Teoría – Tema 9

Ecuaciones de la recta en el espacio tridimensional

Índice de contenido

Ecuación vectorial, paramétrica y continua de la recta

Si en dos dimensiones obteníamos la ecuación vectorial de la recta a partir de un punto de la recta y un vector director de la misma, en tres dimensiones razonamos de manera análoga (añadiendo la tercera componente a nuestros resultados).

Sea $A(x_{0,}y_{0,}z_0)$ un punto perteneciente a la recta r . Sea $\vec{u}=(u_x, u_y, u_z)$ un vector director de la recta r .

Ecuación vectorial de la recta

$(x, y, z)=(x_0, y_0, z_0)+\lambda\cdot(u_x, u_y, u_z)$

(x, y, z) $\rightarrow$ Punto arbitrario de la recta

(x_0, y_0, z_0) $\rightarrow$ Coordenadas de un punto concreto perteneciente a la recta

λ $\rightarrow$ Parámetro perteneciente a los números reales

(u_{xc}, u_y, u_z) $\rightarrow$ Componentes de uno de los vectores directores de la recta

Si trabajamos por componentes separadas en la ecuación vectorial, obtenemos la ecuación paramétrica.

Ecuación paramétrica de la recta

Pasamos de la ecuación vectorial $(x, y, z)=(x_0, y_0, z_0)+\lambda\cdot(u_x, u_y, u_z)$ a la ecuación paramétrica igualando componentes.

$$\begin{Bmatrix} x=x_0+\lambda\cdot u_x \\ y=y_0+\lambda\cdot u_y \\ z=z_0+\lambda\cdot u_z \end{Bmatrix}$$

Si despejamos el parámetro λ en cada ecuación paramétrica e igualamos:

Ecuación cartesiana o continua de la recta

Pasamos de la ecuación paramétrica a la ecuación cartesiana o continua despejando el parámetro λ e igualando.

$$\frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y}=\frac{z-z_0}{u_z}$$

Ejemplo

Hallar la ecuación vectorial, paramétrica y continua de la recta r que pasando por el punto $A(1,-1,3)$ es paralela a la recta de ecuación $s:\frac{x}{-2}=\frac{y-1}{3}=\frac{z}{4}$.

Sabemos que dos rectas paralelas tienen la misma inclinación, por lo que comparten los mismos vectores directores.

La recta s aparece en forma continua, por lo que su vector director es $\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)=(-2,3,4)$ y es paralelo a la recta r que estamos buscando.

Si tenemos un punto y un vector director, ya podemos escribir la ecuación vectorial de r .

$$r:(x,y,z)=(1,-1,3)+\lambda\cdot(-2,3,4)$$

Igualando componentes, tenemos la ecuación paramétrica.

$$r:\begin{Bmatrix} x=1+\lambda\cdot(-2) \\ y=-1+\lambda\cdot 3 \\ z=3+\lambda\cdot 4 \end{Bmatrix}$$

Y despejando el parámetro λ en cada ecuación paramétrica e igualando, obtenemos la ecuación continua de r .

$$r:\frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{4}$$

A veces esta ecuación continua se expresa de otras formas análogas. Por ejemplo, igualando cada término a λ y formando una terna de ecuaciones.

$$r:\begin{Bmatrix} \lambda=\frac{x-1}{-2} \\ \lambda=\frac{y+1}{3} \\ \lambda=\frac{z-3}{4} \end{Bmatrix}$$

Otras veces se expresa la recta como dos igualdades separadas.

$$r:\begin{Bmatrix} \frac{x-1}{-2}=\frac{y+1}{3} \\ \frac{x-1}{-2}=\frac{z-3}{4} \end{Bmatrix}$$

Ejemplo

Hallar la ecuación continua de la recta que pasa por los puntos $A(1,-1,3)$ y $B(0,2,4)$.

Si tengo dos puntos de una recta, tengo un vector director de la recta restando las componentes de ambos puntos.

$$\vec{AB}=(0-1,2+1,4-3)=(-1,3,1)\equiv vector \quad director \quad de \quad la \quad recta$$

Y si tenemos un punto (podemos elegir A o B) y un vector director, directamente podemos escribir la ecuación continua de la recta.

$$r:\frac{x-1}{-1}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-3}{1}$$

Ecuación general o implícita de la recta

De la ecuación cartesiana, como vimos en uno de los ejemplos anteriores, podemos hacer parejas de igualdades que representan a la recta.

$$r: \frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y}=\frac{z-z_0}{u_z} \quad \rightarrow \quad r: \left\{ \begin{matrix} \frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y} \\ \frac{x-x_0}{u_x}=\frac{z-z_0}{u_z} \end{matrix} \right\} \quad \text{o bien} \quad r: \left\{ \begin{matrix} \frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y} \\ \frac{y-y_0}{u_y}=\frac{z-z_0}{u_z} \end{matrix} \right\}$$

Vamos a tomar, por ejemplo, la pareja de ecuaciones cartesianas siguiente:

$$r: \left\{ \begin{matrix} \frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y} \\ \frac{x-x_0}{u_x}=\frac{z-z_0}{u_z} \end{matrix} \right\}$$

Si quitamos denominadores en cada igualdad:

$$r: \left\{ \begin{matrix} u_y(x-x_0)=u_x(y-y_0) \\ u_z(x-x_0)=u_x(z-z_0) \end{matrix} \right\}$$

Llevamos todos los factores al miembro de la izquierda:

$$r: \left\{ \begin{matrix} u_y \cdot x-u_x \cdot y-u_y \cdot x_0+u_x \cdot y_0=0 \\ u_z \cdot x-u_x \cdot z-u_z \cdot x_0+u_x \cdot z_0=0 \end{matrix} \right\}$$

Y realizamos el siguiente cambio de notación:

$$u_y=A \quad , \quad u_z=A' \quad , \quad -u_x=B \quad , \quad -u_y \cdot x_0+u_x \cdot y_0=D \quad , \quad -u_y \cdot x_0+u_x \cdot y_0=D'$$

Quedando lo que se conoce como ecuación general o implícita de la recta:

Ecuación general o implícita de la recta

$r:\begin{Bmatrix} A\cdot x+B\cdot y+D=0 \\ A'\cdot x+B\cdot z+D'=0 \end{Bmatrix}$ → Dos ecuaciones con tres incógnitas

Igualmente, podemos tener ecuaciones generales o implícitas que contengan a las tres incógnitas x, y, z .

Ecuación general o implícita de la recta

$r:\begin{Bmatrix} A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0 \\ A'\cdot x+B'\cdot y+C'\cdot z+D'=0 \end{Bmatrix}$ → Dos ecuaciones con tres incógnitas

¿Podemos pasar de una ecuación implícita a las ecuaciones conocidas como vectoriales paramétricas o continuas?

Sí. Veámoslo en el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Dada la ecuación implícita $r:\begin{Bmatrix} x+y-2z=3 \\ x-y+4z=5 \end{Bmatrix}$ obtener su correspondiente ecuación paramétrica.

La forma de proceder es muy sencilla: a una de las variables la consideramos igual al parámetro λ .

Por ejemplo:

$$z=\lambda \quad \rightarrow \quad r:\begin{Bmatrix} x+y=3+2\lambda \\ x-y=5-4\lambda \end{Bmatrix}$$

Y resolvemos el sistema obtenido (es decir, obtenemos el valor de x e y en función del parámetro λ).

$$r:\begin{Bmatrix} x=4-\lambda \\ y=-1+3\lambda \\ z=\lambda \end{Bmatrix}$$

¿Y desde una ecuación paramétrica podemos llegar directamente a las dos ecuaciones de la forma implícita?

Sí, eliminando el parámetro λ del sistema de ecuaciones que forman las tres ecuaciones paramétricas. Rehagamos el ejemplo anterior en sentido contrario.

Ejemplo

Dada la ecuación paramétrica $r:\left\{\begin{matrix} x=4-\lambda \\ y=-1+3\lambda \\ z=\lambda \end{matrix}\right\}$ obtener la ecuación general o implícita de la recta.

Necesitamos dos ecuaciones donde no aparezca el parámetro λ .

Si sumamos las dos primeras ecuaciones de la forma paramétrica:

$x+y=3+2\lambda$ → como $z=\lambda$ → $x+y-2z=3$

Si restamos las dos primeras ecuaciones de la forma paramétrica:

$x-y=5-4\lambda$ → como $z=\lambda$ → $x-y+4z=5$

Por lo tanto:

$r:\left\{\begin{matrix} x+y-2z=3 \\ x-y+4z=5 \end{matrix}\right\}$ → **Forma general de la recta: dos ecuaciones y tres incógnitas**

¿Podría haber sumado, por ejemplo, la primera ecuación más la tercera, y la segunda más la tercera en la forma paramétrica? Sí, y habría quedado:

$r:\left\{\begin{matrix} x+z=4 \\ y-3z=-1 \end{matrix}\right\}$ → **Forma general de la recta: dos ecuaciones y tres incógnitas**

¿Y podría haber sumado, por ejemplo, la primera ecuación más la segunda, y la segunda más la tercera en la forma paramétrica? Sí, y habría quedado:

$r:\left\{\begin{matrix} x+y-2z=3 \\ y-3z=-1 \end{matrix}\right\}$ → **Forma general de la recta: dos ecuaciones y tres incógnitas**

Todas son perfectamente válidas. Lo fundamental es tener siempre dos ecuaciones con las tres incógnitas x, y, z en su conjunto.

Con este ejemplo podemos intuir por qué son tan difíciles de corregir, para un profesor, los problemas de geometría en tres dimensiones: hay casi "infinitas" formas distintas de expresar los resultados. Por eso **es fundamental explicar todos los pasos. Esto facilita la corrección y será un incentivo para que nos puntúen el ejercicio lo mejor posible.**

Comprobar si tres puntos están alineados

Para saber si tres puntos $A, B\ y\ C$ están alineados tendremos que comprobar que la recta que contiene a dos de ellos contiene también al tercero.

Otra forma de verlo es que, por ejemplo, los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ sean dependientes (es decir, uno proporcional al otro, ya que serán paralelos o antiparalelos).

Otra forma de verlo es razonando con el concepto de rango: la matriz formada por los dos vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ debe tener rango 1 , ya que los dos vectores no son linealmente independientes entre si (y por lo tanto el rango no puede ser 2).

Y una cuarta forma de comprobarlo es determinar si los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ son paralelos o anti-paralelos... que a su vez se puede demostrar de dos formas distintas.

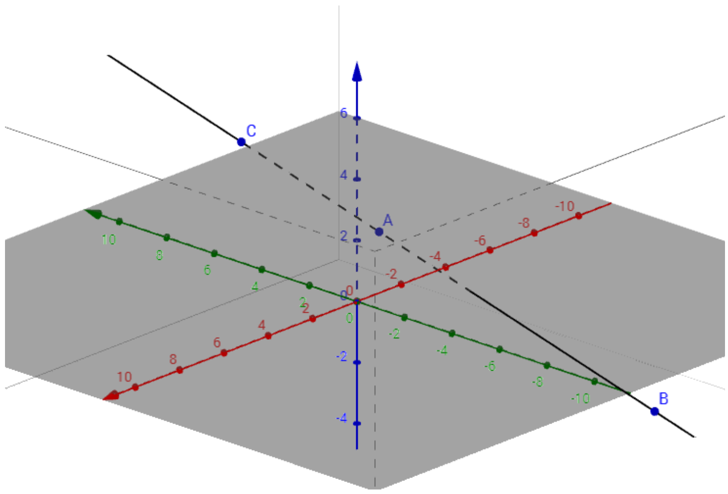
¡¡Menudo lío de opciones, jajaja!!

Por eso, vuelvo a repetir, **es impresdincible explicar bien los problemas de geometría**.

Vamos a realizar un ejemplo con todas las posibles formas de resolverlo.

Para comprender mejor visualmente el trabajo analítico con ecuaciones, presentamos también la gráfica de la recta que alinea los tres puntos del siguiente ejemplo.

Si tres puntos están alineados pertenecen a la misma recta



Ejemplo

Dados los puntos $A(-1,0,2)$, $B(-7,-6,-4)$ y $C(2,3,5)$ comprueba si están alineados.

Forma 1: Obtener la recta que pasa por $A(-1,0,2)$ ***y por*** $B(-7,-6,-4)$ ***, y comprobar si también pasa por*** $C(2,3,5)$

Dados dos puntos de la recta, podemos obtener un vector director de la recta de la forma:

$$\vec{AB}=(-7+1,-6-0,-4-2)=(-6,-6,-6)$$

Podemos trabajar con este vector director o, por sencillez en las operaciones, con otro que sea paralelo a éste y con los coeficientes más pequeños:

$$\vec{u}=(-1,-1,-1) \rightarrow \vec{u}\|\vec{AB}$$

Y con un vector director y un punto, tenemos la ecuación continua de la recta:

$$r:\frac{x+1}{-1}=\frac{y}{-1}=\frac{z-2}{-1}$$

Si $C(2,3,5)\in r$ → Debe satisfacer la ecuación de r . Es decir:

$$\frac{2+1}{-1}=\frac{3}{-1}=\frac{5-2}{-1} \rightarrow -3=-3=-3$$ → **Sí están alineados**

Forma 2: Los vectores $\vec{AB}$ **y** $\vec{AC}$ **son linealmente dependientes**

$$\vec{AB}=(-6,-6,-6)$$

$$\vec{AC}=(3,3,3)$$

Dos vectores son linealmente dependientes si podemos expresar la siguiente relación:

$a\cdot\vec{AB}+b\cdot\vec{AC}=\vec{0}$ con a ó $b\neq 0$

$a\cdot(-6,-6,-6)+b\cdot(3,3,3)=\vec{0} \rightarrow b=-2a$ → Infinitas soluciones.

Por ejemplo, si $a=1 \rightarrow b=-2$ → **Sí están alineados**

Incluso observando directamente la forma de ambos vectores, se ve rápidamente que son proporcionales entre si.

Forma 3: La matriz formada por los dos vectores $\vec{AB}$ **y** $\vec{AC}$ **debe tener rango** 1 **, ya que los dos vectores no son linealmente independientes entre si.**

La matriz formada por los vectores columna es:

$\begin{pmatrix}-6 & 3\\ -6 & 3\\ -6 & 3\end{pmatrix}$ → Matriz $3\text{x}2$ → Como máximo su rango es 2

Cualquier submatriz cuadrada de orden 2 que escojamos, se anula su determinante. Por lo tanto, el rango es 1. → **Sí están alineados**

Forma 4: Determinar que los dos vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ son paralelos o antiparalelos

Dos vectores son paralelos o antiparalelos si el cociente de las primeras componentes de los vectores es igual al cociente de las segundas componentes, y a su vez es igual al cociente de las terceras componentes. Es decir:

$\vec{u}=(u_x, u_y, u_z)$ y $\vec{u}=(v_x, v_y, v_z)$ son paralelos <==> $\frac{u_x}{v_x}=\frac{u_y}{v_y}=\frac{u_z}{v_z}$

Comprobemos esta relación con nuestros vectores $\vec{AB}=(-6,-6,-6)$ y $\vec{AC}=(3,3,3)$.

$\frac{-6}{3}=\frac{-6}{3}=\frac{-6}{3}$ → **Sí están alineados**

Forma 5: El valor absoluto del producto escalar es igual al producto de los módulos de los vectores

Si recordamos la definición de producto escalar:

$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\alpha)$

Si los vectores son paralelos → $\cos(\alpha)=\cos(0º)=1 \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$

Si los vectores son anti-paralelos → $\cos(\alpha)=\cos(180º)=-1 \rightarrow \vec{u}\cdot\vec{v}=-|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$

Es decir, el valor absoluto del producto escalar es igual al producto de los módulos de los vectores.

Calculemos los módulos.

$\vec{AB}=(-6,-6,-6) \rightarrow |\vec{AB}|=\sqrt{6^2+6^2+6^2}=\sqrt{108}$

$\vec{AC}=(3,3,3) \rightarrow |\vec{AC}|=\sqrt{3^2+3^2+3^2}=\sqrt{27}$

Por lo tanto → $|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|=\sqrt{108}\cdot\sqrt{27}=\sqrt{2916}=54$

Otra forma de expresar el producto escalar es como la suma de los productos de cada una de las componentes de ambos vectores. Es decir:

$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y+u_z\cdot v_z$

Aplicado a nuestros vectores:

$\vec{AB}\cdot\vec{AC}=-6\cdot3-6\cdot3-6\cdot3=-54 \rightarrow |\vec{AB}\cdot\vec{AC}|=54$ → **Sí están alineados**

Dividir un segmento en partes iguales

Dados dos puntos tridimensionales $P(x_1, y_1, z_1)$ y $Q(x_2, y_2, z_2)$, forman el segmento $\overline{PQ}$.

Si llamamos $A(x, y, z)$ el punto medio de este segmento, podemos calcular sus coordenadas razonando de la siguiente forma:

$$\vec{PA}=\frac{1}{2}\vec{PQ} \quad \rightarrow \quad (x-x_1, y-y_1, z-z_1)=\frac{1}{2}(x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1)$$

Igualamos componentes $\rightarrow \left\{\begin{array}{l} x-x_1=\frac{1}{2}(x_2-x_1) \\ y-y_1=\frac{1}{2}(y_2-y_1) \\ z-z_1=\frac{1}{2}(z_2-z_1) \end{array}\right\} \rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=\frac{x_1+x_2}{2} \\ y=\frac{y_1+y_2}{2} \\ z=\frac{z_1+z_2}{2} \end{array}\right\}$

Es decir, el punto medio se cacula con la semisuma de cada una de las componentes de los puntos que forman el segmento.

Si deseamos dividir el segmento en tres partes iguales tendremos que obtener en primer lugar $\frac{1}{3}$ del segmento, y luego $\frac{2}{3}$. Razonamos de la siguiente forma:

$\vec{PA}=\frac{1}{3}\vec{PQ}$ $\rightarrow$ igualar componentes para obtener coordenadas de A

$\vec{PB}=\frac{2}{3}\vec{PQ}$ $\rightarrow$ Igualas componentes para obtener coordenadas de B.

Si deseamos dividirlo en cuatro partes iguales, razonaremos así:

$$\vec{PA}=\frac{1}{4}\vec{PQ} \quad , \quad \vec{PB}=\frac{2}{4}\vec{PQ} \quad , \quad \vec{PC}=\frac{3}{4}\vec{PQ}$$

Y así sucesivamente si deseamos dividir en cinco, seis, etc. partes iguales.

Ejemplo

Dividir el segmento formado por los puntos $P(-1,0,2)$ *y* $Q(-7,-6,-4)$ *en tres partes iguales.*

Calculamos el punto $A(x,y,z)$ que da lugar a $\frac{1}{3}$ del segmento.

$$\vec{PA}=\frac{1}{3}\vec{PQ} \rightarrow (x+1,y-0,z-2)=\frac{1}{3}(-7+1,-6-0,-4-2)$$

Igualamos componentes:

$x+1=-2 \rightarrow x=-3$

$y=-2$

$z-2=-2 \rightarrow z=0$

Por lo tanto: $A(-3,-2,0)$

Ahora calculamos el punto $B(x,y,z)$ que da lugar a $\frac{2}{3}$ del segmento.

$$\vec{PB}=\frac{2}{3}\vec{PQ} \rightarrow (x+1,y-0,z-2)=\frac{2}{3}(-7+1,-6-0,-4-2)$$

Igualamos componentes:

$x+1=-4 \rightarrow x=-5$

$y=-4$

$z-2=-4 \rightarrow z=-2$

Por lo tanto: $B(-5,-4,-2)$