

Teoría – Tema 8

Teorema de Rouché-Frobenius

Índice de contenido

Teorema de Rouché-Frobenius.....	2
Ejemplos.....	3

Teorema de Rouché-Frobenius

Sea el siguiente sistema de ecuaciones 3×3 (por lo general, m filas y n ecuaciones).

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = c_1 \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = c_2 \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = c_3 \end{cases} \rightarrow AX = C \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Llamamos matriz del sistema a la matriz de coeficientes que acompañan a las incógnitas.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \rightarrow \text{Matriz del sistema}$$

Llamamos matriz ampliada del sistema a la matriz a la matriz de coeficientes a la que añadimos la columna de términos independientes.

$$A/C = \left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \end{array} \right) \rightarrow \text{Matriz ampliada}$$

Un sistema de ecuaciones $m \times n$ tiene solución si y solo si el rango de la matriz del sistema A es igual al rango de la matriz ampliada del sistema A/C . Es decir:

$$\text{Existe solución} \Leftrightarrow \text{rango}(A) = \text{rango}(A/C)$$

Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A/C) = n$ (número de incógnitas) \rightarrow Solución única \rightarrow **Sistema Compatible Determinado (SCD)**.

Si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A/C) < n$ (número de incógnitas) \rightarrow Infinitas soluciones \rightarrow **Sistema Compatible Indeterminado (SCI)** \rightarrow La diferencia $n - \text{rango}(A)$ coincide con el número de parámetros libre.

Si $\text{rango}(A) \neq \text{rango}(A/C)$ \rightarrow No hay solución \rightarrow **Sistema Incompatible (SI)**.

El rango de una matriz coincide con la dimensión del mayor menor no nulo.

Ejemplos

1. Estudiar las posibles soluciones del sistema
$$\begin{cases} x+y+z-t=1 \\ 2x-y+z=2 \\ x-y+z+t=1 \end{cases}$$

Estamos ante un sistema de 3 ecuaciones y 4 incógnitas.

La matriz del sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Matriz } 3 \times 4 \rightarrow \text{Su rango máximo será 3}$$

La matriz ampliada es:

$$A/C = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \text{Matriz } 3 \times 5 . \text{ Su rango máximo será 3}$$

Vamos a estudiar el rango de ambas matrices.

Buscamos en A si existe un menor de orden 3 no nulo. Por ejemplo:

$$|C_1 C_2 C_3| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 \neq 0 \rightarrow \text{rango}(A) = 3$$

Si $\text{rango}(A) = 3$ implica necesariamente que $\text{rango}(A/C) = 3$, ya que el menor $|C_1 C_2 C_3|$ también está incluido en la matriz ampliada A/C . Por lo tanto:

$$\text{rango}(A) = \text{rango}(A/C) = 3 < 4 (\text{número de incógnitas}) \rightarrow \text{SCI con un parámetro libre.}$$

2. Estudiar las posibles soluciones del sistema $\begin{cases} x-2y-z=-1 \\ ax-y+2z=2 \\ x+2y+az=3 \end{cases}$ en función de a .

Estamos ante un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas.

La matriz del sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ a & -1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix} \rightarrow \text{Matriz } 3 \times 3 \rightarrow \text{Su rango máximo será 3}$$

La matriz ampliada es:

$$A/C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ a & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & a & 3 \end{array} \right) \rightarrow \text{Matriz } 3 \times 4. \text{ Su rango máximo será 3}$$

Vamos a estudiar el rango de ambas matrices.

Buscamos en A si existe un menor de orden 3 no nulo. Por ejemplo:

$$|C_1 C_2 C_3| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ a & -1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix} = -a - 4 - 2a - (1 + 4 - 2a^2) = 2a^2 - 3a - 9$$

Si $2a^2 - 3a - 9 \neq 0 \rightarrow \text{rango}(A) = \text{rango}(A/C) = 3$ (número de incógnitas) \rightarrow Si $a \neq 3$ y $a \neq \frac{-3}{2}$ el **Sistema es Compatible Determinado (solución única)**.

Si $2a^2 - 3a - 9 = 0 \rightarrow a = 3$ o $a \neq \frac{-3}{2} \rightarrow \text{rango}(A) \neq 3 \rightarrow$ Estudiamos el rango de la matriz ampliada A/C .

Si $a=3 \rightarrow A/C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{array} \right) \rightarrow$ Ya sabemos que $|C_1 C_2 C_3|=0$. Estudiamos si existe otro menor de orden 3 con determinante no nulo.

$$|C_1 C_2 C_4| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad |C_1 C_3 C_4| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0, \quad |C_2 C_3 C_4| = \begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix} = 0$$

Por lo tanto el $\text{rango}(A/C) \neq 3$.

Busquemos un menor de orden 2 no nulo $\rightarrow \begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -5 \neq 0 \rightarrow$
 $\text{rango}(A/C) = 2 = \text{rango}(A) < 3$ (número de incógnitas) \rightarrow Si $a=3$ **Sistema Compatible Indeterminado con un parámetro libre (infinitas soluciones).**

Si $a = \frac{-3}{2} \rightarrow A/C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ -3/2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -3/2 & 3 \end{array} \right) \rightarrow$ Ya sabemos que $|C_1 C_2 C_3|=0$.

Estudiamos si existe otro menor de orden 3 con determinante no nulo.

$$|C_1 C_2 C_4| = \begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3/2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3 - 4 + 3 - (1 + 4 + 9) = -4 - 14 = -18 \neq 0 \rightarrow$$

Por lo tanto el rango de la matriz ampliada resulta $\text{rango}(A/C) = 3 \neq \text{rango}(A) \rightarrow$ Si $a = \frac{-3}{2}$ **Sistema Incompatible (no existe solución).**

Resumen del estudio:

- ▶ Si $a \neq 3$ y $a \neq \frac{-3}{2}$ el Sistema es Compatible Determinado (solución única).
- ▶ Si $a = 3$ Sistema Compatible Indeterminado con un parámetro libre (infinitas soluciones).
- ▶ Si $a = \frac{-3}{2}$ Sistema Incompatible (no existe solución).

3. Estudiar las posibles soluciones del sistema $\begin{cases} (a-1)x+(a+2)y=5 \\ (1-a)x+(-1-a)y+2z=-4 \\ y+(a^2+a)z=2-a \end{cases}$ en función de a y resolver cuando sea compatible.

Estamos ante un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas.

La matriz del sistema es:

$$A = \begin{pmatrix} a-1 & a+2 & 0 \\ 1-a & -1-a & 2 \\ 0 & 1 & a^2+a \end{pmatrix} \rightarrow \text{Matriz } 3 \times 3 \rightarrow \text{Su rango máximo será 3}$$

La matriz ampliada es:

$$A/C = \left(\begin{array}{ccc|c} a-1 & a+2 & 0 & 5 \\ 1-a & -1-a & 2 & -4 \\ 0 & 1 & a^2+a & 2-a \end{array} \right) \rightarrow \text{Matriz } 3 \times 4 \text{ . Su rango máximo será 3}$$

Vamos a estudiar el rango de ambas matrices.

Buscamos en A si existe un menor de orden 3 no nulo. Para ello, antes de aplicar Sarrus, vamos a aplicar transformaciones lineales en $|A|$ para simplificar el resultado final.

$$|C_1 C_2 C_3| = \begin{vmatrix} a-1 & a+2 & 0 \\ 1-a & -1-a & 2 \\ 0 & 1 & a^2+a \end{vmatrix} \rightarrow F_2' = F_2 + F_1 \rightarrow \begin{vmatrix} a-1 & a+2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a^2+a \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$F_3' = F_3 - F_2 \rightarrow \begin{vmatrix} a-1 & a+2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a^2+a-2 \end{vmatrix} = (a-1)(a^2+a-2) = (a-1)^2(a+2)$$

Si $(a-1)(a^2+a-2) \neq 0 \rightarrow a \neq 1$ y $a \neq -2 \rightarrow$

$\rightarrow \text{rango}(A) = \text{rango}(A/C) = 3$ (número de incógnitas) \rightarrow **Solución única (Sistema Compatible Determinado).**

$$\text{Si } a=1 \rightarrow A/C = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow |C_2 C_3 C_4| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -2 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow \text{rango}(A/C) \neq 3$$

$\rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -6 \neq 0 \rightarrow \text{rango}(A) = \text{rango}(A/C) = 2 < 3 (\text{número de incógnitas}) \rightarrow$ **Infinitas soluciones (Sistema Compatible indeterminado con un parámetro libre).**

$$\text{Si } a=-2 \rightarrow A/C = \left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array} \right) \rightarrow |C_1 C_2 C_4| = \begin{vmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = -9 \neq 0 \rightarrow$$

$\rightarrow \text{rango}(A/C) = 3 \neq \text{rango}(A) \rightarrow$ **No hay solución (Sistema Incompatible).** Resumen:

- ▶ Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ SCD (solución única).
- ▶ Si $a=1$ SCI con un parámetro libre (infinitas soluciones).
- ▶ Si $a=-2$ SI (no existe solución).

Si $a \neq 1$ y $a \neq -2$ resolvemos el SCD por Cramer para practicar. Pero en este caso sería más eficiente aplicar el método de Gauss, al ser los determinantes largos de operar.

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 5 & a+2 & 0 \\ -4 & -1-a & 2 \\ 2-a & 1 & a^2+a \end{vmatrix}}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{-(a-1)^2(a+2)}{(a-1)^2(a+2)} = -1$$

$$y = \frac{\begin{vmatrix} a-1 & 5 & 0 \\ 1-a & -4 & 2 \\ 0 & 2-a & a^2+a \end{vmatrix}}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{(a-1)^2(a+4)}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{a+4}{a+2}$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} a-1 & a+2 & 5 \\ 1-a & -1-a & -4 \\ 0 & 1 & 2-a \end{vmatrix}}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{-(a-1)^2}{(a-1)^2(a+2)} = \frac{-1}{a+2}$$

Si $a=1 \rightarrow A/C = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow$ Consideramos $x=\lambda$ como parámetro libre, por lo que tendremos un sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas, donde la tercera fila es

suma de las dos primeras $\rightarrow A/C = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 5 \\ -2 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{array} \right) \rightarrow A/C = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 5 \\ -2 & 2 & -4 \end{array} \right) \rightarrow \text{Resolvemos}$

\rightarrow De la primera fila $3y=5 \rightarrow y=\frac{5}{3} \rightarrow$ Llevamos este resultado a la segunda fila \rightarrow

$$-2\left(\frac{5}{3}\right)+2z=-4 \rightarrow z=\frac{-1}{3}$$