Teoría – Tema 9

Repaso a la geometría en dos dimensiones de 1ºBachillerato

Índice de contenido

Ecuación vectorial, paramétrica, cartesiana y general de la recta en dos dimensiones

Estos apuntes presentan, de manera concisa, los **principales resultados trabajados en 1ºBachillerato sobre geometría plana** que nos sirven de puente para comprender la geometría en el espacio tridimensional. Para información más completa y detallada visitar la sección de 1ºBachillerato de la web http://danipartal.net/matematicas-I.php

Sea r una recta de la que conocemos un vector director $\vec{AB}=(u_x, u_y)$. Sea $A(x_0, y_0)$ un punto de la recta r .

Ecuación vectorial de la recta

$(x, y)=(x_0, y_0)+\lambda\cdot(u_x, u_y)$

(x, y) → Punto arbitrario de la recta.

(x_0, y_0) → Coordenadas de un punto concreto perteneciente a la recta.

λ → Parámetro perteneciente a los números reales.

(u_x, u_y) → Componentes de uno de los vectores directores de la recta.

Si trabajamos por componentes separadas en la ecuación vectorial, obtenemos la ecuación paramétrica.

Ecuación paramétrica de la recta

Pasamos de la ecuación vectorial $(x, y)=(x_0, y_0)+\lambda\cdot(u_x, u_y)$ a la ecuación paramétrica igualando componentes:

$$\begin{Bmatrix} x=x_0+\lambda\cdot u_x \\ y=y_0+\lambda\cdot u_y \end{Bmatrix}$$

Si despejamos el parámetro λ en cada ecuación paramétrica e igualamos.

Ecuación cartesiana o continua de la recta

Pasamos de la ecuación paramétrica a la ecuación cartesiana o continua despejando el parámetro λ e igualando.

$$\frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y}$$

Operando sobre la ecuación continua:

$$\frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y} \rightarrow u_y\cdot(x-x_0)=u_x\cdot(y-y_0) \rightarrow u_y\cdot x-u_y\cdot x_0=u_x\cdot y-u_x\cdot y_0$$

Reordenando → $u_y\cdot x-u_x\cdot y+u_x\cdot y_0-u_y\cdot x_0=0$

Llamando → $u_y=A$, $-u_x=B$, $u_x\cdot y_0-u_y\cdot x_0=C$

Nos queda → $A\cdot x+B\cdot y+C=0$ → **Ecuación general o implícita de la recta**

Ecuación general o implícita de la recta

Las variables x , y de la recta se relacionan a través de una ecuación lineal igualada a cero.

$A\cdot x+B\cdot y+C=0$

Ejemplo

Escribe la ecuación vectorial, paramétrica, cartesiana y general de la recta que pasa por los puntos $A(3,1)$, $B(7,-2)$.

En primer lugar obtenemos un vector director de la recta: $\vec{AB}=(7-3,-2-1)=(4,-3)$

Ecuación vectorial → $(x,y)=(3,1)+\lambda\cdot(4,-3)$

Ecuación paramétrica → $\left\{\begin{matrix} x=3+4\lambda \\ y=1-3\lambda \end{matrix}\right\}$

Ecuación cartesiana → $\frac{x-3}{4}=\frac{y-1}{-3}$

Ecuación general → $-3(x-3)=4(y-1)$ → $3\text{x}+4\text{y}-13=0$

Pendiente de una recta

Se llama **inclinación** de una recta al ángulo α que forma con el semieje positivo de abscisas. **La tangente de la inclinación es la pendiente** de la recta, que suele representarse con la letra m .

La inclinación de una recta coincide con la inclinación del representante canónico de uno de sus vectores directores. Y sabemos que la tangente de la inclinación de un vector se obtiene fácilmente a partir de sus coordenadas.

$\vec{u}=(u_x , u_y)$ → Representante canónico de un vector director de la recta

$tg(\alpha)=\frac{u_y}{u_x}$ → Pendiente del vector director

Recordamos la ecuación general o implícita de la recta:

$$A\cdot x+B\cdot y+C=0$$

$$u_y=A \quad , \quad -u_x=B \quad , \quad u_x\cdot y_0-u_y\cdot x_0=C$$

Como la pendiente del vector director coincide con la pendiente de la recta, tendremos:

$$pendiente \quad de \quad la \quad recta \quad \equiv m=\frac{u_y}{u_x}=\frac{A}{-B} \quad \rightarrow \quad m=\frac{-A}{B}$$

Es decir, conocida la ecuación implícita de una recta, su pendiente es el **cociente cambiado de signo entre el coeficiente que acompaña a la variable x y el coeficiente que acompaña a la variable y en dicha ecuación implícita**.

Ecuación punto-pendiente de la recta

Partimos en esta ocasión de la ecuación continua de la recta:

$$\frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y} \quad \rightarrow \quad u_y\cdot(x-x_0)=u_x\cdot(y-y_0) \quad \rightarrow \quad \frac{u_y}{u_x}\cdot(x-x_0)=y-y_0$$

Recordamos que la pendiente de la recta se define como $\frac{u_y}{u_x}=m$. Por lo tanto:

$$m\cdot(x-x_0)=y-y_0 \quad \rightarrow \quad m=\frac{(y-y_0)}{(x-x_0)}$$ → **Ecuación punto-pendiente de la recta**

Ecuación punto-pendiente de la recta

$$m=\frac{(y-y_0)}{(x-x_0)}$$

m → Pendiente de la recta

$(x_{0,}\, y_0)$ → Punto conocido perteneciente a la recta

Ecuación explícita de la recta

Partiendo de la ecuación punto pendiente:

$$m=\frac{(y-y_0)}{(x-x_0)} \quad \rightarrow \quad y-y_0=m\cdot(x-x_0) \quad \rightarrow \quad y=m\cdot x+y_0-m\cdot x_0$$

Llamando → $n=y_0-m\cdot x_0$

Obtenemos → $y=m\cdot x+n$ → **Ecuación explícita de la recta**

Ecuación explícita de la recta

$y=m\cdot x+n$

m → Pendiente de la recta

n → Corte de la recta con el eje vertical cuando $x=0$ → Valor de la recta en su paso por el eje de ordenadas (ordenada en el origen)

Ecuación segmentaria o canónica de la recta

Es aquella que viene dada en función de los puntos de corte de la recta con los ejes cartesianos. El punto de corte de la recta con el eje horizontal lo vamos a denotar como $(a,0)$. El punto de corte con el eje vertical como $(0,b)$.

$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$ → **Ecuación segmentaria o canónica de la recta**

Ecuación segmentaria o canónica de la recta
$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$
a → Corte de la recta con eje horizontal (abscisa en el origen)
b → Corte de la recta con eje vertical (ordenada en el origen)

Ecuación de la recta que pasa por dos puntos conocidos

Sean $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ dos puntos conocidos de la misma recta r . Podemos obtener la ecuación de la recta suponiendo un punto genérico $C(x, y)$ que también pertenezca a la recta y calculando su pendiente a partir de dos puntos (cociente entre la diferencia de las componentes verticales y la diferencia de las componentes horizontales):

Puntos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ $\rightarrow$ $m=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$

Puntos $B(x_2, y_2)$, $C(x, y)$ $\rightarrow$ $m=\frac{y-y_2}{x-x_2}$

Igualamos las pendientes:

$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_2}{x-x_2}$ $\rightarrow$ **Ecuación de una recta que pasa por dos puntos conocidos**

Ecuación de una recta que pasa por dos puntos conocidos

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_2}{x-x_2}$$

$(x_1, y_1),(x_2, y_2)$ $\rightarrow$ Puntos conocidos de la recta

Ejemplo

Obtener la ecuación de la recta que pasa por los puntos $A(2,5)$, $B(-3,7)$.

Suponemos un punto arbitrario $C(x, y)$ de la recta:

$$\frac{7-5}{-3-2}=\frac{y-7}{x+3} \quad \rightarrow \quad \frac{2}{-5}=\frac{y-7}{x+3}$$

Ecuación normal de la recta y cosenos directores

Sea la ecuación general de una recta $r: Ax+By+C=0$.

Si dividimos por el factor $\sqrt{A^2+B^2}$ obtenemos la ecuación normal de la recta.

Ecuación normal de la recta

$$r: \frac{Ax}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{By}{\sqrt{A^2+B^2}}+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

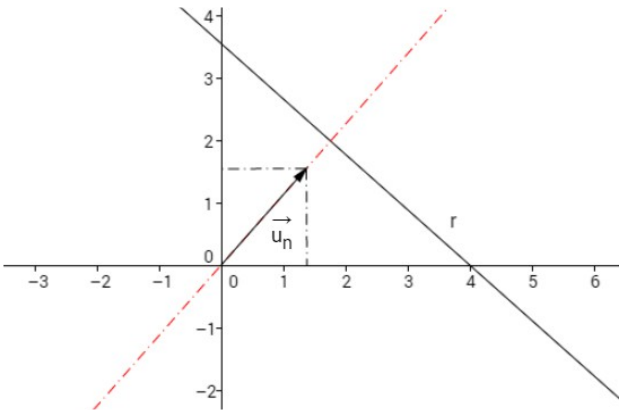
Si $\vec{u}=(u_x, u_y)=(-B, A)$ es un vector director de la recta $r: Ax+By+C=0$, un vector director unitario será:

$$\hat{u}=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=\left(\frac{-B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$$

Dado un vector en dos dimensiones, recordamos que podemos obtener otro perpendicular a él con solo intercambiar las posiciones de las dos componentes y cambiando el signo a una de las componentes. Por lo tanto:

$\hat{u}_n=\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}, \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right)$ → **Vector unitario perpendicular a la recta**

Recta r y vector normal $\vec{u}_n$ perpendicular a la recta r



Este vector unitario perpendicular a la recta se llama vector unitario normal (el concepto de normal indica “perpendicular”). Y este vector normal unitario forma un ángulo α con el eje OX y un ángulo β con el eje OY .

Los valores de los cosenos de ambos ángulos se expresan de la forma:

$$\cos(\alpha)=\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

$$\cos(\beta)=\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Estos cosenos se llaman cosenos directores de la recta. Y podemos expresar la ecuación normal de la recta en función de estos cosenos directores.

Ecuación de la recta en función de sus cosenos directores

$$r:\cos(\alpha)\cdot x+\cos(\beta)\cdot y+\frac{C}{\sqrt{A^2+B^2}}=0$$

α $\rightarrow$ Ángulo formado con el eje OX por un vector perpendicular a la recta

β $\rightarrow$ Ángulo formado con el eje OY por un vector perpendicular a la recta

Rectas paralelas

Dos rectas son paralelas cuando tienen la misma dirección, es decir, cuando tienen la misma inclinación.

Sean las rectas paralelas y sus vectores directores siguientes:

$$recta\ \ r\ \ \rightarrow\ \ vector\ \ director\ \ \vec{u}=(u_x, u_y)$$
$$recta\ \ s\ \ \rightarrow\ \ vector\ \ director\ \ \vec{v}=(v_x, v_y)$$

Por ser paralelas, sus pendientes deben ser iguales

$\frac{u_y}{u_x}=\frac{v_y}{v_x} \rightarrow m_r=m_s$ $\rightarrow$ **Igualdad de pendientes entre rectas paralelas**

Si expresamos dos rectas paralelas en su forma general, tendremos:

$$recta\ \ r\ \ \rightarrow\ \ A_r x+B_r y+C_r=0$$
$$recta\ \ s\ \ \rightarrow\ \ A_s x+B_s y+C_s=0$$

Recordemos que podemos obtener las pendientes de estas rectas a partir de los parámetros de la ecuación general:

$$m_r=\frac{-A_r}{B_r}\ \ ,\ \ m_s=\frac{-A_s}{B_s}\ \ \rightarrow\ \ m_r=m_s\ \ \rightarrow\ \ \frac{A_r}{B_r}=\frac{A_s}{B_s}\ \ \rightarrow\ \ \frac{A_r}{A_s}=\frac{B_r}{B_s}$$

Es decir, **dos rectas son paralelas si el cociente entre los coeficientes que acompañan a x y el cociente entre los coeficientes que acompañan a y en la ecuación general, es constante**.

Ejemplo

Dada la recta $r: x-3y+5=0$, obtener la recta paralela que pasa por el punto $P(3,2)$.

Hemos estudiado muchas formas distintas de expresar la ecuación de una recta, por lo que este tipo de problemas suelen tener distintas formas de resolverse, todas perfectamente válidas.

Una opción sería obtener la pendiente de la recta → $m=\frac{-A}{B}=\frac{1}{3}$

Y con la pendiente y el punto $P(3,2)$ podemos obtener la ecuación punto pendiente de la recta paralela → $s:\frac{1}{3}=\frac{y-2}{x-3}$ → $s:x-3y+3=0$

Una segunda forma de resolverlo es recordando que si las ecuaciones generales de dos rectas solo se diferencian en el término C, ambas rectas son paralelas. Por lo tanto:

$s:x-3y+C=0$ → si $P(3,2)\in s$ → $3-3\cdot 2+C_s=0$ → $C_s=3$ → $s:x-3y+3=0$

Producto escalar de vectores en dos dimensiones. Ángulo formado por dos vectores

El concepto de "producto escalar de dos vectores" indica que debemos multiplicar ambos vectores y que el resultado es un número (un escalar).

Se llama producto escalar de dos vectores no nulos, al número real resultante de multiplicar el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos(\alpha)$ → **Producto Escalar en función del coseno**

De esta definición se entiende, fácilmente, tres casos particulares muy prácticos en determinados problemas:

- Si $\vec{u}\|\vec{v}$ son paralelos → $\alpha=0^{o}$ → $\cos(0^{o})=1$ → $\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$
- Si $\vec{u}$ y $\vec{v}$ son anti-paralelos → $\alpha=180^{o}$ → $\cos(180^{o})=-1$ → $\vec{u}\cdot\vec{v}=-|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|$
- Si $\vec{u}\perp\vec{v}$ son perpendiculares → $\alpha=00^{o}$ → $\cos(90^{o})=0$ → $\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

El producto escalar también puede expresarse como el número real resultante de sumar el producto de las coordenadas horizontales y el producto de las coordenadas verticales de los vectores bi-dimensionales.

$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y$ → **Producto escalar en función de las componentes**

Igualando las dos expresiones del producto escalar, podemos obtener un resultado del ángulo que forman dos vectores en el plano.

$\cos(\alpha)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y}{\sqrt{u_x^2+u_y^2}\cdot\sqrt{v_x^2+v_y^2}}$ → **Coseno del ángulo formado por dos vectores**

Rectas perpendiculares

Dos rectas son perpendiculares cuando entre si forman un ángulo de 90º. Por tanto, sus vectores directores son perpendiculares. Y recordamos que el producto escalar de dos vectores perpendiculares es cero.

Sean las rectas perpendiculares y sus vectores directores siguientes:

$$recta\ \ r\ \ \rightarrow\ \ vector\ \ director\ \ \vec{u}=(u_x, u_y)$$
$$recta\ \ s\ \ \rightarrow\ \ vector\ \ director\ \ \vec{v}=(v_x, v_y)$$

El producto escalar será nulo → $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \rightarrow u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y=0 \rightarrow u_x\cdot v_x=-u_y\cdot v_y$

Por tanto → $\frac{u_x}{u_y}=-\frac{v_y}{v_x} \rightarrow \frac{1}{m_r}=-m_s \rightarrow m_r\cdot m_s=-1$ → Relación entre las pendientes de rectas perpendiculares: **dos rectas son perpendiculares cuando sus pendientes son inversas y opuestas; o lo que es lo mismo, cuando el producto de sus pendientes es igual a** -1 **.**

Ejemplo

Obtener la ecuación de una la perpendicular a $r: 2\text{x}-3\text{y}+7=0$ que pasa por $P(1,5)$.

$m_r=\frac{2}{3}$ → como se cumple $m_r\cdot m_s=-1 \rightarrow m_s=\frac{-3}{2}$

Usamos ecuación punto pendiente → $s: \frac{-3}{2}=\frac{y-5}{x-1} \rightarrow s: 3\text{x}+2\text{y}-13=0$

Ángulo formado por dos rectas

Sean dos rectas en forma general:

$r: Ax+By+C=0$ $\rightarrow$ vector director $\vec{u}=(u_x, u_y)$

$s: A'x+B'y+C'=0$ $\rightarrow$ vector director $\vec{v}=(v_x, v_y)$

El ángulo formado por las rectas será igual al formado por sus vectores directores, cuya expresión ya repasamos en apartados anteriores:

$$\cos(\alpha)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y}{\sqrt{u_x^2+u_y^2}\cdot\sqrt{v_x^2+v_y^2}}$$

Y sabemos la relación entre las coordenadas de los vectores directores y los coeficientes de las ecuaciones generales:

$$u_x=-B \quad , \quad u_y=A$$

$$v_x=-B' \quad , \quad v_y=A'$$

Por lo tanto podemos expresar el coseno del ángulo formado por dos rectas de la siguiente forma (tomamos valor absoluto para garantizar que α pertenece al primer cuadrante, es decir, tomamos el menor ángulo formado por ambas rectas)

$$\cos(\alpha)=\left|\frac{A\cdot A'+B\cdot B'}{\sqrt{A^2+B^2}\cdot\sqrt{(A')^2+(B')^2}}\right|$$

Si trabajamos con las pendientes m_r y m_s de las rectas, podemos obtener una relación donde aparece la tangente del ángulo α .

$$tg(\alpha)=\left|\frac{m_r-m_s}{1+m_r\cdot m_s}\right|$$

Circunferencia

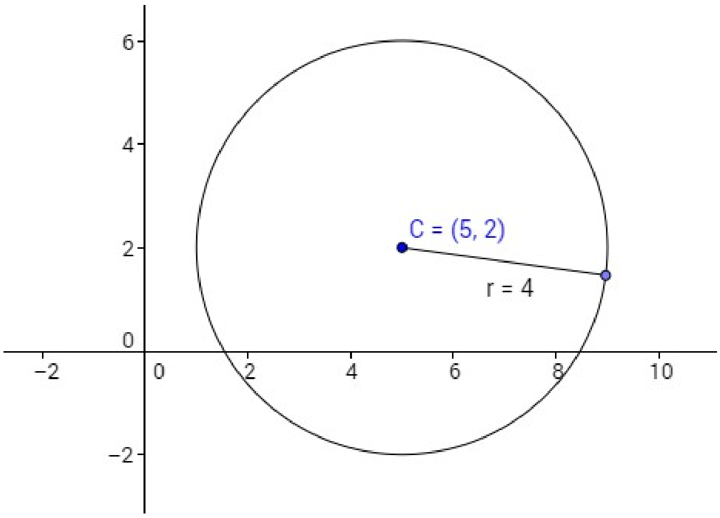
Para terminar este repaso de los conceptos claves de la geometría en dos dimensiones de 1ºBachillerato, vamos a presentar las ecuaciones generales de dos curvas cónicas cerradas: la circunferencia y la elipse.

Recuerda visitar la sección de 1ºBachillerato de la web http://danipartal.net/matematicas-I.php si deseas información más detallada, demostraciones de fórmulas y el estudio de otras curvas cónicas como la hipérbola y la parábola.

Ecuación de la circunferencia de centro $C(x_0, y_0)$ y radio r

$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2=r^2$ → Si el centro es $(0,0)$ → $x^2+y^2=r^2$

Circunferencia de ecuación $(x-5)^2+(y-2)^2=16$ *con centro* $C(5,2)$ *y radio* $r=4$



Elipse

Ecuación de la elipse centrada en $C(x_{0,}y_0)$, ejes paralelos a los cartesianos y focos sobre el eje paralelo al eje OX.

$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$ → Si el centro es $(0,0)$ → $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

a → semieje mayor

b → semieje menor

c → semidistancia focal → $a^2=b^2+c^2$

Elipse de ecuación $\frac{(x-5)^2}{(2{,}24)^2}+\frac{(y-2)^2}{(1)^2}=1$ *con focos* $F(7{,}2)$ *y* $F'(3{,}2)$