Qué elegir entre Gauss y Determinantes

Estudiar tipos de solución en sistemas que dependen de un parámetro.

Podemos aplicar Gauss o Teorema de Rouché-Frobenius.

- **Teoría de Gauss:** Tras obtener la matriz triangular por el método de Gauss, haber eliminado filas proporcionales y comprobado que no hay absurdos matemáticos, el rango del sistema coincide con el número de ecuaciones con al menos un coeficiente no nulo. Si hay absurdos, tendremos S.I. Si el rango del sistema coincide con el número de incógnitas, S.C.D. Finalmente, si el rango es menor que el número de incógnitas, S.C.I. (donde la diferencia entre número de incógnitas y rango es el número de parámetros libres).
- **Teoría de Rouché-Frobenius:** El rango de una matriz coincide con la dimensión del mayor menor no nulo. Si rango(A) no coincide con rango(A/C) el sistema no posee solución. Si ambos rangos coinciden y son iguales al número de incógnitas, tendremos S.C.D. Si ambos rangos coinciden y son menores al número de incógnitas, tendremos S.C.I. (donde la diferencia entre número de incógnitas y rango es el número de parámetros libres).

La ventaja de Gauss es que, tras obtener la matriz triangular, es muy fácil resolver el sistema. Por lo tanto, si el ejercicio pide estudiar tipos de solución y luego resolver, Gauss será la opción preferente.

Recuerda que, en sistemas, vamos a obtener ceros por debajo de la diagonal principal, ya que en Gauss nos interesa conocer el número de ecuaciones con al menos un coeficiente no nulo en la matriz triangular. Y las ecuaciones coinciden con las filas.

Si empleamos Rouché-Frobenius, primero realizamos el determinante de la matriz A para determinar su rango. Y con los valores de la discusión de casos que obtengamos, estudiaremos el rango de A/C.

Si el sistema no tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas, la matriz A no será cuadrada. Por lo tanto, para estudiar el rango de A, tendremos que estudiar varios menores. Por ejemplo, si la matriz A es 3x2 (porque hay 3 ecuaciones y 2 filas), el rango máximo de A será 2, y tendremos que estudiar los tres menores de orden 2 que hay dentro de A. Cada uno de esos menores generarán sus respectivos valores para la discusión de casos que plantearemos para obtener el rango de A/C.

Si tras aplicar Rouché-Frobenius nos piden resolver cuando sea S.C.D. siempre podemos recurrir a la regla de Cramer.

Resumiendo: usar Gauss, sobre todo si hay más ecuaciones que incógnitas, si más incógnitas que ecuaciones, o bien si nos piden al final del ejercicio resolver el sistema.

Determinar el rango de una matriz en función de un parámetro, o bien el número de vectores linealmente independientes.

- **Teoría de Gauss:** La misma que la desarrollada en el apartado anterior de sistemas, pero sin nombrar las palabras "sistemas", "ecuaciones" ni "absurdos matemáticos". Como no es un sistema, no tiene sentido hablar de S.I., S.C.D. O S.C.I.
- **Teoría de rango con Determinantes:** El rango de una matriz coincide con la dimensión del mayor menor no nulo.

Si la matriz es cuadrada, emplear determinantes suele ser más corto para obtener los valores de la discusión de casos. Recuerda que, si al resolver el determinante sale un polinomio en función del parámetro libre difícil de factorizar por Rufinni, siempre podemos previamente hacer algunos coeficientes nulos en el determinante de partida, o bien podemos optar por Gauss.

Si la matriz es rectangular, es mejor usar Gauss para no tener que estar estudiando varios menores dentro de la matriz de partida. Como estamos más acostumbrados a obtener ceros por debajo de la diagonal principal, si la matriz posee más filas que columnas es interesante decir que el rango de A coincide con el rango de su traspuesta, y aplicaremos Gauss sobre la traspuesta (siendo el total de filas de la matriz triangular con al menos un coeficiente no nulo, el valor del rango)

Resumiendo: emplear determinantes en matrices cuadradas y Gauss en matrices rectangulares.

Decidir si existe inversa en función de un parámetro.

Como solo las matrices cuadradas pueden admitir inversa, usaremos preferentemente determinantes para obtener los valores de la discusión de casos. Si el determinante vale cero no hay inversa, y si es distinto de cero sí hay inversa.

Como dijimos en el caso anterior sobre rango, si al resolver el determinante sale un polinomio en función del parámetro libre difícil de factorizar por Rufinni, siempre podemos previamente hacer algunos coeficientes nulos en el determinante de partida, o bien podemos optar por Gauss.

Si optamos por Gauss, debemos recordar que existe inversa si el rango de la matriz coincide con la dimensión de la matriz cuadrada.

Obtener la inversa

Si la matriz es de orden dos, aplicaremos método directo.

Si es de orden tres, prácticamente se tarda el mismo tiempo en aplicar Gauss-Jordan que en aplicar la definición de inversa como la matriz traspuesta de adjuntos dividida por el determinante de la matriz.