 2 & 1\end{vmatrix}=3-3-12-(-9+2-6)=1 \quad\rightarrow\quad |\vec{AB}\cdot(\vec{u}_r\times\vec{u}_s)|=15$$

$$\vec{u}_r \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = -3\,\hat{i} + 3\,\hat{k} \quad \rightarrow \quad |\vec{u}_r \times \vec{u}_s| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18}$$

Sustituyendo:

$$d(r,s) = \frac{|\vec{AB} \cdot (\vec{u}_r \times \vec{u}_s)|}{|\vec{u}_r \times \vec{u}_s|} = \frac{15}{\sqrt{18}} = \frac{5\sqrt{2}}{2} \quad u$$