Teoría – Tema 9

Vectores, ángulos, vector normal de un plano y simetrías

Índice de contenido

Propiedades de los vectores

Sea el vector del espacio tridimensional $\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$.

Su módulo se define como $|\vec{u}|=\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}$.

Si el módulo es 1 , el vector se dice unitario. Todo vector puede normalizarse para convertirse en vector unitario:

$$\hat{u}=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\left(\frac{u_x}{\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}},\frac{u_y}{\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}},\frac{u_z}{\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}}\right)$$

Dados dos vectores $\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$ y $\vec{v}=(v_x,v_y,v_z)$, su producto escalar se define de las dos formas siguientes:

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\alpha) \rightarrow \alpha \textit{ es el ángulo formado por ambos vectores}$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y+u_z\cdot v_z$$

Si dos vectores son perpendiculares, el ángulo que forman es de $90º$, por lo que su producto escalar es 0 .

$$Si \quad \vec{u}\perp\vec{v} \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=0$$

Si dos vectores son paralelos, el ángulo que forman es de $0º$, por lo que su producto escalar es igual al producto de los módulos.

$$Si \quad \vec{u}\|\vec{v} \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$$

Si dos vectores son anti-paralelos, el ángulo que forman es de $180º$, por lo que su producto escalar es igual al producto de los módulos cambiado de signo.

$$Si \quad \vec{u}\|\vec{v} \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=-|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$$

Si dos vectores son perpendiculares entre si, se dicen ortogonales. Y si, además, son de módulo unidad, se dicen ortonormales.

De la definición de producto escalar, podemos determinar el ángulo que forman dos vectores.

$$\cos(\alpha)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y+u_z\cdot v_z}{\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}\cdot\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}} \quad\rightarrow\quad \alpha\equiv \textit{ángulo formado por dos vectores}$$

Algunas propiedades "no intuitivas" que cumplen el módulo del producto y el módulo de la suma son las siguientes desigualdades:

$|\vec{u}\cdot\vec{v}|\leq|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$ → Desigualdad de Schwarz

$|\vec{u}+\vec{v}|\leq|\vec{u}|+|\vec{v}|$ → Desigualdad de triangular

Ángulo entre dos rectas

Llamamos ángulo α entre dos rectas r y s al menor de los ángulos que forman sus vectores directores $\vec{u}_r$ y $\vec{u}_s$.

Si las rectas son paralelas o coincidentes, el ángulo que forman entre si sus vectores directores es de $0º$ ó $180º$.

Si las rectas son secantes o cruzadas, formarán cuatro ángulos entre si, iguales dos a dos. El menor de esos ángulos siempre es del primer cuadrante. Es decir: $\alpha \in [0º, 90º]$.

$$\cos(\alpha)=\frac{|\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s|}{|\vec{u}_r| \cdot |\vec{u}_s|}=\frac{|u_{r_x} \cdot u_{s_x}+u_{r_y} \cdot u_{s_y}+u_{r_z} \cdot v_{r_z}|}{\sqrt{u_{r_x}^2+u_{r_y}^2+u_{r_z}^2} \cdot \sqrt{u_{s_x}^2+u_{s_y}^2+u_{s_z}^2}} \quad \rightarrow \quad \alpha \equiv \text{\textit{ángulo formado por dos rectas}}$$

Donde hemos tomado **valor absoluto en el numerador para garantizar que el ángulo obtenido sea del primer cuadrante** y, por lo tanto, sea el menor de los ángulos formado por ambas rectas.

Si ambas rectas son perpendiculares, el ángulo que forman es de $90º$, por lo que el producto escalar es de sus vectores directores es 0 .

$$Si \quad \vec{u}_r \perp \vec{u}_s \quad \rightarrow \quad \vec{u}_r \cdot \vec{u}_s = 0 \quad \rightarrow \quad u_{r_x} \cdot u_{s_x}+u_{r_y} \cdot u_{s_y}+u_{r_z} \cdot v_{r_z}=0$$

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1,-1,2)$ y corta perpendicularmente a la recta $r: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{4}$.

La recta r tiene como vector director $\vec{u}_r=(2,-3,4)$. Y si obtenemos un $B \in r$ que cumpla $\vec{AB} \perp \vec{u}_r$ (el producto escalar de ambos vectores igual a 0), ese vector $\vec{AB}$ será el vector director de la recta s .

$r: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{4}$ → Pasar a paramétrica → $r: \left\{ \begin{array}{c} x=1+2\lambda \\ y=-3\lambda \\ z=-3+4\lambda \end{array} \right\}$ → De aquí tomamos las coordenadas del punto $B(1+2\lambda, -3\lambda, -3+4\lambda) \rightarrow \vec{AB}=(2\lambda, 1-3\lambda, -5+4\lambda)$

Aplicamos la definición de producto escalar y lo anulamos.

$$\vec{u}_r \cdot \vec{AB}=0 \rightarrow (2,-3,4) \cdot (2\lambda, 1-3\lambda, -5+4\lambda)=0$$

$$4\lambda-3+9\lambda-20+16\lambda=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=\frac{23}{29}$$

$\vec{AB}=\left(\frac{46}{29},\frac{-40}{29},\frac{-53}{29}\right)$

Podemos simplificar a un vector director más sencillo → $\vec{u}_s=(46,-40,-53)$

Y podemos escribir la recta solución de la forma:

$s:\frac{x-1}{46}=\frac{y+1}{-40}=\frac{z-2}{-53}$

Bisectriz de dos rectas que se cortan

Sean las rectas secantes r y s que se cortan en el punto $P(x_0, y_0, z_0)$, y de ecuaciones vectoriales:

$$r:(x, y, z)=(x_0, y_0, z_0)+\lambda_r\cdot\vec{u}_r$$
$$s:(x, y, z)=(x_0, y_0, z_0)+\lambda_s\cdot\vec{u}_s$$

Las dos rectas, al cortarse, sabemos que forman cuatro ángulo iguales dos a dos. Por lo tanto, tendremos dos bisectrices (recuerda que una bisectriz es un recta que divide a un ángulo en dos partes iguales).

Analiticamente podemos definir la bisectriz como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de las dos rectas dadas. Y podemos calcular ambas bisectrices tomando vectores directores de las dos rectas con mismo módulo, y sumarlos y restarlos desde el punto $P(x_0, y_0, z_0)$ para obtener las ecuaciones de las dos rectas bisectrices.

Es decir:

$$r:(x, y, z)=(x_0, y_0, z_0)+\lambda_r\cdot\vec{u}_r \rightarrow \text{Vector director unitario} \rightarrow \hat{u}_r=\frac{\vec{u}_r}{|\vec{u}_r|}$$

$$s:(x, y, z)=(x_0, y_0, z_0)+\lambda_s\cdot\vec{u}_s \rightarrow \text{Vector director unitario} \rightarrow \hat{u}_s=\frac{\vec{u}_s}{|\vec{u}_s|}$$

$$\textit{Bisectriz}\ \ 1:(x, y, z)=(x_0, y_0, z_0)+\lambda_1(\hat{u}_r+\hat{u}_s)$$
$$\textit{Bisectriz}\ \ 2:(x, y, z)=(x_0, y_0, z_0)+\lambda_2(\hat{u}_r-\hat{u}_s)$$

Vector director, normal o característico de un plano

Dado el plano de ecuación general $\Pi: A x+B y+C z+D=0$, llamamos vector director, normal o característico del plano al vector $\vec{u_\Pi}=(A, B, C)$.

Este vector $\vec{u_\Pi}=(A, B, C)$ **es perpendicular al plano**. Es decir:

$$\vec{u_\Pi}=(A, B, C)\perp\Pi$$

Este resultado es la cañaaaaa!!!! Nos permite resolver un montón de problemas de manera "supersencilla", simplemente recordando que si tenemos la ecuación general del plano tenemos un vector perpendicular al mismo.

Recta perpendicular a un plano que pasa por un punto conocido

Sea el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ y el plano $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$.

La ecuación de la recta r perpendicular al plano, y que pasa por el punto P , podemos escribirla si obtenemos un vector director de la recta r → Y ese vector director debe ser perpendicular al plano Π → Y ese vector perpendicular al plano es el vector normal del plano → $r \| \vec{u_\Pi} = (A, B, C) \perp \Pi$.

$$r: \frac{x-x_1}{A} = \frac{y-y_1}{B} = \frac{z-z_1}{C} \perp \Pi$$

Ejemplo

Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1,-1,2)$ y es perpendicular al plano $\Pi = 2x+3y+z+5=0$.

Si la recta r es perpendicular al plano → $r \perp \Pi$ → $r \| \vec{u_\Pi}$ → $\vec{u}_r = (2,3,1)$.

Y con un punto y un vector ya podemos escribir la ecuación de la recta solución.

$$r: \frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{3} = \frac{z-2}{1}$$

Plano perpendicular a una recta que pasa por un punto conocido

Sea el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ y la recta $r: \frac{x-x_0}{u_x} = \frac{y-y_0}{u_y} = \frac{z-z_0}{u_z}$.

Un plano perpendicular a la recta tendrá como vector normal $r \| \vec{u_\Pi} = (u_x, u_y, u_z) \perp \Pi$ y podemos escribir directamente la ecuación de este plano perpendicular de la forma general:

$$\Pi: u_x x + u_y y + u_z z + D = 0$$

El término D se obtiene sustituyendo las coordenadas del punto $P(x_1, y_1, z_1)$ en la ecuación del plano.

$$D = -(u_x x_1 + u_y y_1 + u_z z_1)$$

Ejemplo

Hallar el plano perpendicular a la recta $r: \frac{x-1}{3} = \frac{y}{-3} = \frac{z+1}{4}$ que pasa por el punto $A(1,-1,2)$.

El vector director de la recta será el vector normal del plano que estamos buscando:

$\vec{u_\Pi} = (3,-3,4)$

Por lo tanto:

$\Pi: 3x - 3y + 4z + D = 0$

Si el punto pertenece al plano $\rightarrow$ $A(1,-1,2) \in \Pi$ $\rightarrow$ $3 \cdot 1 - 3 \cdot (-1) + 4 \cdot 2 + D = 0$ $\rightarrow$ $D = -14$

Quedando el plano:

$\Pi: 3x - 3y + 4z - 14 = 0$

Punto simétrico de un punto respecto a una recta

Sea el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ y la recta r . Deseamos encontrar el punto $P'(x_2, y_2, z_2)$ simétrico a P respecto a la recta r .

La forma de proceder es la siguiente:

1. Por el punto P debemos trazar una recta s que sea perpendicular a la recta r . El vector director de la recta s será perpendicular al vector director de la recta r , por lo que el producto escalar de ambos se anulará.

2. La intersección de r con s será el punto M . Este punto M se conoce como **proyección ortogonal del punto P sobre la recta r** .

3. Y este punto M será el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, de donde podremos obtener las coordenadas del punto P' .

Ejemplo

Hallar el punto simétrico del punto $A(1,2,0)$ respecto la recta $r: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+1}{4}$.

Un vector director de r es $\vec{u}_r=(2,-3,4)$.

Pasamos la recta a paramétrica para obtener un punto $M \in r$ que cumpla $\vec{u}_r \cdot \vec{AM}=0$.

$$r: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+1}{4} \rightarrow r: \left\{ \begin{array}{c} x=1+2\lambda \\ y=-3\lambda \\ z=-1+4\lambda \end{array} \right\} \rightarrow M(1+2\lambda, -3\lambda, -1+4\lambda)$$

$$\vec{AM}=(2\lambda, -2-3\lambda, -1+4\lambda)$$

Realizamos producto escalar y lo anulamos:

$$\vec{u}_r \cdot \vec{AM}=0 \rightarrow (2,-3,4)\cdot(2\lambda, -2-3\lambda, -1+4\lambda)=0 \rightarrow 4\lambda+6+9\lambda-4+16\lambda=0$$

$$\lambda=\frac{-2}{29}$$

Con este valor podemos obtener el punto M que es el punto medio del segmento $\overline{AA'}$.

$$M\left(\frac{25}{29}, \frac{6}{29}, \frac{-37}{29}\right)$$

Si el punto simétrico es $A'=(x, y, z) \rightarrow \left(\frac{25}{29}, \frac{6}{29}, \frac{-37}{29}\right)=\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z}{2}\right)$

$$x=\frac{21}{29} \quad , \quad y=\frac{-46}{29} \quad , \quad z=\frac{21}{29} \rightarrow A'=\left(\frac{21}{29}, \frac{-46}{29}, \frac{-74}{29}\right)$$

Punto simétrico de un punto respecto a una plano

Sea el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ y el plano Π . Deseamos encontrar el punto $P'(x_2, y_2, z_2)$ simétrico a P respecto al plano Π .

La forma de proceder es la siguiente:

1. Obtener ecuación de la recta r que pasa por P y es perpendicular a Π (usando el vector normal del plano).

2. Calcular el punto M como intersección de la recta r con el plano Π . Este punto M se conoce como **proyección ortogonal del punto** P **sobre el plano** Π .

3. Y este punto M será el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, de donde podremos obtener las coordenadas del punto P' .

Ejemplo

Hallar el punto simétrico del punto $A(5,1,0)$ respecto al plano $\Pi: 3x-2y+z+1=0$.

El vector normal al plano es $\vec{u_\Pi}=(3,-2,1)$.

Trazamos la recta que pasa por el punto $A(5,1,0)$ y es perpendicular al plano, usando el vector normal obtenido.

$$r:\begin{Bmatrix} x=5+3\alpha \\ y=1-2\alpha \\ z=\alpha \end{Bmatrix}$$

Y realizamos la intersección de la recta y el plano. La solución será la proyección ortogonal del punto A sobre el plano.

Para obtener la solución, sustituimos los valores en paramétricas de la recta sobre la ecuación del plano.

$$5(5+3\alpha)-2(1-2\alpha)+\alpha+1=0 \quad \rightarrow \quad \alpha=-1$$

Por lo que nuestro punto proyección ortogonal será:

$$M(2,3,-1)$$

Y este punto proyección ortogonal será el punto medio del segmento $\overline{AA'}$, donde $A'(x,y,z)$ es el punto simétrico que estamos buscando.

$$(2,3,-1)=\left(\frac{5+x}{2},\frac{1+y}{2},\frac{z}{2}\right) \quad \rightarrow \quad A'(x,y,z)=(-1,5,-2)$$

Ángulo entre dos planos

El ángulo formado por dos planos coincide con el menor ángulo formado por sus vectores característicos.

$\Pi_1 \rightarrow$ *vector característico* $\vec{u}$

$\Pi_2 \rightarrow$ *vector característico* $\vec{v}$

$$\cos(\alpha)=\frac{|\vec{u}\cdot\vec{v}|}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{|u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y+u_z\cdot v_z|}{\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}\cdot\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}} \quad \rightarrow \quad \alpha\equiv \textit{ángulo formado por dos planos}$$

Ejemplo

Hallar el ángulo que forman los dos planos siguientes.

$\Pi_1: 2x-3y+z-5=0$

$\Pi_2: 3x+4y-2z+1=0$

Los vectores normales a ambos planos son:

$\vec{u_{\Pi_1}}=(2,-3,1)$

$\vec{u_{\Pi_2}}=(3,4,-2)$

Y el ángulo que forman los dos planos coincide con el menor ángulo formado por sus vectores normales.

$$\cos(\alpha)=\frac{|\vec{u_{\Pi_1}}\cdot\vec{v_{\Pi_2}}|}{|\vec{u_{\Pi_1}}|\cdot|\vec{v_{\Pi_1}}|}=\frac{|2\cdot3-3\cdot4-1\cdot2|}{\sqrt{4+9+1}\cdot\sqrt{9+16+4}}=\frac{8}{\sqrt{406}}\simeq 0{,}397 \quad \rightarrow \quad \alpha=66{,}6^o$$

Ángulo entre una recta y un plano

El ángulo formado por una recta r y un plano Π es el ángulo que forma la recta r con su proyección ortogonal sobre el plano Π .

Si este ángulo es α , el ángulo que forma el vector normal del plano $\vec{u}_\Pi$ con el vector director de la recta $\vec{u}_r$ será igual a $90º-\alpha$. Y sobre este ángulo podemos operar:

$$\cos(90º-\alpha)=\frac{|\vec{u}_\pi\cdot\vec{u}_r|}{|\vec{u}_\pi|\cdot|\vec{u}_r|}$$

Recordamos que $\cos(90º-\alpha)=sen(\alpha)$

$$sen(\alpha)=\frac{|\vec{u}_\pi\cdot\vec{u}_r|}{|\vec{u}_\pi|\cdot|\vec{u}_r|} \quad\rightarrow\quad \alpha\equiv \textit{ángulo formado por recta y plano}$$

Ejemplo

Hallar el ángulo que forma la recta $r:\frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{1}$ con el plano $\Pi_1: 2x-y+3z-1=0$.

Un vector director de la recta es:

$\vec{u}_r=(2,2,1)$

El vector característico del plano es:

$\vec{u}_\Pi=(2,-1,3)$

Por lo tanto:

$$sen(\alpha)=\frac{|2\cdot2-2\cdot1+1\cdot3|}{\sqrt{4+4+1}\cdot\sqrt{4+1+9}}=\frac{5}{3\sqrt{14}}=0{,}445 \quad\rightarrow\quad \alpha=26{,}45^o$$