Problemas – Tema 9

Solución a problemas sobre Geometría - Hoja 04 - Problemas 1, 5

Hoja 4. Problema 1

1. Sea el triángulo de vértices $A(1,2,-2)$, $B(0,-3,1)$ **y** $C(-1,0,0)$ **y los planos** $\Pi_1: x+y+z+1=0$ **y** $\Pi_2:\begin{Bmatrix} x=-\alpha+\beta+1 \\ y=\alpha-2\beta \\ z=\alpha+\beta \end{Bmatrix}$ **.**

a) Obtener la posición relativa de Π_1 **y del plano que contiene al triángulo.**

b) Obtener un vector $\vec{n}_1$ **perpendicular al plano** Π_1 **y un vector** $\vec{n}_2$ **perpendicular al plano** Π_2 **. Obtener el coseno del ángulo formado por ambos vectores.**

c) Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de ambos planos.

a) En primer lugar calculamos el plan que contiene a los puntos A, B y C. Para ello buscamos dos vectores linealmente independientes y un punto del plano, para aplicar la determinación lineal del plano.

$$\begin{matrix} \vec{AB}=(-1,-5,3) \\ \vec{AC}=(-2,-2,2) \\ C(-1,0,0) \end{matrix} \rightarrow \vec{AB} \text{ y } \vec{AC} \text{ son independientes porque } \frac{-1}{-2}\neq\frac{-5}{-2}\neq\frac{3}{2}$$

$$\Pi(\vec{AB},\vec{AC},C) \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & -5 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \\ x+1 & y & z \end{vmatrix}=0 \rightarrow 2z-10(x+1)-6y-(-6(x+1)-2y+10z)=0$$

$$-4(x+1)-4y-8z=0 \rightarrow -4x-4y-8z-4=0 \rightarrow \Pi: x+y+2z+1=0$$

Estudiamos la posición relativa de $\Pi: x+y+2z+1=0$ y $\Pi_1: x+y+z+1=0$, resolviendo el sistema de ecuaciones que forman sus dos ecuaciones generales (otra opción sería estudiar directamente los rangos de la matriz del sistema y de la matriz ampliada).

$$\begin{Bmatrix} x+y+2z+1=0 \\ x+y+z+1=0 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Restamos ambas ecuaciones} \rightarrow z=0 \rightarrow \begin{Bmatrix} x+y+1=0 \\ x+y+1=0 \end{Bmatrix}$$

Ambas ecuaciones son idénticas, por lo que podemos obviar una → $x+y+1=0$

Tomamos una incógnita como parámetro libre → $y=\lambda \rightarrow x=-1-\lambda$

La solución del sistema resulta una recta.

$$r:\begin{cases} x=-1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{cases}$$

Ambos planos son secantes y se cortan en una recta.

b) Las coordenadas del vector normal a un plano coincide con los coeficientes A, B y C de la ecuación general del plano.

$$\Pi_1: x+y+z+1=0 \quad \rightarrow \quad \vec{u_{\Pi_1}}=(1,1,1)$$

$$\Pi_2:\begin{cases} x=-\alpha+\beta+1 \\ y=\alpha-2\beta \\ z=\alpha+\beta \end{cases} \rightarrow \text{Pasamos a general} \rightarrow \quad \Pi_2:\begin{vmatrix} -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -2 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix}=0$$

$$2z+y+(x-1)-(-2(x-1)-y+z)=0 \quad \rightarrow \quad 3(x-1)+2y+z=0$$

$$\Pi_2: 3x+2y+z-3=0 \quad \rightarrow \quad \vec{u_{\Pi_2}}=(3,2,1)$$

El coseno formado por ambos planos coincide con el coseno formado por sus vectores normales.

$$\cos(\alpha)=\left|\frac{\vec{u_{\Pi_1}}\cdot\vec{u_{\Pi_2}}}{|\vec{u_{\Pi_2}}|\cdot|\vec{u_{\Pi_1}}|}\right|=\left|\frac{(1,1,1)\cdot(3,2,1)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{14}}\right|=\frac{3+2+1}{\sqrt{42}}=\frac{6\sqrt{42}}{42}=0{,}926 \quad \rightarrow \quad \alpha=22{,}21^{o}$$

c) Por último debemos obtener la recta, en paramétricas, del corte entre los planos $\Pi_1: x+y+z+1=0$ y $\Pi_2: 3x+2y+z-3=0$, para lo cual resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{cases} 3x+2y+z-3=0 \\ x+y+z+1=0 \end{cases} \rightarrow \text{Parámetro libre} \quad z=\lambda \quad \rightarrow \quad \begin{cases} 3x+2y=3-\lambda \\ x+y=-1-\lambda \end{cases} \quad \rightarrow \quad F_2'=2F_2$$

$$\begin{cases} 3x+2y=3-\lambda \\ 2x+2y=-2-2\lambda \end{cases} \rightarrow \text{Restamos ambas ecuaciones} \rightarrow \quad x=5+\lambda$$

$$y=-1-\lambda-(5+\lambda) \quad \rightarrow \quad y=-6-2\lambda$$

La recta solución es $r:\begin{cases} x=5+\lambda \\ y=-6-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$

Hoja 4. Problema 5

5. Calcular la recta contenida en el plano $\Pi_1: x+y+z=3$ paralela al plano $\Pi_2: x=0$ y que pasa por el punto simétrico de $B(-1,1,1)$ respecto de Π_2 .

Para escribir la ecuación de la recta necesitamos un vector director de la recta y un punto de la recta.

En el enunciado queda claro que la recta pasa por el punto simétrico de $B(-1,1,1)$ respecto de Π_2 . Por lo tanto, calculemos ese punto simétrico.

Para ello tomamos el vector normal a $\Pi_2: x=0 \rightarrow \vec{u}_{\Pi:2}=(1,0,0)$ → Trazamos la recta perpendicular a Π_2 que pasa por $B(-1,1,1) \rightarrow r: \begin{Bmatrix} x=-1+t \\ y=1 \\ z=1 \end{Bmatrix}$

Obtenemos el punto de corte de r con Π_2 , sustituyendo la ecuación en paramétrica de la recta en la ecuación general del plano → $(-1+t)=0 \rightarrow t=1$ → Llevando el valor del parámetro a la recta r tendremos el punto de corte buscado → $\begin{Bmatrix} x=-1+1 \\ y=1 \\ z=1 \end{Bmatrix} \rightarrow P(0,1,1)$

Este punto de corte es el punto medio del segmento $\overline{BB'}$, siendo $B'(x,y,z)$ el punto simétrico de $B(-1,1,1)$ respecto a $\Pi_2 \rightarrow (0,1,1)=(\frac{x-1}{2},\frac{y+1}{2},\frac{z+1}{2}) \rightarrow B'(1,1,1)$ → Este punto pertenece a la recta solución de nuestro ejercicio.

Necesitamos, por último, un vector paralelo a la recta solución.

Los planos $\Pi_1: x+y+z=3$ y $\Pi_2: x=0$ no son paralelos, ya que sus ecuaciones generales no son proporcionales. Tampoco son coincientes, por lo que ambos planos se cortan en una recta. Esa recta de corte es paralela a la recta solución del ejercicio, ya que el enunciado afirma que la recta solución está contenida en $\Pi_1: x+y+z=3$ y es paralela a $\Pi_2: x=0$.

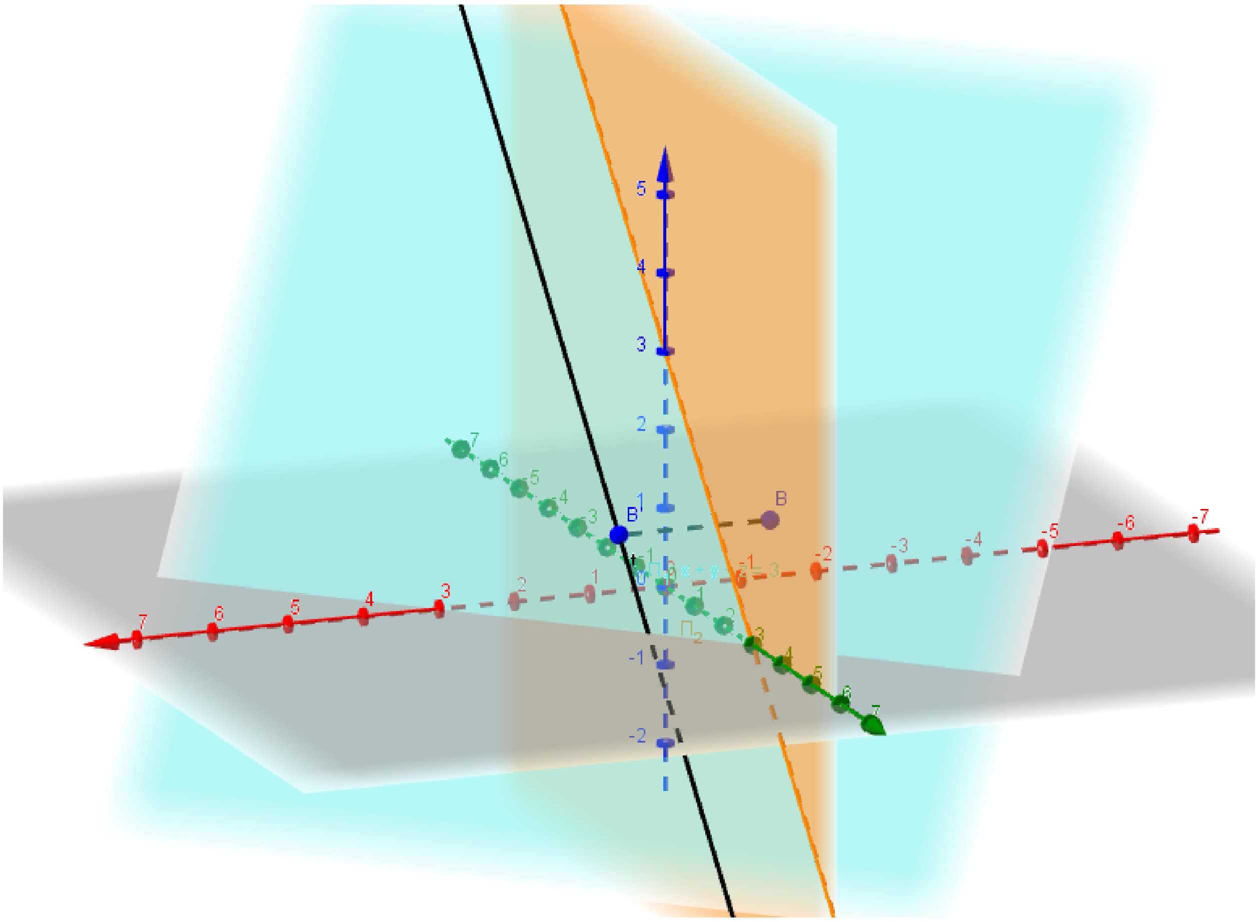
Calculemos la recta de corte de ambos plenos, sustituyendo la ecuación $\Pi_2: x=0$ en $\Pi_1: x+y+z=3$

$\rightarrow y+z=3 \rightarrow z=\lambda \rightarrow y=3-\lambda \rightarrow s: \begin{Bmatrix} x=0 \\ y=3-\lambda \\ z=\lambda \end{Bmatrix} \rightarrow \vec{u}_s=(0,-1,1)$

El vector director $\vec{u}_s=(0,-1,1)$ es paralelo a la recta solución del ejercicio. Como esta recta pasa por el punto $B'(1,1,1)$ calculado anteriormente su ecuación será:

$$t: \begin{Bmatrix} x=1 \\ y=1-\lambda \\ z=1+\lambda \end{Bmatrix}$$

Con Geogebra dibujamos los planos y la recta solución de nuestro ejercicio.


B'
B