

## Problemas – Tema 9

### Solución a problemas sobre Geometría - Hoja 06 - Problemas 3, 4

#### Hoja 6. Problema 3

3. Sea  $r$  la recta definida por  $r: \begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x-y+z=1 \end{cases}$ .

a) Determina la ecuación general del plano que contiene a  $r$  y pasa por el origen de coordenadas.

b) Halla las ecuaciones paramétricas del plano que corta perpendicular a  $r$  en el punto  $(1,1,0)$ .

a) Podemos resolver este ejercicio de dos formas: como haz de planos o bien buscando dos vectores independientes y un punto del plano. Vamos a resolverlo de ambas formas.

Como haz de planos necesitamos escribir la ecuación del haz a partir de dos planos que pasen por la recta. De la ecuación general del plano podemos escribir:

$$a(x+2y-z-3)+b(2x-y+z-1)=0$$

De los infinitos planos que pasan por la recta nos quedamos con el que pase por el origen de coordenadas. Es decir  $\rightarrow a(0+0-0-3)+b(0-0+0-1)=0 \rightarrow -3a-b=0 \rightarrow b=-3a$

Llevamos este resultado al haz de planos.

$$a(x+2y-z-3)+(-3a)(2x-y+z-1)=0 \rightarrow a(x+2y-z-3-6x+3y-3z+3)=0$$

El plano solución resulta  $\rightarrow \Pi: -5x+5y-4z=0$

Una segunda forma de resolverlo consiste en buscar dos vectores linealmente independientes paralelos al plano y un punto.

Según el enunciado, el punto puede ser  $P(0,0,0)$  ya que el plano pasa por el origen de coordenadas.

Necesitamos los dos vectores independientes y paralelos al plano. Uno de esos vectores será el vector director de la recta, ya que el plano contiene a la recta. Si pasamos la recta a paramétrica obtenemos el vector director de la recta.

$$r: \begin{cases} x+2y-z=3 \\ 2x-y+z=1 \end{cases} \rightarrow z=\lambda \rightarrow r: \begin{cases} x+2y=3+\lambda \\ 2x-y=1-\lambda \end{cases} \rightarrow r: \begin{cases} x+2y=3+\lambda \\ 4x-2y=2-2\lambda \end{cases}$$

Sumamos ambas ecuaciones  $\rightarrow 5x = 5 - \lambda \rightarrow x = 1 - \frac{1}{5}\lambda \rightarrow 2(1 - \frac{1}{5}\lambda) - 1 + \lambda = y$

$$y = 1 + \frac{3}{5}\lambda \rightarrow \text{La recta en paramétricas resulta } r: \begin{cases} x = 1 - \frac{1}{5}\lambda \\ y = 1 + \frac{3}{5}\lambda \\ z = \lambda \end{cases} \rightarrow \vec{u}_r = \left(\frac{-1}{5}, \frac{3}{5}, 1\right)$$

Para no trabajar con fracciones podemos tomar como vector director  $\rightarrow \vec{u}_r = (-1, 3, 5)$

Un segundo vector del plano podemos obtenerlo a partir del  $P(0, 0, 0)$  y de un punto de la recta. Por ejemplo el  $A(1, 1, 0) \rightarrow \vec{PA} = (1, 1, 0)$

Los dos vectores  $\vec{u}_r = (-1, 3, 5)$  y  $\vec{PA} = (1, 1, 0)$  son independientes, al no ser sus componentes proporcionales, ya que  $\frac{-1}{1} \neq \frac{3}{1} \neq \frac{5}{0}$ .

Con dos vectores independientes y paralelos al plano y el punto  $P(0, 0, 0)$  perteneciente al plano, podemos obtener la determinación lineal del plano.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & x \\ 3 & 1 & y \\ 5 & 0 & z \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -z + 5y + 0 - (5x + 0 + 3z) = 0 \rightarrow \Pi: -5x + 5y - 4z = 0$$

Resultado que coincide con el obtenido anteriormente con el método del haz de planos.

b) Un plano perpendicular a la recta  $r: \begin{cases} x + 2y - z = 3 \\ 2x - y + z = 1 \end{cases}$  tendrá como vector normal el vector director de la recta. En el apartado anterior obtuvimos  $\vec{u}_r = (-1, 3, 5)$  como vector director.

Por lo tanto, la ecuación general del plano será  $-x + 3y + 5z + D = 0$ .

El término independiente lo obtenemos sabiendo que el plano pasa por el punto  $(1, 1, 0)$ .

$$-1 + 3 + 0 + D = 0 \rightarrow D = -2 \rightarrow \Pi: -x + 3y + 5z - 2 = 0$$

Esta es la ecuación general del plano. Debemos pasar a paramétricas, para ello consideramos dos incógnitas como parámetros libre en la ecuación general.

$$\Pi: \begin{cases} x = 3\alpha + 5\beta - 2 \\ y = \alpha \\ z = \beta \end{cases}$$

## Hoja 6. Problema 4

4. Sea la recta  $r$  que pasa por los puntos  $A(1,0,-1)$  y  $B(-1,1,0)$ .

a) Halla la ecuación de la recta  $s$  paralela a  $r$  que pasa por  $C(-2,3,2)$ .

b) Calcula la distancia de  $r$  y  $s$ .

a) Si la recta  $s$  es paralela a  $r$ , tendrán el mismo vector director. Y si  $s$  pasa por  $C(-2,3,2)$ , ya tendremos un punto y un vector para obtener la ecuación de la recta.

$$\vec{u}_s = \vec{u}_r = \vec{AB} = (-2, 1, 1), \quad C(-2, 3, 2) \in s \rightarrow s: \begin{cases} x = -2 - 2a \\ y = 3 + a \\ z = 2 + a \end{cases}$$

b) La distancia entre dos rectas paralelas podemos obtenerla como la distancia de un punto  $A \in r$  a la otra recta  $s$ .

Podemos obtener la distancia con la fórmula  $d(P, s) = \frac{|\vec{AP} \times \vec{u}_s|}{|\vec{u}_s|}$ , donde  $\vec{u}_s$  es el vector director de la recta  $s$  y  $P \in s$  un punto de dicha recta.

$$A(1, 0, -1) \in r, \quad P(-2, 3, 2) \in s \rightarrow \vec{AP} = (-3, 3, 3)$$

$$\vec{u}_s = (-2, 1, 1) \rightarrow |\vec{u}_s| = \sqrt{6}$$

$$\vec{AP} \times \vec{u}_s = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - 6\hat{j} - 3\hat{k} - (-6\hat{k} + 3\hat{i} - 3\hat{j}) = -3\hat{j} + 3\hat{k} = (0, -3, 3)$$

$$|\vec{AP} \times \vec{u}_s| = \sqrt{18}$$

$$d(P, s) = \frac{|\vec{AP} \times \vec{u}_s|}{|\vec{u}_s|} = \frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}} = \sqrt{3} u$$