Problemas – Tema 9

Solución a problemas sobre Geometría - Hoja 05 - Problemas 2, 6

Hoja 5. Problema 2

2. a) Halla $a \in \mathbb{R}$ **para que las rectas** $r: \left\{ \begin{matrix} x+2y-z=1 \\ -x+y-3z=2 \end{matrix} \right\}$ **y** $s: \left\{ \begin{matrix} x+y=0 \\ 3x+2y+z=a \end{matrix} \right\}$ **se corten en un punto.**

b) Para dicho valor de a **obtener la ecuación implícita de un plano que contenga a ambas rectas.**

a) Para estudiar la posición relativa de dos rectas podemos trabajar de dos formas.

La primera es con sus ecuaciones generales, formando un sistema 4x4 que debería tener solución única si queremos que ambas rectas se corten un punto.

La segunda es obtener los vectores directores de cada recta $\vec{u}_r, \vec{u}_s$ y un punto de cada recta para formr el vector $\vec{AB}$. Estudiando el rango de la matriz formada por estos tres vectores podemos deducir la posición relativa de ambas rectas. Vamos a resolverlo de esta segunda forma.

$$r: \left\{ \begin{matrix} x+2y-z=1 \\ -x+y-3z=2 \end{matrix} \right\} \rightarrow z=t \rightarrow r: \left\{ \begin{matrix} x+2y=1+t \\ -x+y=2+3t \end{matrix} \right\}$$ → Sumamos ambas ecuaciones

$$3y=3+4t \rightarrow y=1+\frac{4}{3}t \rightarrow x=1+t-2\left(1+\frac{4}{3}t\right) \rightarrow x=-1-\frac{5}{3}t$$

$$r: \left\{ \begin{matrix} x=-1-\frac{5}{3}t \\ y=1+\frac{4}{3}t \\ z=t \end{matrix} \right\} \rightarrow A \in r=(1,1,0) \quad , \quad \vec{u}_r=\left(\frac{-5}{3}, \frac{4}{3}, 1\right) \rightarrow \vec{u}_r=(-5,4,3)$$

$$s: \left\{ \begin{matrix} x+y=0 \\ 3x+2y+z=a \end{matrix} \right\} \rightarrow z=m \rightarrow s: \left\{ \begin{matrix} x+y=0 \\ 3x+2y=a-m \end{matrix} \right\} \rightarrow s: \left\{ \begin{matrix} -2x-2y=0 \\ 3x+2y=a-m \end{matrix} \right\} \rightarrow$$

Sumamos ambas ecuaciones → $x=a-m \rightarrow y=-a+m$

$$s: \left\{ \begin{matrix} x=a-m \\ y=-a+m \\ z=m \end{matrix} \right\} \rightarrow B \in s=(a,-a,0) \quad , \quad \vec{u}_s=(-1,1,1)$$

El vector $\vec{AB}$ resulta → $A\in r=(1,1,0)$, $B\in s=(a,-a,0)$ → $\vec{AB}=(a-1,-a-1,0)$

Formamos la matriz $(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{AB})$. Para que las rectas se corten en un punto el rango de esta matriz debe ser dos, ya que los vectores directores de ambas rectas son sistema generador del plano que contiene a ambas rectas. Además, estos dos vectores directores son linealmente independientes entre sí.

$$\vec{u}_r=(-5,4,3) \quad , \quad \vec{u}_s=(-1,1,1) \quad , \quad \vec{AB}=(a-1,-a-1,0)$$

Los vectores directores de las dos rectas, en efecto, son linealmente independientes ya que no son proporcionales, como se comprueba al dividir sus componentes → $\frac{-5}{-1}\neq\frac{4}{1}\neq\frac{3}{1}$

Nos queda imponer la condición de rango dos para la matriz formada por los tres vectores. Paraello, forzamos que su determinante sea cero (ya que así el rago no será tres.)

$$\begin{vmatrix} -5 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ a-1 & -a-1 & 0 \end{vmatrix}=0 \rightarrow 0+4(a-1)-3(-a-1)-(3(a-1)+0-5(-a-1))=0$$

$$(a-1)+2(-a-1)=0 \rightarrow -a-3=0 \rightarrow a=-3$$

Esta valor anula el determinante. Sabemos que el rango de a matriz es dos, al contener dos vectores linealmente independientes (los dos vectores directores). Por lo tanto, para $a=-3$ las rectas se cortan en un solo punto. En el siguiente enlace de Geogebra puedes apreciar la solución en 3 dimensiones.

https://www.geogebra.org/m/ayE64sUe

b) Para $a=-3$ debemos obtener la ecuación general o implícita del plano que contiene a ambas rectas. Sabeos que un plano queda determinado de manera única por dos vectores linealmente independientes paraelos al plano y un punto del plano.

Estos vectores son los directores de las rectas: $\vec{u}_r=(-5,4,3)$, $\vec{u}_s=(-1,1,1)$

Y el punto es uno de cualquiera de las dos rectas, por ejemplo: $A\in r=(1,1,0)$

Con la determinación lineal del plano podemos obtener su ecuación general anulando el siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} -5 & -1 & x-1 \\ 4 & 1 & y-1 \\ 3 & 1 & z \end{vmatrix}=0 \rightarrow -5z-3(y-1)+4(x-1)-(3(x-1)-5(y-1)-4z)=0$$

$$-z+2(y-1)-(x-1)=0 \rightarrow \Pi:-x+2y-z-1=0$$

Hoja 5. Problema 6

6. Considera el punto $P(-1,0,1)$ **y el plano** $\Pi: x-y+z+2=0$ **. Calcule:**

a) Las ecuaciones de una recta que pase por el punto P **y sea perpendicular al plano** Π **.**

b) La distancia del punto P **al plano** Π **.**

a) Para obtener una recta necesitamos un punto de la recta y un vector paralelo a la recta.

El punto es, según el enunciado, $P(-1,0,1)$.

El vector director de la recta debe ser, según el enunciado, perpendicular al plano $\Pi: x-y+z+2=0$. Por lo que podemos tomar el vector normal al plano como vector director.

$$\vec{u}_\Pi=(1,-1,1) \quad \rightarrow \quad r: \begin{Bmatrix} x=-1+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=1+\lambda \end{Bmatrix}$$

b) Para obtener la distancia de un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ a un plano $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$ podemos hacer uso de la fórmula:

$$d(P,\Pi)=\left|\frac{Ax_0+By_0+Cz_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$$

Aplicado a los datos del enunciado → $d(P,\Pi)=\left|\frac{1\cdot(-1)-1\cdot 0+1\cdot 1+2}{\sqrt{3}}\right|=\frac{2\sqrt{3}}{3}\ u$