Teoría – Tema 9

Posición relativa de dos planos

Índice de contenido

Posición relativa de dos planos

Dos planos pueden ser secantes (se cortan en una recta), paralelos (no se cortan) o coincidentes (ambos son el mismo plano).

Veamos esto analíticamente, considerando dos planos de ecuaciones generales:

$$\Pi_1 : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$
$$\Pi_2 : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

Que generan el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{matrix} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{matrix} \right\}$$

Estudiar las posibles soluciones de este sistema nos dará la información necesaria para conocer las posiciones relativas de ambos planos.

Si el sistema no tiene solución → Sistema incompatible → Los planos no tienen ningún punto en común → **Los planos son paralelos**.

Si el sistema tiene solución, serán secantes o coincidentes. Obviamente, por tener siempre más incógnitas (3) que ecuaciones (2) si existe solución el sistema será compatible indeterminado → Infinitas soluciones.

Si la solución del sistema es una recta, los planos serán secantes. Y si la solución es un sistema, los planos serán coincidentes.

Veamos con detalle cada caso.

Planos secantes

Sea el siguiente sistema, su matriz asociada M y su matriz ampliada M/D :

$$\begin{Bmatrix} A_1 x+B_1 y+C_1 z+D_1=0 \\ A_2 x+B_2 y+C_2 z+D_2=0 \end{Bmatrix} \rightarrow M=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \rightarrow M/D=\left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{array}\right)$$

El rango máximo de estas matrices será 2, ya que es esa la menor dimensión entre las filas y columnas de ambas matrices.

Para que exista solución, recuerda, debe cumplirse que $rango(M)=rango(M/D)$. Si el rango es 2 y el número de incógnitas es 3, tendremos:

$$rango(M)=rango(M/D)=2<3=número \;\; de \;\; incógnitas$$

Tendremos una incógnita $3-2=1$ que funcionará como parámetro libre. Por ejemplo $z=\lambda$. Por lo que el sistema de partida queda:

$$\begin{Bmatrix} A_1 x+B_1 y=-C_1\lambda-D_1 \\ A_2 x+B_2 y=-C_2\lambda-D_2 \end{Bmatrix}$$

Donde las variables x, y quedarán en función del parámetro λ . Es decir:

$$\begin{Bmatrix} x=m\lambda+n \\ y=m'\lambda+n' \\ z=\lambda \end{Bmatrix}$$

¿Y esta solución que es?¿Quién lo sabe?

¡Pues una recta, sí señor! Es la **ecuación paramétrica de una recta**.

Condición de planos secantes (se cortan en una recta)

$$\begin{Bmatrix} A_1 x+B_1 y+C_1 z+D_1=0 \\ A_2 x+B_2 y+C_2 z+D_2=0 \end{Bmatrix} \rightarrow M=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \rightarrow M/D=\left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{array}\right)$$

$$rango(M)=rango(M/D)=2<3=número \;\; de \;\; incógnitas$$

Ejemplo

Hallar la posición relativa de los planos:

$\Pi_1 : 3x-2y+z-5=0$

$\Pi_2 : 2x-5y+3z+2=0$

Planteamos la matriz del sistema y la matriz ampliada.

$$M=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad M/D=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -5 & 3 & -2 \end{array}\right)$$

Estudiamos el rango de ambas matrices.

$$Rango(M)=2=Rango(M/D)$$

Esto es así porque al menos un menor de orden 2 no nulo → $\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}=-11\neq 0$

Por lo tanto, los planos son secantes. Encontremos la ecuación de la recta solución.

Si $z=\lambda$ es el parámetro libre, el sistema queda:

$$\begin{Bmatrix} 3x-2y=5-\lambda \\ 2x-5y=-2-3\lambda \end{Bmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 5-\lambda \\ 2 & -5 & -2-3\lambda \end{array}\right)$$

Que podemos resolver por Cramer (o por el método que queramos), al ser un sistema $2\text{x}2$ con solución única (las soluciones quedarán en función del parámetro λ).

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5-\lambda & -2 \\ -2-3\lambda & -5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}}=\frac{-5(5-\lambda)-2(2+3\lambda)}{-11}=\frac{-25+5\lambda-4-6\lambda}{-11}=\frac{\lambda-29}{11}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 3 & 5-\lambda \\ 2 & -2-3\lambda \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix}}=\frac{-3(2+3\lambda)-2(5-\lambda)}{-11}=\frac{-6-9\lambda-10+2\lambda}{-11}=\frac{7\lambda+16}{11}$$

$$z=\lambda$$

La solución es una recta, que hemos obtenido en su forma paramétrica.

Planos paralelos

Ahora no existe solución al sistema.

$$\begin{cases} A_1 x+B_1 y+C_1 z+D_1=0 \\ A_2 x+B_2 y+C_2 z+D_2=0 \end{cases}$$

Para que no exista solución, debemos llegar a una **incongruencia o absurdo matemático**. Y esta absurdo implica que las ecuaciones generales de los planos solo se diferencian en el término independiente (de la misma forma que dos rectas paralelas solo se diferencian en el término independiente de sus ecuaciones generales).

Los coeficientes que acompañan a las incógnitas en las ecuaciones generales cumplen la siguiente relación de proporción, que no la cumplen los términos independientes:

$$\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$$

Analíticamente este absurdo matemático se razona a partir del rango de las siguientes matrices:

Condición de planos paralelos (no se cortan)

$$\begin{cases} A_1 x+B_1 y+C_1 z+D_1=0 \\ A_2 x+B_2 y+C_2 z+D_2=0 \end{cases} \rightarrow M=\begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \rightarrow M/D=\left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{array}\right)$$

$rango(M)=1\neq rango(M/D)=2$ $\rightarrow$ Sistema incompatible (sin solución)

Los planos son paralelos no tienen ningún punto en común. ¡Vamos con el ejemplo!

Ejemplo

Calcular a y b para que los siguientes planos sean paralelos.

$\Pi_1: 3x-2y+z=0$

$\Pi_2: 2x+ay+bz=6$

Planteamos la matriz del sistema y la matriz ampliada.

$M=\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & a & b \end{pmatrix}$, $M/D=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & a & b & 6 \end{array}\right)$

En la matriz ampliada M/D es fácil ver que el rango es 2, al existir al menos un menor de orden 2 no nulo → $\begin{vmatrix} 3 & 0 \\ 2 & 6 \end{vmatrix}=18\neq 0 \rightarrow rango(M/D)=2$.

Para que el rango de la matriz M sea igual a 1, deben anularse todos los posibles menores de orden 2. Es decir:

$\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 2 & a \end{vmatrix}=0 \rightarrow 3a+4=0 \rightarrow a=\frac{-4}{3}$

$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & b \end{vmatrix}=0 \rightarrow 3b-2=0 \rightarrow b=\frac{2}{3}$

$\begin{vmatrix} -2 & 1 \\ a & b \end{vmatrix}=0 \rightarrow -2b-a=0 \rightarrow a=-2\text{b}$ → Ya se cumple con $a=\frac{-4}{3}$ y $b=\frac{2}{3}$.

Conclusión: si $a=\frac{-4}{3}$ y $b=\frac{2}{3}$ ambos planos son paralelos, y no tienen ningún punto en común.

Ejemplo

Hallar la ecuación del plano paralelo a $\Pi: 2x-3y+z-7=0$ y que pase por el punto $A(3,-1,0)$.

Por ser paralelo a $\Pi \rightarrow \Pi': 2x-3y+z+D'=0$

Y si $A\in\Pi' \rightarrow 2\cdot(3)-3\cdot(-1)+1\cdot(0)+D'=0 \rightarrow D'=-9$

La ecuación del plano buscado es $\Pi': 2x-3y+z-9=0$

Planos coincidentes

La solución al siguiente sistema es un plano, ya que ambos planos de partida se confunden en un solo plano solución por ser coincidentes.

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \rightarrow M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \rightarrow M/D = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{array}\right)$$

Para que la solución al sistema sea un plano, **necesitamos dos parámetros libres** (recuerda la ecuación paramétrica del plano: un punto más dos vectores multiplicados por sendos parámetros). Por lo tanto debe cumplirse:

$$rango(M) = rango(M/D) = 1 < 3 = número \ \ de \ \ incógnitas \rightarrow 3 - 1 = 2 \ \ parámetros \ \ libres$$

Así tendremos infinitas soluciones, debido a los infinitos puntos que pertenecen al plano solución. Y se satisface la siguiente relación de proporcionalidad entre los coeficientes de las ecuaciones generales:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{D_1}{D_2}$$

Condición de planos coincidentes (son el mismo plano)

$$\begin{cases} A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0 \\ A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0 \end{cases} \rightarrow M = \begin{pmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \end{pmatrix} \rightarrow M/D = \left(\begin{array}{ccc|c} A_1 & B_1 & C_1 & -D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & -D_2 \end{array}\right)$$

$$rango(M) = rango(M/D) = 1 < 3 = número \ \ de \ \ incógnitas$$

Ejemplo

Estudiar la posición relativa de los planos:

$$\Pi_1 : x - 2y + z - 1 = 0$$

$$\Pi_2 : -3x + 6y - 3z + 3 = 0$$

La matriz del sistema y la matriz ampliada son:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -3 & 6 & -3 \end{pmatrix} \ , \ M/D = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 6 & -3 & -3 \end{array}\right)$$

Observando ambas filas de ecuaciones es inmediato ver la relación $F_2=-3F_1$. Esta proporción nos lleva a obviar una ecuación, quedándonos con un sistema de una única ecuación y tres incógnitas.

Por lo tanto, el rango de ambas matrices es 1 y tendremos dos parámetros libres. Por ejemplo:

$y=\alpha \quad , \quad z=\beta$

Otra forma de razonarlo es comprobando que todos los menos de orden 2 se anulan, por lo que el rango será 1.

Sea como fuere que llegamos a esta conclusión, la solución será:

$$\begin{Bmatrix} x=1+2\alpha-\beta \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{Bmatrix}$$

Es decir, obtenemos la **ecuación paramétrica del plano solución** (depende de dos parámetros). **Los dos planos de partida son coincidentes**.