Problemas – Tema 9

Solución a problemas sobre Geometría - Hoja 10 - Problemas 1, 2

Hoja 10. Problema 1

1. Sea el punto $A(1,-2,1)$ **y la recta** $r:\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y+z=7 \end{cases}$ **.**

a) Halla la ecuación del plano perpendicular a la recta que pasa por A **.**

b) Calcula la distancia del punto A **a la recta** r **.**

a) Si el plano es perpendicular a la recta r , el vector normal del plano será paralelo al vector director de la recta.

Podemos obtener este vector director haciendo el producto vectorial de los vectores normales de los dos planos que forman la recta en su forma general.

$$r:\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y+z=7 \end{cases} \rightarrow \vec{u}=(1,1,0), \vec{v}=(2,1,1) \rightarrow \vec{u_\Pi}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\hat{i}+0+\hat{k}-(2\hat{k}+0+\hat{j})$$

$$\vec{u_\Pi}=\hat{i}-\hat{j}-\hat{k}=(1,-1,-1)$$

Si tenemos el vector director del plano, su ecuación general será → $\Pi: x-y-z+D=0$

El término independiente lo sacamos forzando que el plano pase por el punto $A(1,-2,1)$.

$$A\in\Pi \rightarrow 1+2-1+D=0 \rightarrow D=-2 \rightarrow \Pi: x-y-z-2=0$$

b) Para obtener la distancia del punto a la recta buscamos un punto arbitrario de la recta. Para ello, pasamo la recta en forma general a paramétrica.

$$r:\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y+z=7 \end{cases} \rightarrow z=\lambda \rightarrow r:\begin{cases} x+y=2 \\ 2x+y=7-\lambda \end{cases}$$ → Restamos ambas ecuaciones

$$-x=-5+\lambda \rightarrow x=5-\lambda \rightarrow y=2-x \rightarrow y=-3+\lambda \rightarrow r:\begin{cases} x=5-\lambda \\ y=-3+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$$

Un punto arbitrario de la recta será $P(5-\lambda,-3+\lambda,\lambda)$. Vamos a pedir que el vector $\vec{AP}$ sea perpendicular a la recta r . Si esto se cumple, el módulo del vector $\vec{AP}$ nos dará la distancia mínima del punto a la recta.

$$A(1,-2,1) \quad , \quad P(5-\lambda,-3+\lambda,\lambda) \quad \rightarrow \quad \vec{AP}=(4-\lambda,-1+\lambda,\lambda-1)$$
$$\vec{u}_r=(-1,1,1)$$

Los dos vectores son perpendiculares si su producto escalar es nulo.

$$\vec{AP}\cdot\vec{u}_r=0 \quad \rightarrow \quad (-4+\lambda)+(-1+\lambda)+(\lambda-1)=0 \quad \rightarrow \quad -6+3\lambda=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=2$$

Por lo tanto → $\vec{AP}=(2,1,1) \quad \rightarrow \quad d(A,r)=|\vec{AP}|=\sqrt{6}\ u$

Hoja 10. Problema 2

Sea la recta $r: mx = y = z+2$ **con** $m \neq 0$ **, y la recta** $s: \frac{x-4}{4} = y-1 = \frac{z}{2}$ **.**

a) Halla el valor de m **para que las rectas sean perpendiculares.**

b) ¿Existe algún valor de m **para el que las rectas sean paralelas?**

a) Ambas rectas serán perpendiculares si el producto escalar de sus vectores directores es nulo.

$$r: mx = y = z+2 \rightarrow r: x = \frac{y}{m} = \frac{z+2}{m} \rightarrow \vec{u}_r = (1, m, m)$$

$$s: \frac{x-4}{4} = y-1 = \frac{z}{2} \rightarrow \vec{u}_s = (4, 1, 2)$$

$$\vec{u}_r \cdot \vec{u}_s = 0 \rightarrow 4 + m + 2m = 0 \rightarrow m = \frac{-4}{3}$$

b) Ambas rectas serán paralelas si sus vectores directores son proporcionales. Es decir:

$$\frac{1}{4} = \frac{m}{1} = \frac{m}{2}$$

Si igualamos la primera y la segunda fracción → $m = \frac{1}{4}$. Pero con este valor no se cumple la igualdad entra la primera y la tercera fracción. Por lo tanto, no hay un valor de m que haga paralelas ambas rectas.