Teoría – Tema 8

¿Qué es un determinante?

Es un número asociado a una matriz cuadrada.

¿Cómo se calcula el determinante de una matriz cuadrada?

Si la matriz es de orden uno, el determinante coincide con el único coeficiente de la matriz.

Si la matriz es de orden dos, el determinante coincide con el producto de los coeficientes de la diagonal principal menos el producto de los coeficientes de la diagonal secundaria.

Si la matriz es de orden tres, se aplica la regla de Sarrus para obtener su determinante.

Si la matriz es de orden cuatro o superior, veremos más adelante cómo calcular su determinante.

Determinante y existencia de inversa

Una matriz cuadrada admite inversa si su determinante es distinto de cero.

Ejemplos: Determina si las siguientes matrices admiten inversa, aplicando el método de Gauss y aplicando determinantes. ¿Cuál es "mejor" de los dos métodos?

a) $A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 7 & 7 & -10 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & k \end{pmatrix}$

Determinante y vectores linealmente independientes

Un conjunto de n-vectores con n-componentes son linealmente independientes, si la matriz cuadrada que forman tiene determinante no nulo.

Ejemplos: ¿Son linealmente independientes los siguientes vectores?

a) $\vec{u}=(1,7)$, $\vec{v}=(k,-10)$

b) $\vec{u}=(1,0,1)$, $\vec{v}=(4,6,0)$ y $\vec{w}=(5,6,k)$

Determinantes para resolver Sistemas Compatibles Determinados: regla de Cramer (parte 1 de 3)

Dado un S.C.D. de n-ecuaciones y n-incógnitas, podemos resolverlo aplicando la regla de Cramer.

$$\begin{cases} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=c_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=c_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=c_3 \end{cases}$$

$$AX=C \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Determinantes para resolver Sistemas Compatibles Determinados: regla de Cramer (parte 2 de 3)

$$x \equiv x_1 = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} c_1 & a_{12} & a_{13} \\ c_2 & a_{22} & a_{23} \\ c_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$y \equiv x_2 = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & c_1 & a_{13} \\ a_{21} & c_2 & a_{23} \\ a_{31} & c_3 & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$z \equiv x_3 = \frac{1}{|A|} \cdot \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & c_3 \end{vmatrix}$$

Determinantes para resolver Sistemas Compatibles Determinados: regla de Cramer (parte 3 de 3)

Ejemplos: Aplica Cramer en los siguientes S.C.D.

a) $\begin{cases} 2x+y+3z=1 \\ -2x+y+3z=-2 \\ 4x+6y-z=4 \end{cases}$

b) Si $a \neq \pm 2$ el sistema $\begin{cases} 2x+y+az=-1 \\ -x+ay-z=2 \\ 2ax-2y+a^2 z=2 \end{cases}$ es S.C.D.

c) $\begin{cases} x+y+z-t=1 \\ 2x-y+z=2 \\ x-y+z+t=1 \end{cases}$ es SCI con un parámetro libre.

Concepto de menor

Un menor es el determinante de una submatriz cuadrada.

Determinante y rango (parte 1 de 2)

Sabemos que una matriz de orden n, como máximo, tiene rango n. Y también sabemos que el rango coincide con el número de vectores linealmente independientes.

Los determinantes nos facilitan, de nuevo, ciertos cálculos. Podemos definir **rango como la dimensión del mayor menor no nulo.**

Es decir. Si tenemos una matriz de orden 3, calculamos su determinante. Si es distinto de cero, el rango vale 3. Si el determinante es cero, buscamos un menor de orden 2 no nulo para confirmar si su rango es 2. Y así sucesivamente.

Determinante y rango (parte 2 de 2)

Ejemplos: Determinar el rango de las siguientes matrices.

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & k \end{pmatrix}$