Problemas – Tema 9

Solución a problemas sobre Geometría - Hoja 07 - Problemas 3, 4

Hoja 7. Problema 3

3. a) ¿Pueden existir vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$ y $\vec{u}\cdot\vec{v}=8$? Justifica la respuesta.

b) Determina todos los vectores $\vec{u}=(a,0,b)$ que tengan módulo 8 y sean perpendiculares a la recta $r:\left\{\begin{matrix} x+y+z=0 \\ x-y+z-2=0 \end{matrix}\right\}$.

a) El producto escalar de dos vectores se define como el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman entre sí.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$$

Si el producto escalar es igual a 8 $\rightarrow$ $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha=8$

Si $|\vec{u}|=2$ y $|\vec{v}|=3$ $\rightarrow$ $2\cdot3\cdot\cos\alpha=8$ $\rightarrow$ $\cos\alpha=\frac{4}{3}>1$

Este resultado no es posible, ya que el función coseno está acotada superiormente por 1 . Por lo tanto, no pueden existir dos vectores con las condiciones del enunciado.

b) Si $\vec{u}=(a,0,b)$ tiene módulo 8 → $\sqrt{a^2+b^2}=8$.

Si además $\vec{u}=(a,0,b)$ debe ser perpendicular a la recta $r:\left\{\begin{matrix} x+y+z=0 \\ x-y+z-2=0 \end{matrix}\right\}$ significa que el producto escalar de $\vec{u}$ con el vector director de la recta debe anularse (por formar entre sí 90º).

Pasamos la recta a paramétricas para obtener su vector director.

$$r:\left\{\begin{matrix} x+y+z=0 \\ x-y+z-2=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow z=\lambda \rightarrow r:\left\{\begin{matrix} x+y=-\lambda \\ x-y=-\lambda+2 \end{matrix}\right\}$$ → Sumamos ambas ecuaciones

$$2x=-2\lambda+2 \rightarrow x=1-\lambda \rightarrow y=-\lambda-(1-\lambda) \rightarrow y=-1$$

La recta en paramétricas resulta → $r:\left\{\begin{matrix} x=1-\lambda \\ y=-1 \\ z=\lambda \end{matrix}\right\} \rightarrow \vec{u}_r=(-1,0,1)$

Hacemos el producto escalar e igualamos a cero.

$$\vec{u}\cdot\vec{u}_r=0 \rightarrow -a+b=0 \rightarrow a=b$$

Llevamos este resultado a la primera condición obtenida $\sqrt{a^2+b^2}=8$ y despejamos.

$$\sqrt{a^2+a^2}=8 \rightarrow \sqrt{2a^2}=8 \rightarrow 2a^2=64 \rightarrow a=\pm\sqrt{32}=\pm 4\sqrt{2}$$

Los vectores solución son $\vec{u}=(4\sqrt{2},0,4\sqrt{2})$ y $\vec{u}=(-4\sqrt{2},0,-4\sqrt{2})$

Hoja 7. Problema 4

4. Dadas las rectas $r: \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$ **y** $s: \begin{Bmatrix} x=-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{Bmatrix}$ **.**

a) Determine su posición relativa.

b) Calcule la distancia del punto $P(2,3,1)$ **a la recta** s **.**

a) Para estudiar la posición relativa de ambas rectas debemos obtener sus respectivos vectores directores y un punto de cada recta.

$$r: \frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1} \rightarrow \vec{u}_r=(2,3,1) \quad , \quad A\in r=(0,0,0)$$

$$s: \begin{Bmatrix} x=-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{Bmatrix} \rightarrow \vec{u}_s=(-1,2,2) \quad , \quad B\in s=(0,1,-2)$$

$$\vec{AB}=(0,1,-2)$$

El rango de la matriz formada por los vectores $(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{AB})$ nos informará del número de vectores linealmente independientes y, según este valor, podremos determinar la posición relativa de las rectas.

Calculamos el determinante de la matriz 3x3 formada por $(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{AB})$. Si es no nulo, el rango será 3.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix} = -8-1+0-(0+4+6)=-19\neq 0 \quad \rightarrow \text{Rango 3}$$

Si los tres vectores son linealmente independientes significan que las dos rectas son cruzadas en el espacio.

b) Para obtener la distancia desde un punto $P(2,3,1)$ a la recta s podemos aplicar la fórmula que vimos en teoría o bien razonar de la siguiente manera.

Elegimos un punto arbitrario de la recta s , cuyas coordenadas serán las de la recta en paramétricas.

$$s: \begin{Bmatrix} x=-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{Bmatrix} \rightarrow Q(-\lambda, 1+2\lambda, -2+2\lambda) \rightarrow \text{Punto arbitrario de } s$$

Formamos el vector $\vec{PQ}=(-\lambda-2,-2+2\lambda,-3+2\lambda)$. El módulo del vector $\vec{PQ}$ será la distancia buscada siempre que el producto escalar de $\vec{PQ}$ con el vector director $\vec{u}_s=(-1,2,2)$ sea nulo (ya que los dos vectores serán perpendiculares).

$$\vec{PQ}\cdot\vec{u}_s=0 \;\rightarrow\; -(-\lambda-2)+2(-2+2\lambda)+2(-3+2\lambda)=0 \;\rightarrow\; \lambda+2-4+4\lambda-6+4\lambda=0$$

$$9\lambda-8=0 \;\rightarrow\; \lambda=\frac{8}{9}$$

Con este resultado podemos obtener el vector $\vec{PQ}=(-\lambda-2,-2+2\lambda,-3+2\lambda)$.

$$\vec{PQ}=(\frac{-8}{9}-2,-2+\frac{16}{9},-3+\frac{16}{9})=(\frac{-26}{9},-\frac{2}{9},-\frac{11}{9})$$

$$d(P,s)=|\vec{PQ}|=\sqrt{\frac{676+4+121}{81}}=\sqrt{\frac{801}{81}}=\sqrt{\frac{89}{9}}\;u$$