Teoría – Tema 8

Propiedades de los determinantes

Índice de contenido

Propiedades

1. El determinante de una matriz coincide con el determinante de su traspuesta.

$$|A|=|A^t|$$

2. Si permutamos dos filas o dos columnas de una matriz, su determinante cambia de signo. Veamos un ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

3. Si un determinante tiene dos líneas paralelas iguales, el determinante es nulo (por línea entendemos fila o columna, por lo que dos líneas paralelas serán dos filas o dos columnas del determinante). Veamos un ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0$$

4. Si un determinante tiene una línea con todos los términos igual a cero, el determinante es nulo. Veamos un ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

5. Si el determinante posee dos líneas paralelas proporcionales, el determinante se anula. Veamos un ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -4 \end{vmatrix} = 0$$

6. Si el determinante posee una línea que es combinación lineal de otras líneas paralelas, dicho determinante es nulo. Veamos un ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0$$

7. Si a una línea del determinante le sumamos una combinación lineal de otras líneas paralelas, el resultado final del determinante no varía.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4+0-6-(0+0+1) = -3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \rightarrow \quad F_2' = F_2 - 3F_1 \quad \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 7 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4+0+0-(0+0+7) = -3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \rightarrow \quad C_1' = C_1 - C_2 - 2C_3 \quad \rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -9 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 20+0+0-(18+0+5) = -3$$

8. Acabamos de comentar que si a una línea del determinante le sumamos una combinación lineal de otras líneas paralelas, el resultado final del determinante no varía. Pero ojo, si en esa combinación lineal la línea sobre la que estamos aplicando la transformación la multiplicamos por un número, el resultado final del determinante también queda multiplicado por ese número, por lo que deberemos dividir por dicho número para compensar esa modificación.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4+0-6-(0+0+1) = -3$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} \rightarrow \quad F_1' = 3F_1 - F_3 \quad \rightarrow \frac{1}{3} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -1 & -7 \\ 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix} = \frac{1}{3} \cdot [0+0-21-(0+0-12)] = -3$$

9. El determinante del producto de dos matrices es el producto de los determinantes de cada matriz por separado.

$$|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$$

10. Si multiplicamos una linea de una matriz por un número, el valor final del determinante queda multiplicado por ese número. Veamos un ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix} \rightarrow |A|=-9-(2)=-11$$

$$B=\begin{pmatrix}2\cdot(-3) & 2\cdot 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 2\\ 2 & 3\end{pmatrix} \rightarrow |B|=-18-(4)=-22=2\cdot|A|$$

11. Si mutiplicamos una matriz por un número $k\in\mathbb{R}$, el valor final del determinante es igual a $k^n\cdot|A|$, donde n es la dimensión de la matriz cuadrada sobre la que estamos aplicando el determinante. Veamos un ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix} \rightarrow |A|=-9-(2)=-11$$

$$C=2\cdot A=2\cdot\begin{pmatrix}-3 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-6 & 2\\ 4 & 6\end{pmatrix} \rightarrow |C|=-36-(8)=-44 \quad , \quad |C|=|2\cdot A|=2^2\cdot|A|=4\cdot|A|=-44$$

$$B=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} \rightarrow |B|=0+0+0-(0+0+2)=-2$$

$$D=5\cdot B=5\cdot\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & 0 & 3\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5 & 5 & 5\\ 10 & 0 & 15\\ 0 & 0 & 5\end{pmatrix} \rightarrow |D|=0-(250)=-250 \quad , \quad |D|=|5\cdot B|=5^3|B|=-250$$

12. El determinante de la matriz identidad es igual a 1 → $|I|=1$

13. Si todos los elementos de una fila o de una columna de una matriz se descomponen en suma de dos sumandos, su determinante también se descompone en la siguiente suma de determinantes:

$$\begin{vmatrix} a_{11}+b & a_{12} & a_{13} \\ a_{21}+c & a_{22} & a_{23} \\ a_{31}+d & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b & a_{12} & a_{13} \\ c & a_{22} & a_{23} \\ d & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 6-5=1$$

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2+3 & 3-1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = (9-2)+(-3-3)=7-6=1$$

14. El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los términos de la diagonal principal. Un ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} -2 & 4 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow \quad |A|=-2\cdot 1\cdot 6=-12$$

15. Una matriz cuadrada A admite inversa si solo si $|A|\neq 0$.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \quad |A|=-2\neq 0 \rightarrow \quad A \text{ admite inversa}$$

$$B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \quad |B|=0 \rightarrow \quad B \text{ no admite inversa}$$

16. Si la matriz A admite inversa, sabemos que cumple la igualdad:

$A\cdot A^{-1}=I$ → aplicamos determinantes → $|A\cdot A^{-1}|=|I| \rightarrow |A|\cdot|A^{-1}|=1 \rightarrow |A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$

Es decir, el determinante de la matriz inversa es igual al inverso del determinante de la matriz original. Veamos un ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow |A|=-2 \rightarrow |A^{-1}|=\frac{1}{|A|}=\frac{1}{-2}$$