

## Problemas – Tema 9

### Solución a problemas sobre Geometría - Hoja 02 - Problemas 1, 4

#### Hoja 2. Problema 1

1. Dados el plano  $\Pi: 2x - y = 2$  y la recta  $r: \begin{cases} x=1 \\ y-2z=2 \end{cases}$  se pide:

- Estudiar la posición relativa de la recta y el plano.
- Determinar el plano que contiene a la recta  $r$  y es perpendicular a  $\Pi$ .
- Determinar la recta que pasa por  $A(-2, 1, 0)$ , corta a  $r$  y es paralela a  $\Pi$ .

a) Estudiamos la solución del sistema formado por la ecuación general del plano y las dos ecuaciones generales de la recta.

$$\left( \begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \text{Vamos a aplicar Gauss por encima de la diagonal principal}$$

$$C_1 \leftrightarrow C_2 \text{ (al intercambiar columnas, cambian la posición de las incógnitas)} \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow$$

$$F_1' = F_1 - 2F_2 \rightarrow \left( \begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{array} \right) \rightarrow \text{De } F_1 \rightarrow -y=0 \rightarrow y=0$$

$$\text{De } F_2 \rightarrow x=1$$

$$\text{De } F_3 \rightarrow 0 - 2z = 2 \rightarrow z = -1$$

Al tener el sistema solución única, recta y plano son secantes y se cortan en el punto  $P(1, 0, -1)$ .

b) Buscamos un plano que contenga a  $r$  y sea perpendicular a  $\Pi$ .

Si contiene a  $r$ , el vector director de la recta es paralelo al plano que buscamos. Si es perpendicular a  $\Pi$ , el vector normal a  $\Pi$  es paralelo al plano que buscamos.

Calculemos ambos vectores.

Si pasamos la ecuación general de la recta a paramétrica, podremos obtener un vector director.

$$r: \begin{cases} x=1 \\ y-2z=2 \end{cases} \rightarrow z=a \rightarrow r: \begin{cases} x=1 \\ y=2+2a \\ z=a \end{cases} \rightarrow \vec{u}_r=(0,2,1)$$

De la ecuación general del plano obtenemos su vector normal.

$$\Pi: 2x-y=2 \rightarrow \vec{u}_\Pi=(2,-1,0)$$

Comprobamos que  $\vec{u}_r=(0,2,1)$  y  $\vec{u}_\Pi=(2,-1,0)$  no son proporcionales, ya que el cociente de sus componentes no lo son  $\rightarrow \frac{0}{2} \neq \frac{2}{-1} \neq \frac{1}{0}$

El punto  $P(1,0,-1)$  obtenido en el apartado a) pertenecerá al plano que estamos buscando (al contener el plano a la recta).

Con dos vectores linealmente independientes y un punto del plano, podemos escribir la ecuación paramétrica del plano.

$$\Pi: \begin{cases} x=1+2b \\ y=2a-b \\ z=-1+a \end{cases}$$

c) Debemos determinar la recta que pasa por  $A(-2,1,0)$ , corta a  $r$  y es paralela a  $\Pi$ . Llamaremos a la recta solución  $s$ .

Si  $s$  es paralela a  $\Pi$ , significa que el vector director de  $s$  es perpendicular al vector normal de  $\Pi$ , por lo que  $\vec{u}_s \cdot \vec{u}_\Pi = 0$ .

Como razonamos en el apartado b)  $\vec{u}_\Pi=(2,-1,0)$ .

El vector director de  $s$  será el vector  $\vec{AB}$ , donde  $A(-2,1,0)$  y  $B$  es un punto arbitrario de la recta  $r$ , ya que ambas rectas se cortan según el enunciado. Por lo tanto, de la ecuación paramétrica de  $r$  podemos sacar un punto arbitrario:

$$r: \begin{cases} x=1 \\ y=2+2a \\ z=a \end{cases} \rightarrow B=(1,2+2a,a) \rightarrow \vec{AB}=(3,1+2a,a) \rightarrow \vec{u}_s=\vec{AB}=(3,1+2a,a)$$

$$\vec{u}_s \cdot \vec{u}_\Pi = 0 \rightarrow (3,1+2a,a) \cdot (2,-1,0) = 0 \rightarrow 6-1-2a=0 \rightarrow a=\frac{5}{2} \rightarrow \vec{u}_s=(3,6,\frac{5}{2})$$

Si el vector director es  $\vec{u}_s=(3,6,\frac{5}{2})$  y la recta pasa por  $A(-2,1,0)$ , su ecuación paramétrica resulta:

$$s: \begin{cases} x = -2 + 3\lambda \\ y = 1 + 6\lambda \\ z = \frac{5}{2}\lambda \end{cases}$$

## Hoja 2. Problema 4

4. Consideremos los puntos  $A(2,6,-3)$  y  $B(3,3,-2)$  .

a) Halla la ecuación de la recta que contiene a ambos puntos.

b) Determina una ecuación para el plano equidistante de ambos puntos.

a) Para escribir la ecuación de una recta necesitamos un vector director de la recta y un punto de la recta.

El vector  $\vec{AB}=(1,-3,1)$  es paralelo a la recta, que además pasa por el punto  $A(2,6,-3)$  . Por lo tanto, la ecuación paramétrica resulta:

$$r: \begin{cases} x=2+a \\ y=6-3a \\ z=-3+a \end{cases}$$

b) El plano equidistante de ambos puntos pasa por el punto medio del segmento  $\overline{AB}$  . Ese punto medio será:  $C=(\frac{2+3}{2}, \frac{6+3}{2}, \frac{-3-2}{2})=(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}, -\frac{5}{2})$  .

El vector  $\vec{AB}=(1,-3,1)$  es perpendicular al plano solución. Y con un vector perpendicular al plano y un punto del plano podemos escribir su ecuación general  $Ax+By+Cz+D=0$  .

$$\Pi: x-3y+z+D=0$$

El término independiente lo sacamos sustituyendo las coordenadas del punto en la ecuación del plano.

$$\frac{5}{2}-3 \cdot \frac{9}{2}-\frac{5}{2}+D=0 \rightarrow D=\frac{27}{2} \rightarrow \Pi: x-3y+z+\frac{27}{2}=0$$