Teoría – Tema 9

Tres puntos alineados por una recta. Cuatro puntos coplanarios

Índice de contenido

Condiciones que cumplen tres puntos alineados por una recta

Sean los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ y $C(x_3, y_3, z_3)$, que forman los vectores $\vec{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$ y $\vec{AC}=(x_3-x_1, y_3-y_1, z_3-z_1)$ (es decir, tomamos un punto como origen y los otros dos como finales de sendos vectores).

Los tres puntos estarán alineados por una recta si los dos vectores anteriores son linealmente dependientes, es decir, si el rango de la matriz que forman es 1.

$$Rango(\vec{AB}, \vec{AC})=1$$

Por lo tanto, todos los menores de orden 2 de la siguiente matriz deben ser nulos

$$\begin{pmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 & z_3-z_1 \end{pmatrix}$$ → Matriz formada por dos vectores fila

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 \\ x_3-x_1 & y_3-y_1 \end{vmatrix}=0 \quad \rightarrow \quad \frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}$$

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & z_2-z_1 \\ x_3-x_1 & z_3-z_1 \end{vmatrix}=0 \quad \rightarrow \quad \frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$$

Igualamos.

$$\frac{x_3-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y_3-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z_3-z_1}{z_2-z_1}$$ → **Condición a cumplir por tres puntos alineados**

Otro método sería obtener la recta que pasa por dos de los puntos (con un punto y un vector, ya tenemos la ecuación de la recta), y comprobar luego si el tercer punto pertenece o no a la recta, sustituyendo sus coordenadas en la ecuación de la recta.

Condiciones que cumplen cuatro puntos coplanarios

Sean los puntos $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, $C(x_3, y_3, z_3)$ y $D(x_4, y_4, z_4)$ no alineados por una recta.

Serán coplanarios (pertenecientes al mismo plano) si los tres vectores que podemos formar tomando como origen uno de los puntos y como extremos finales los otros tres puntos, generan una matriz de rango 2 (es decir, de los tres vectores solo hay dos linealmente independientes).

$$Rango(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD}) = 2$$

Por lo tanto, la siguiente matriz cuadrada de orden 3 debe tener determinante nulo

$$\begin{pmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{pmatrix}$$ → Matriz formada por tres vectores fila

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$ → **Condición a cumplir por cuatro puntos coplanarios**

Otra forma de expresa esta igualdad es, usando propiedades de los determinantes, proponer el siguiente determinante equivalente:

$$\begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 0 & x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ 0 & x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \\ 0 & x_4 - x_1 & y_4 - y_1 & z_4 - z_1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \begin{matrix} F'_2 = F_2 + F_1 \\ F'_3 = F_3 + F_1 \\ F'_4 = F_4 + F_1 \end{matrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & x_1 & y_1 & z_1 \\ 1 & x_2 & y_2 & z_2 \\ 1 & x_3 & y_3 & z_3 \\ 1 & x_4 & y_4 & z_4 \end{vmatrix} = 0$$

Otro método sería el siguiente: obtener el plano que contiene a tres de los cuatro puntos (con un punto y dos vectores linealmente independientes formado por los tres puntos), y comprobar si el cuarto punto pertenece al plano (sustituyendo las coordenadas del punto en la ecuación del plano).