Teoría – Tema 8

Determinante de matrices de orden superior a 3

Índice de contenido

Submatriz complementaria y menor complementario

Si en una matriz cuadrada A de orden n obtenemos una submatriz cuadrada de orden $n-1$, diremos que estamos ante una submatriz complementaria.

La nomenclatura α_{ij} indica la submatriz complementaria resultante de suprimir en la matriz de partida A la fila i y la columna j.

Un ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \alpha_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} , \alpha_{23}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Al determinante de cada submatriz complementaria α_{ij} lo llamaremos menos complementario $|\alpha_{ij}|$.

Del ejemplo anterior:

$$\alpha_{11}=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow |\alpha_{11}|=6$$

$$\alpha_{23}=\begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |\alpha_{23}|=-8$$

Adjunto y matriz adjunta

El adjunto A_{ij} es un número real asociado al menor complementario $|\alpha_{ij}|$, y se calcula según la relación:

$$A_{ij}=(-1)^{i+j}|\alpha_{ij}|$$

Veamos un ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}-2 & 4 & -5\\ 0 & 1 & 3\\ 2 & 0 & 6\end{pmatrix}$$

$$\alpha_{11}=\begin{pmatrix}1 & 3\\ 0 & 6\end{pmatrix} \rightarrow |\alpha_{11}|=6 \rightarrow A_{11}=(-1)^{1+1}\cdot|\alpha_{11}|=6$$

$$\alpha_{23}=\begin{pmatrix}-2 & 4\\ 2 & 0\end{pmatrix} \rightarrow |\alpha_{23}|=-8 \rightarrow A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot|\alpha_{23}|=(-1)\cdot(-8)=8$$

Si sustituimos cada coeficiente de la matriz A por su adjunto correspondiente, tendremos la matriz adjunta, que se denota $adj(A)$ .Veamos un ejemplo.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 2 & -1\end{pmatrix} \rightarrow adj(A)=\begin{pmatrix}-1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$|\alpha_{11}|=-1 \rightarrow A_{11}=(-1)^2\cdot(-1)=-1$$

$$|\alpha_{12}|=0 \rightarrow A_{12}=0$$

$$|\alpha_{13}|=-1 \rightarrow A_{13}=(-1)^4\cdot(-1)=-1$$

$$|\alpha_{21}|=-1 \rightarrow A_{21}=(-1)^3\cdot(-1)=1$$

$$|\alpha_{22}|=-1 \rightarrow A_{22}=(-1)^4\cdot(-1)=-1$$

$$|\alpha_{23}|=1 \rightarrow A_{23}=(-1)^5\cdot 1=-1$$

$$|\alpha_{31}|=0 \rightarrow A_{31}=0$$

$$|\alpha_{32}|=0 \rightarrow A_{32}=0$$

$$|\alpha_{33}|=1 \rightarrow A_{33}=(-1)^6\cdot 1=1$$

Desarrollo de un determinante por los adjuntos de una línea

El determinante de una matriz cuadrada de orden n es igual a la suma de los productos de los elementos de una línea por sus respectivos adjuntos.

Por lo tanto, es práctico desarrollar un determinante a partir de una línea que contenga el mayor número de 0 posibles.

Veamos ejemplos.

1. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}$ → Desarrollo por F_2 $\rightarrow$ $|A|=0\cdot A_{21}+1\cdot A_{22}+0\cdot A_{23}$

$A_{22}=(-1)^4\cdot(-1)=-1 \rightarrow |A|=-1$

2. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} \rightarrow F_3'=F_3-3F_1 \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 3 & 4 \end{vmatrix} \rightarrow$

→ Desarrollo por C_1 $\rightarrow$ $|A|=1\cdot A_{11}+0\cdot A_{21}+0\cdot A_{31}+0\cdot A_{41}$

$A_{11}=(-1)^2\cdot\begin{vmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -3 & 0 & -2 \\ 4 & 3 & 4 \end{vmatrix}=20 \rightarrow |A|=20$

3. $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow |A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow F_2'=F_2-F_1 \quad , \quad F_3'=F_3-F_1 \rightarrow$

$|A|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ → Desarrollo por C_4 $\rightarrow$ $|A|=1\cdot A_{14}+0\cdot A_{24}+0\cdot A_{34}+0\cdot A_{44}$

$A_{14}=(-1)^5\cdot\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-1\cdot(1)=-1 \rightarrow |A|=-1$

4. $A=\begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & -2 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

$|A|=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 & 4 & -2 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix} \rightarrow \quad F_3'=F_3-2F_2 \quad \rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & -7 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 7 & 1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & 0 \end{vmatrix}$ → Desarrollo por $C_4 \rightarrow \quad |A|=-1\cdot A_{25}=-(-1)^{2+5}\cdot|\alpha_{25}|=|\alpha_{25}|$

$|\alpha_{25}|=\begin{vmatrix} -2 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -7 & 1 & 0 \\ 5 & 7 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \rightarrow \quad C_2'=C_2+7C_3 \quad \rightarrow \quad |\alpha_{25}|=\begin{vmatrix} -2 & 29 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 14 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ → Desarrollo por $F_2 \rightarrow \begin{vmatrix} -2 & 29 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 14 & 1 & 3 \\ 2 & 6 & 1 & 2 \end{vmatrix}=1\cdot A_{23}=(-1)^{2+3}\cdot|\alpha_{23}|=-\begin{vmatrix} -2 & 29 & 0 \\ 5 & 14 & 3 \\ 2 & 6 & 2 \end{vmatrix}=136 \quad \rightarrow \quad |A|=136$