

## **Teoría – Tema 8**

### **Determinante de matrices de orden superior a 3**

#### **Índice de contenido**

Submatriz complementaria y menor complementario.....	2
Adjunto y matriz adjunta.....	3
Desarrollo de un determinante por los adjuntos de una línea.....	4

## Submatriz complementaria y menor complementario

Si en una matriz cuadrada  $A$  de orden  $n$  obtenemos una submatriz cuadrada de orden  $n-1$ , diremos que estamos ante una submatriz complementaria.

La nomenclatura  $\alpha_{ij}$  indica la submatriz complementaria resultante de suprimir en la matriz de partida  $A$  la fila  $i$  y la columna  $j$ .

Un ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix}, \quad \alpha_{23} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Al determinante de cada submatriz complementaria  $\alpha_{ij}$  lo llamaremos menor complementario  $|\alpha_{ij}|$ .

Del ejemplo anterior:

$$\alpha_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow |\alpha_{11}| = 6$$

$$\alpha_{23} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |\alpha_{23}| = -8$$

## Adjunto y matriz adjunta

El adjunto  $A_{ij}$  es un número real asociado al menor complementario  $|\alpha_{ij}|$ , y se calcula según la relación:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} |\alpha_{ij}|$$

Veamos un ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\alpha_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow |\alpha_{11}| = 6 \rightarrow A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot |\alpha_{11}| = 6$$

$$\alpha_{23} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |\alpha_{23}| = -8 \rightarrow A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot |\alpha_{23}| = (-1) \cdot (-8) = 8$$

Si sustituimos cada coeficiente de la matriz  $A$  por su adjunto correspondiente, tendremos la matriz adjunta, que se denota  $adj(A)$ . Veamos un ejemplo.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow adj(A) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$|\alpha_{11}| = -1 \rightarrow A_{11} = (-1)^2 \cdot (-1) = -1$$

$$|\alpha_{12}| = 0 \rightarrow A_{12} = 0$$

$$|\alpha_{13}| = -1 \rightarrow A_{13} = (-1)^4 \cdot (-1) = -1$$

$$|\alpha_{21}| = -1 \rightarrow A_{21} = (-1)^3 \cdot (-1) = 1$$

$$|\alpha_{22}| = -1 \rightarrow A_{22} = (-1)^4 \cdot (-1) = -1$$

$$|\alpha_{23}| = 1 \rightarrow A_{23} = (-1)^5 \cdot 1 = -1$$

$$|\alpha_{31}| = 0 \rightarrow A_{31} = 0$$

$$|\alpha_{32}| = 0 \rightarrow A_{32} = 0$$

$$|\alpha_{33}| = 1 \rightarrow A_{33} = (-1)^6 \cdot 1 = 1$$

## Desarrollo de un determinante por los adjuntos de una línea

El determinante de una matriz cuadrada de orden  $n$  es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea por sus respectivos adjuntos.

Por lo tanto, es práctico desarrollar un determinante a partir de una línea que contenga el mayor número de 0 posibles.

Veamos ejemplos.

$$1. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Desarrollo por } F_2 \rightarrow |A| = 0 \cdot A_{21} + 1 \cdot A_{22} + 0 \cdot A_{23}$$

$$A_{22} = (-1)^4 \cdot (-1) = -1 \rightarrow |A| = -1$$

$$2. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} \rightarrow F_3' = F_3 - 3F_1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \text{Desarrollo por } C_1 \rightarrow |A| = 1 \cdot A_{11} + 0 \cdot A_{21} + 0 \cdot A_{31} + 0 \cdot A_{41}$$

$$A_{11} = (-1)^2 \cdot \begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 20 \rightarrow |A| = 20$$

$$3. \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow F_2' = F_2 - F_1, \quad F_3' = F_3 - F_1 \rightarrow$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Desarrollo por } C_4 \rightarrow |A| = 1 \cdot A_{14} + 0 \cdot A_{24} + 0 \cdot A_{34} + 0 \cdot A_{44}$$

$$A_{14} = (-1)^5 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1 \cdot (1) = -1 \rightarrow |A| = -1$$

$$4. \quad A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & -2 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$|A| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & -2 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow F_3' = F_3 - 2F_2 \rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Desarrollo}$$

por  $C_4 \rightarrow |A| = -1 \cdot A_{25} = -(-1)^{2+5} \cdot |\alpha_{25}| = |\alpha_{25}|$

$$|\alpha_{25}| = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow C_2' = C_2 + 7C_3 \rightarrow |\alpha_{25}| = \begin{vmatrix} -2 & 29 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 14 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow \text{Desarrollo por}$$

$$F_2 \rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 29 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 14 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot |\alpha_{23}| = - \begin{vmatrix} -2 & 29 & 0 \\ 5 & 14 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix} = 136 \rightarrow |A| = 136$$