Problemas – Tema 9

Solución a problemas sobre Geometría - Hoja 8 - Problemas 4

Hoja 8. Problema 4

4. a) Estudia la posición relativa de las rectas $r:\left\{\begin{array}{c} x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=1 \end{array}\right\}$ **y** $s:\left\{\begin{array}{c} x-z=0 \\ x+2y-z=12 \end{array}\right\}$ **.**

b) Calcula la distancia entre ambas rectas.

a) Para estudiar la posición entre ambas rectas vamos a tomar los siguientes elementos geométricos.

Punto y director de la primera recta → $A , \vec{u}_r$

Punto y vector director de la segunda recta → $B , \vec{u}_s$

Vector formado por los puntos obtenidos → $\vec{AB}$

El estudio del rango de la matriz formada por estos tres vectores $(\vec{u}_r , \vec{u}_s , \vec{AB})$ nos dará la información necesaria para determinar la posición relativa de las rectas.

Pasamos las rectas, en forma general, a paramétricas.

$$r:\left\{\begin{array}{c} x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=1 \end{array}\right\} \rightarrow z=\lambda \rightarrow r:\left\{\begin{array}{c} x+y=1+\lambda \\ 2x+y=1+2\lambda \end{array}\right\}$$ → Restamos las dos ecuaciones →

$$-x=-\lambda \rightarrow x=\lambda \rightarrow y=1 \rightarrow r:\left\{\begin{array}{c} x=\lambda \\ y=1 \\ z=\lambda \end{array}\right\} \rightarrow A(0,1,0) \ , \ \vec{u}_r=(1,0,1)$$

$$s:\left\{\begin{array}{c} x-z=0 \\ x+2y-z=12 \end{array}\right\} \rightarrow z=\lambda \rightarrow x=\lambda \rightarrow y=6$$

$$s:\left\{\begin{array}{c} x=\lambda \\ y=6 \\ z=\lambda \end{array}\right\} \rightarrow B(0,6,0) \ , \ \vec{u}_s=(1,0,1)$$

$\vec{AB}=(0,-5,0)$

$$(\vec{u}_r,\vec{u}_s,\vec{AB})=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&1\\0&-5&0\end{pmatrix}\ \rightarrow\ det=0+0-5-(0+0-5)=0\ \rightarrow\ Rango\neq 3$$

Buscamos un menor de orden dos no nulo → $|\alpha_{11}|=0+5=5\ \rightarrow\ Rango=2$ → Tenemos dos vectores linealmente independientes, por lo tanto la terna $(\vec{u}_r,\vec{u}_s,\vec{AB})$ está contenida en un mismo plano. Esta configuración puede implicar que las rectas sean paralelas o cruzadas. Para decidirlo, debemos ver el rango de los dos vectores directores → $(\vec{u}_r,\vec{u}_s)=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&0&1\end{pmatrix}$ → Son vectores proporcionales, por lo que las rectas son paralelas.

b) La distancia entre ambas rectas paralelas podemos determinarla con la fórmula $d(P,r)=\frac{|\vec{AP}\times\vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|}$, sabiendo que:

$\vec{u}_r$ → Vector director de la recta $r\ \rightarrow\ \vec{u}_r=(1,0,1)$

A → Punto de la recta $r\ \rightarrow\ A(0,1,0)$

P → Punto de la recta $s\ \rightarrow\ P(0,6,0)$

$\vec{AP}=(0,-5,0)$

$$\vec{AP}\times\vec{u}_r=\begin{vmatrix}\hat{i}&\hat{j}&\hat{k}\\0&-5&0\\1&0&1\end{vmatrix}=-5\hat{i}+0+0-(-5\hat{k}+0+0)=-5\hat{i}+5\hat{k}=(-5,0,5)$$

$$|\vec{AP}\times\vec{u}_r|=\sqrt{25+0+25}=\sqrt{50}$$

$$|\vec{u}_r|=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2}$$

$$d(P,r)=\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}=\sqrt{25}=5\ u$$