Teoría – Tema 8

Inversa de una matriz

Índice de contenido

Inversa de una matriz a partir de su determinante

Toda matriz cuadrada A de orden n admite inversa si y solo si $|A|\neq 0$.

La forma de la matriz inversa podemos obtenerla de la siguiente forma:

$$A^{-1}=\frac{[adj(A)]^t}{|A|}$$

Es decir, calculamos la matriz de adjuntos de A , la transponemos y dividimos cada uno de sus coeficientes por el determinante $|A|$ … y Abracadabra... tenemos la matriz inversa.

Es una pena no tener tiempo para estudiar la demostración... el dichoso temario y la falta de tiempo nos apremian... así que usaremos directamente el resultado.

Ejemplos

1. Obtener la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculamos los nueve adjuntos asociados a los nueve coeficiencientes de la matriz. Recuerda que, en una matriz cuadrada, el adjunto A_{ij} se define como $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot|\alpha_{ij}|$, donde $|\alpha_{ij}|$ es el menor complementario asociado al coeficiente de la fila i y la columna j .

$|\alpha_{11}|=-1 \rightarrow A_{11}=(-1)^2\cdot(-1)=-1$

$|\alpha_{12}|=0 \rightarrow A_{12}=0$

$|\alpha_{13}|=-1 \rightarrow A_{13}=(-1)^4\cdot(-1)=-1$

$|\alpha_{21}|=-1 \rightarrow A_{21}=(-1)^3\cdot(-1)=1$

$|\alpha_{22}|=-1 \rightarrow A_{22}=(-1)^4\cdot(-1)=-1$

$|\alpha_{23}|=1 \rightarrow A_{23}=(-1)^5\cdot 1=-1$

$|\alpha_{31}|=0 \rightarrow A_{31}=0$

$|\alpha_{32}|=0 \rightarrow A_{32}=0$

$|\alpha_{33}|=1 \rightarrow A_{23}=(-1)^5\cdot 1=1$

Por lo tanto → $adj(A)=\begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Trasponemos la matriz de adjuntos → $[adj(A)]^t=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

Obtenemos el determinante de la matriz de partida → $|A|=-1$

Dividimos cada coeficiente de $[adj(A)]^t$ por $|A|=-1$

$$A^{-1}=\frac{[adj(A)]^t}{|A|}=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

En efecto, podemos comprobar:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&2&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$
$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&0\\1&1&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\1&2&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

2. Obtener la matriz inversa de $B=\begin{pmatrix}2&3&1\\4&3&2\\1&2&3\end{pmatrix}$.

$|\alpha_{11}|=5 \rightarrow B_{11}=(-1)^2\cdot 5=5$

$|\alpha_{12}|=10 \rightarrow B_{12}=(-1)^3\cdot 10=-10$

$|\alpha_{13}|=5 \rightarrow B_{13}=(-1)^4\cdot 5=5$

$|\alpha_{21}|=7 \rightarrow B_{21}=(-1)^3\cdot 7=-7$

$|\alpha_{22}|=5 \rightarrow B_{22}=(-1)^4\cdot 5=5$

$|\alpha_{23}|=1 \rightarrow A_{23}=(-1)^5\cdot 1=-1$

$|\alpha_{31}|=3 \rightarrow B_{31}=(-1)^4\cdot 3=3$

$|\alpha_{32}|=0 \rightarrow B_{32}=0$

$|\alpha_{33}|=-6 \rightarrow B_{33}=(-1)^6\cdot(-6)=-6$

Por lo tanto → $adj(B)=\begin{pmatrix}5&-10&5\\-7&5&-1\\3&0&-6\end{pmatrix}$

Trasponemos la matriz de adjuntos → $[adj(B)]^t=\begin{pmatrix}5&-7&3\\-10&5&0\\5&-1&-6\end{pmatrix}$

Obtenemos el determinante de la matriz de partida → $|B|=-15$

Dividimos cada coeficiente de $[adj(B)]^t$ por $|B|=-15$

Y la matriz inversa resulta → $B^{-1}=\frac{[adj(B)]^t}{|B|}=\begin{pmatrix} \frac{-1}{3} & \frac{7}{15} & \frac{-1}{5} \\ \frac{2}{3} & \frac{-1}{3} & 0 \\ \frac{-1}{3} & \frac{1}{15} & \frac{2}{5} \end{pmatrix}$

Donde podemos comprobar la definición de matriz inversa:

$$B\cdot B^{-1}=B^{-1}\cdot B=I$$