Problemas – Tema 8

Solucion a problemas sobre Determinantes - Hoja 10 - Todos resueltos

Hoja 10. Problema 1

1. Dos objetos A y B se mueven en el plano de dos dimensiones. El objeto A parte del punto (0,0) y el objeto B parte del punto (250,0). Las unidades de las coordenadas se miden en kilómetros.

El objeto A se mueve verticalmente por el eje OY desde su punto de inicio hasta el punto (0, 375/2), con velocidad de 30 km/h. Simultáneamente, el objeto B se desplaza por el eje OX desde su punto de inicio hasta el origen de coordenadas, con velocidad de 40 km/h.

a) [1 punto] Obtener la distancia $f(t)$ entre los objetos A y B durante el desplazamiento, en función del tiempo t en horas desde que comenzaron a desplazarse. Ayuda: la velocidad se calcula como espacio dividido por el tiempo.

b) [1,5 puntos] Obtener los valores del tiempo para los que la distancia entre los objetos A y B sea máxima y mínima durante el movimiento. Calcular también dichas distancias máximas y mínimas.

a) El espacio recorrido por cada objeto será igual a la velocidad por el tiempo del desplazamiento.

La posición de A vendrá dada por $A(0,30\cdot t)$, ya que se mueve verticalmente en sentido ascendente por el eje OY, partiendo del origen, con una velocidad de 30 km/h. La variable tiempo t viene dada en horas.

El tiempo que dura el movimiento de A será $\frac{375/2}{30}=6{,}25\,horas$, resultante de dividir la distancia vertical total que recorre entre su velocidad.

La posición de B será $A(250-40\cdot t,0)$, ya que se acerca al origen desde la posición inicial (250,0), con una velocidad de 40 km/h.

El tiempo que dura el movimiento de B será $\frac{250}{40}=6{,}25\,horas$, resultante nuevamente de dividir la distancia horizontal total recorrida entre su velocidad.

Por lo tanto, tenemos un movimiento en el intervalo en horas $[0,6{,}25]$. La distancia entre ambos objetos será el módulo del vector que une sus posiciones.

$$\vec{AB}=(250-40t,-30t) \quad \rightarrow \quad d(A,B)=|\vec{AB}|=\sqrt{(250-40t)^2+(-30t)^2}$$

La función distancia depende de la variable tiempo, por lo que podemos escribirla como:

$$f(t)=\sqrt{62500+1600t^2-20000t+900t^2}=\sqrt{2500t^2-20000t+62.500}$$

Como hemos razonado anteriormente, el movimiento se produce en el intervalo temporal $[0,6{,}25]$.

b) Ojo, este apartado no solo preguntan por extremos relativos. Nos dicen valores máximos y mínimos dentro de un intervalo concreto $[0,6{,}25]$. Por lo tanto, tendremos que obtener los extremos absolutos para saber en qué tiempo se obtiene la imagen de la función más grande y más pequeña.

Primero, sacamos candidatos a extremos relativos con la primera derivada.

$$f(t)=\sqrt{2500t^2-20000t+62.500} \rightarrow f'=\frac{5000t-20000}{2\sqrt{2500t^2-20000t+62.500}} \rightarrow f'=0$$

El punto crítico resulta → $t=\frac{20000}{5000}=4\,horas$

Para obtener el dominio de la función $f(t)=\sqrt{2500t^2-20000t+62.500}$, debemos exigir que el discriminante sea mayor o igual a cero.

$2500t^2-20000t+62500\geq 0 \rightarrow 25t^2-200t+625\geq 0$ → El polinomio de grado dos del discriminante no tiene solución real, por lo podemos saber el signo del discriminante evaluándolo en un punto cualquiera de la recta real → $t=0 \rightarrow 0-0+625\geq 0$ → El dominio de la función $f(t)$ es toda la recta real.

Por lo tanto, para saber si $t=4$ es un máximo o un mínimo relativo, evaluamos la primera derivada en un valor a la izquierda de 4 y en otro valor a la derecha de 4. Recuerda que el caso físico que estamos estudiando se produce únicamente en el intervalo $[0,6{,}25]$.

De esta forma, $t=4$ resulta un mínimo relativo.

Para determinar extremos absolutos, obtenemos las imágenes.

Si $t=0 \rightarrow f(0)=250\,km$ → Máximo absoluto

Si $t=4 \rightarrow f(0)=150\,km$ → Mínimo relativo y absoluto

Si $t=6 \rightarrow f(0)=187{,}5\,km$

Hoja 10. Problema 2

2. a) Resuelve $\int x\cdot e^{-x^2}dx$

b) Resuelve $\int x\cdot e^{-x}dx$

a) La primera integral es inmediata, porque la derivada del exponente $-x^2$ de la exponencial es $-2x$. Es decir:

$$\int x\cdot e^{-x^2}dx=\frac{1}{-2}\int -2x\cdot e^{-x^2}dx=\frac{-1}{2}e^{-x^2}+C$$

b) Para la segunda integral vamos a aplicar partes.

$$I=\int x\cdot e^{-x}dx=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)dx$$

$$u=x \quad \rightarrow \quad u'=1$$

$$v'=e^{-x} \quad \rightarrow \quad v=-e^{-x}$$

$$I=-x\cdot e^{-x}+\int e^{-x}dx=-x\cdot e^{-x}-e^{-x}+C$$

Hoja 10. Problema 3

3. Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ -2 & a+1 & 2 \\ -3 & a-1 & a \end{pmatrix}$.

a) [1 punto] Obtener el rango de A en función del parámetro a .

b) [0,5 puntos] Si $a=1$, obtener el determinante de la matriz $2\cdot A^{-1}$.

c) [1 punto] Si $a=-1$, calcular todas las soluciones del sistema $A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

a) El rango coincide con la dimensión del mayor menor no nulo. Si aplicamos Sarrus en A :

$$det(A)=a(a+1)+0-2a(a-1)-(-3a(a+1)+0+2(a-1))=4a(a+1)-4a(a-1)$$

$$det(A)=2a^2+4a+2 \quad \rightarrow \quad det(A)=0 \quad \rightarrow \quad a=-1$$

Discusión de casos.

Si $a=-1$ → El determinante de A se anula → el rango no puede ser 3 → Encontramos un menor de orden 2 no nulo → $|\alpha_{22}|=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}=-4\neq 0$ → Rango 2

Si $a\neq -1$ → El determinante de A no se anula → Rango 3.

b) Si $a=1 \rightarrow det(A)=2\cdot 1^2+4\cdot 1+2=8 \rightarrow det(2\cdot A^{-1})=2^3\cdot det(A^{-1})=\frac{8}{|A|}=\frac{8}{8}=1$

c) Si $a=-1$, calcular todas las soluciones del sistema $A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

La notación matricial del sistema quedaría:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & |-1 \\ -2 & 0 & 2 & |2 \\ -3 & -2 & -1 & |0 \end{pmatrix}$$

Por abreviar el documento, en el siguiente enlace puedes observar los pasos para resolver por Gauss:

https://matrixcalc.org/es/slu.html#solve-using-Gaussian-elimination%28%7B%7B1,0,-1,0,-1%7D,%7B-2,0,2,0,2%7D,%7B-3,-2,-1,0,0%7D%7D%29

El sistema resulta SCI con un parámetro libre. Las soluciones son:

$$z=\lambda\in\mathbb{R} \quad , \quad x=-1+\lambda \quad , \quad \frac{3}{2}-2\,lambda$$

Hoja 10. Problema 4

4. a) Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ y $|A|=2$. Calcula $\begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

b) Sabemos que el vector $(2,1,-1)$ es solución del sistema $\begin{Bmatrix} ax+by+cz=a+c \\ bx-y+bz=a-b-c \\ cx-by+2z=b \end{Bmatrix}$.

Calcule el valor de los parámetros $a,b\ \ y\ \ c$.

a) Desarrollamos los cuadrados de la primera fila:

$$\begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a^2+2a+1 & b^2+2b+1 & c^2+2c+1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \rightarrow F'_1=F_1-2\mathrm{F}_2-F_3 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = |A| = 2$$

b) Si el vector $(2,1,-1)$ es solución, sustituyo los valores de sus componentes en las incógnitas x,y,z del sistema.

$$\begin{Bmatrix} 2a+b-c=a+c \\ 2b-1-b=a-b-c \\ 2c-b-2=b \end{Bmatrix}$$ → Nuevo sistema con $a,b\ \ y\ \ c$ como incógnitas.

$$\begin{Bmatrix} a+b-2c=0 \\ -a+2b+c=1 \\ -2b+2c=2 \end{Bmatrix}$$ →Notación matricial→ $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $M/D=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right)$

Estudiamos el rango de M . Si es 3 , tendremos sistema compatible determinado con solución única. Y podremos resolver, por ejemplo, por la **regla de Cramer**.

$|M|=4+0-4-(0-2-2)=4\neq 0 \rightarrow Rango(M)=3$ → Coincide con el rango de la ampliada → Por Rouché-Frobenius tenemos solución única → S.C.D.

Podemos obtener la solución única por Cramer para las incógnitas $a,b\ \ y\ \ c$. Recuerda que **Cramer solo lo utilizamos en los sistemas compatibles determinados**.

$$a=\frac{\begin{vmatrix}0 & 1 & -2\\ 1 & 2 & 1\\ 2 & -2 & 2\end{vmatrix}}{4}=\frac{0+2+4-(-8+0+2)}{4}=\frac{12}{4}=3$$

$$b=\frac{\begin{vmatrix}1 & 0 & -2\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & 2 & 2\end{vmatrix}}{4}=\frac{2+0+4-(0+0+2)}{4}=\frac{4}{4}=1$$

$$c=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 2\end{vmatrix}}{4}=\frac{4+0+0-(0-2-2)}{4}=\frac{8}{4}=2$$