Teoría – Tema 8

Teorema de Rouché-Frobenius

Índice de contenido

Teorema de Rouché-Frobenius

Sea el siguiente sistema de ecuaciones 3×3 (por lo general, m filas y n ecuaciones).

$$\begin{Bmatrix} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=c_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=c_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=c_3 \end{Bmatrix} \rightarrow \quad AX=C \quad \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$$

Llamamos matriz del sistema a la matriz de coeficientes que acompañan a las incógnitas.

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$ → **Matriz del sistema**

Llamamos matriz ampliada del sistema a la matriz a la matriz de coeficientes a la que añadimos la columna de términos independientes.

$$A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \end{array}\right)$$ → **Matriz ampliada**

Un sistema de ecuaciones $m\times n$ tiene solución si y solo si el rango de la matriz del sistema A es igual al rango de la matriz ampliada del sistema A/C. Es decir:

$$Existe\ solución \Leftrightarrow rango(A)=rango(A/C)$$

Si $rango(A)=rango(A/C)=n(número\ de\ incógnitas)$ → Solución única → **Sistema Compatible Determinado (SCD)**.

Si $rango(A)=rango(A/C)<n(número\ de\ incógnitas)$ → Infinitas soluciones → **Sistema Compatible Indeterminado (SCI)** → La diferencia $n-rango(A)$ coincide con el número de parámetros libre.

Si $rango(A)\neq rango(A/C)$ → No hay solución → **Sistema Incompatible (SI)**.

El rango de una matriz coincide con la dimensión del mayor menor no nulo.

Ejemplos

1. Estudiar las posibles soluciones del sistema $\left\{\begin{matrix} x+y+z-t=1 \\ 2x-y+z=2 \\ x-y+z+t=1 \end{matrix}\right\}$

Estamos ante un sistema de 3 ecuaciones y 4 incógnitas.

La matriz del sistema es:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$ → Matriz 3×4 → Su rango máximo será 3

La matriz ampliada es:

$$A/C=\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$ → Matriz 3×5 . Su rango máximo será 3

Vamos a estudiar el rango de ambas matrices.

Buscamos en A si existe un menor de orden 3 no nulo. Por ejemplo:

$$|C_1C_2C_3|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-2\neq 0 \quad \rightarrow \quad rango(A)=3$$

Si $rango(A)=3$ implica necesariamente que $rango(A/C)=3$, ya que el menor $|C_1C_2C_3|$ también está incluido en la matriz ampliada A/C . Por lo tanto:

$rango(A)=rango(A/C)=3<4(número\ de\ incógnitas)$ → SCI con un parámetro libre.

2. Estudiar las posibles soluciones del sistema $\left\{\begin{array}{l} x-2y-z=-1 \\ ax-y+2z=2 \\ x+2y+az=3 \end{array}\right\}$ en función de a .

Estamos ante un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas.
La matriz del sistema es:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ a & -1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$ → Matriz 3×3 → Su rango máximo será 3

La matriz ampliada es:

$$A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ a & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & a & 3 \end{array}\right)$$ → Matriz 3×4 . Su rango máximo será 3

Vamos a estudiar el rango de ambas matrices.
Buscamos en A si existe un menor de orden 3 no nulo. Por ejemplo:

$$|C_1C_2C_3|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ a & -1 & 2 \\ 1 & 2 & a \end{vmatrix}=-a-4-2a-(1+4-2a^2)=2a^2-3a-9$$

Si $2a^2-3a-9\neq0$ → $rango(A)=rango(A/C)=3(número\,de\,incógnitas)$ → Si $a\neq3$ y $a\neq\frac{-3}{2}$ el **Sistema es Compatible Determinado (solución única)**.

Si $2a^2-3a-9=0$ → $a=3$ o $a\neq\frac{-3}{2}$ → $rango(A)\neq3$ → Estudiamos el rango de la matriz ampliada A/C .

Si $a=3$ → $A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ 3 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{array}\right)$ → Ya sabemos que $|C_1C_2C_3|=0$. Estudiamos si existe otro menor de orden 3 con determinante no nulo.

$$|C_1C_2C_4|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=0 \quad , \quad |C_1C_3C_4|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 3 \end{vmatrix}=0 \quad , \quad |C_2C_3C_4|=\begin{vmatrix} -2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}=0$$

Por lo tanto el $rango(A/C)\neq 3$.

Busquemos un menor de orden 2 no nulo → $\begin{vmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=-5\neq 0$ → $rango(A/C)=2=rango(A)<3(número\ de\ incógnitas)$ → Si $a=3$ **Sistema Compatible Indeterminado con un parámetro libre (infinitas soluciones)**.

Si $a=\frac{-3}{2}$ → $A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & -1 & -1 \\ -3/2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & -3/2 & 3 \end{array}\right)$ → Ya sabemos que $|C_1C_2C_3|=0$. Estudiamos si existe otro menor de orden 3 con determinante no nulo.

$|C_1C_2C_4|=\begin{vmatrix} 1 & -2 & -1 \\ -3/2 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}=-3-4+3-(1+4+9)=-4-14=-18\neq 0$ → Por lo tanto el rango de la matriz ampliada resulta $rango(A/C)=3\neq rango(A)$ → Si $a=\frac{-3}{2}$ **Sistema Incompatible (no existe solución)**.

Resumen del estudio:

► Si $a\neq 3$ y $a\neq\frac{-3}{2}$ el Sistema es Compatible Determinado (solución única).

► Si $a=3$ Sistema Compatible Indeterminado con un parámetro libre (infinitas soluciones).

► Si $a=\frac{-3}{2}$ Sistema Incompatible (no existe solución).

3. Estudiar las posibles soluciones del sistema $\begin{cases} (a-1)x+(a+2)y=5 \\ (1-a)x+(-1-a)y+2z=-4 \\ y+(a^2+a)z=2-a \end{cases}$ en función de a y resolver cuando sea compatible.

Estamos ante un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas.
La matriz del sistema es:

$$A=\begin{pmatrix} a-1 & a+2 & 0 \\ 1-a & -1-a & 2 \\ 0 & 1 & a^2+a \end{pmatrix}$$ → Matriz 3×3 → Su rango máximo será 3

La matriz ampliada es:

$$A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} a-1 & a+2 & 0 & 5 \\ 1-a & -1-a & 2 & -4 \\ 0 & 1 & a^2+a & 2-a \end{array}\right)$$ → Matriz 3×4 . Su rango máximo será 3

Vamos a estudiar el rango de ambas matrices.

Buscamos en A si existe un menor de orden 3 no nulo. Para ello, antes de aplicar Sarrus, vamos a aplicar transformaciones lineales en $|A|$ para simplificar el resultado final.

$$|C_1C_2C_3|=\begin{vmatrix} a-1 & a+2 & 0 \\ 1-a & -1-a & 2 \\ 0 & 1 & a^2+a \end{vmatrix} \rightarrow F_2'=F_2+F_1 \rightarrow \begin{vmatrix} a-1 & a+2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & a^2+a \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$F_3'=F_3-F_2 \rightarrow \begin{vmatrix} a-1 & a+2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & a^2+a-2 \end{vmatrix}=(a-1)(a^2+a-2)=(a-1)^2(a+2)$$

Si $(a-1)(a^2+a-2)\neq 0 \rightarrow a\neq 1$ y $a\neq -2 \rightarrow$

$\rightarrow$ $rango(A)=rango(A/C)=3(número\,de\,incógnitas)$ $\rightarrow$ **Solución única (Sistema Compatible Determinado)**.

Si $a=1 \rightarrow A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right) \rightarrow |C_2 C_3 C_4|=\begin{vmatrix} 3 & 0 & 5 \\ -2 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow rango(A/C)\neq 3$

$\rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}=-6\neq 0 \rightarrow rango(A)=rango(A/C)=2<3(número\, de\, incógnitas) \rightarrow$ **Infinitas soluciones (Sistema Compatible indeterminado con un parámetro libre).**

Si $a=-2 \rightarrow A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} -3 & 0 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \rightarrow |C_1 C_2 C_4|=\begin{vmatrix} -3 & 0 & 5 \\ 3 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}=-9\neq 0 \rightarrow$

$\rightarrow rango(A/C)=3\neq rango(A)$ → **No hay solución (Sistema Incompatible)**. Resumen:

► Si $a\neq 1$ y $a\neq -2$ SCD (solución única).
► Si $a=1$ SCI con un parámetro libre (infinitas soluciones).
► Si $a=-2$ SI (no existe solución).

Si $a\neq 1$ y $a\neq -2$ resolvemos el SCD por Cramer para practicar. Pero en este caso sería más eficiente aplicar el método de Gauss, al ser los determinantes largos de operar.

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 5 & a+2 & 0 \\ -4 & -1-a & 2 \\ 2-a & 1 & a^2+a \end{vmatrix}}{(a-1)^2(a+2)}=\frac{-(a-1)^2(a+2)}{(a-1)^2(a+2)}=-1$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} a-1 & 5 & 0 \\ 1-a & -4 & 2 \\ 0 & 2-a & a^2+a \end{vmatrix}}{(a-1)^2(a+2)}=\frac{(a-1)^2(a+4)}{(a-1)^2(a+2)}=\frac{a+4}{a+2}$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} a-1 & a+2 & 5 \\ 1-a & -1-a & -4 \\ 0 & 1 & 2-a \end{vmatrix}}{(a-1)^2(a+2)}=\frac{-(a-1)^2}{(a-1)^2(a+2)}=\frac{-1}{a+2}$$

Si $a=1 \rightarrow A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & -2 & 2 & -4 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$ → Consideramos $x=\lambda$ como parámetro libre, por lo que tendremos un sistema de tres ecuaciones y dos incógnitas, donde la tercera fila es suma de las dos primeras → $A/C=\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 5 \\ -2 & 2 & -4 \\ 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$ → $A/C=\left(\begin{array}{cc|c} 3 & 0 & 5 \\ -2 & 2 & -4 \end{array}\right)$ → Resolvemos → De la primera fila $3y=5$ → $y=\frac{5}{3}$ → Llevamos este resultado a la segunda fila → $-2(\frac{5}{3})+2z=-4$ → $z=\frac{-1}{3}$