Problemas – Tema 8

Solucion a problemas sobre Determinantes - Hoja 09 - Todos resueltos

Hoja 9. Problema 1

1. Sea la función $f(x)=x\cdot e^{-x^2}$

a) Obtener las asíntotas.

b) Obtener los intervalos de crecimiento y los extremos relativos.

c) ¿Cuánto debe valer a para que podamos aplicar el Teorema de Rolle a la función $g(x)=f(x)+ax$ en el intervalo $[0,1]$?

a) $f(x)=x\cdot e^{-x^2}=\frac{x}{e^{x^2}}$

El Dominio del numerador y del denominador es toda la recta real, por ser polinomio y exponencial elevado a un polinomio.

Además, la exponencial nunca se anula. Por lo tanto, el Dominio de la función es toda la recta real.

Es decir, no existen candidatos para las A.V. → No hay A.V.

Para obtener las A.H. Aplicamos límite en + y en – infinito. Lo hacemos en ambos lados, ya que no tenemos un cociente de polinomios, por lo que no tenemos garantizado que ambos límites coincidan.

$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{e^{x^2}}=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación → Explicar teoría de L'Hôpital.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{x^2}\cdot 2x}=\frac{1}{\infty}=0$$

Si hacemos el límite en – infinito, llegamos al mismo resultado, porque aparece la misma indeterminación.

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{e^{x^2}}=0$$

En consecuencia, existe A.H. En la recta horizontal $y=0$ si $x\to\pm\infty$.

Si existe A.H., no aparece A.O.

b) Obtenemos primera derivada (ojo, derivamos como un cociente).

$$f(x)=\frac{x}{e^{x^2}} \rightarrow f'(x)=\frac{1\cdot e^{x^2}-x\cdot e^{x^2}2\cdot x}{(e^{x^2})^2}=\frac{1-2x^2}{e^{x^2}} \rightarrow f'(x)=0 \rightarrow x=\frac{\pm\sqrt{2}}{2}$$

Situamos los dos puntos críticos en la recta real. Recuerdo que el dominio es toda la recta real.

Evaluamos la derivada en cada uno de los intervalos en que se divide la recta real. Donde la derivada sea negativa, la función es estrictamente decreciente. Donde la derivada sea positiva, la función es estrictamente creciente.

$(-\infty, -\frac{\sqrt{2}}{2})$ → estrictamente decreciente

$(\frac{-\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})$ → estrictamente creciente

$(\frac{\sqrt{2}}{2}, \infty)$ → estrictamente decreciente

Los extremos relativos, y sus imágenes, son:

$A(\frac{-\sqrt{2}}{2}, -0{,}43)$ → mínimo relativo

$A(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0{,}43)$ → máximo relativo

c)¿Cuánto debe valer a para que podamos aplicar el Teorema de Rolle a la función $g(x)=f(x)+ax$ en el intervalo $[0,1]$?

$$g(x)=\frac{x}{e^{x^2}}+ax$$

El Teorema de Rolle afirma que si la función $g(x)$ es continua en $[0,1]$ y derivable en $(0,1)$, y se cumple que las imágenes de los extremos coinciden $g(0)=g(1)$, podemos afirmar que existe un valor $c\in(0,1)$ que cumple $g'(c)=0$.

La función es suma de dos funciones continuas en toda la recta real. Además, su derivada también es continua en toda a recta real, por lo que podemos afirmar que es derivable en toda la recta real.

En consecuencia, la función es continua en $[0,1]$ y derivable $(0,1)$.

Aplicamos condición:

$$g(0)=g(1)$$

$$g(0)=0 \quad , \quad g(1)=\frac{1}{e}+a \quad \rightarrow \quad 0=\frac{1}{e}+a \quad \rightarrow \quad a=\frac{-1}{e}$$

Hoja 9. Problema 2

2. Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=1$ sabiendo que $f(0)=0$ y $f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x+1}$ para $x>-1$.

La ecuación punto-pendiente de una recta de pendiente m que pasa por el punto (x_0, y_0) es:

$$m=\frac{y-y_0}{x-x_0}$$

Como la recta buscada es tangente a la función en $x=1$, la pendiente de la recta será igual a la derivada de la función evaluada en $x=1$ $\rightarrow$ $f'(1)=\frac{(1-1)^2}{1+1}=0$ $\rightarrow$ $m=0$.

Si $x_0=1$ entonces $y_0=f(1)$, ya que la función y la recta tangente coinciden en el punto $(1, f(1))$.

Para obtener el valor de la imagen $f(1)$ debemos integrar la función derivada $f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x+1}$, para conseguir la función primitiva $f(x)$. La constante de integración inherente al proceso de integración podemos determinarla gracias a la condición del enunciado $f(0)=0$.

Por el Teorema fundamental del cálculo integral, sabemos que derivada e integral son procesos inversos. Si integramos $f'(x)$, obtendremos $f(x)$.

$$f(x)=\int \frac{(x-1)^2}{x+1}\,dx=\int \frac{x^2-2x+1}{x+1}\,dx$$

Tenemos un cociente de polinomios. Al ser el grado del numerador mayor que el grado del denominador, realizamos la división.

$$\frac{Dividendo}{divisor}=Cociente+\frac{Resto}{divisor} \quad \rightarrow \quad \frac{x^2-2x+1}{x+1}=x-3+\frac{4}{x+1}$$

$$f(x)=\int (x-3)\,dx+\int \frac{4}{x+1}\,dx=\frac{x^2}{2}-3x+4\ln|x+1|+C$$

La constante de integración queda definida de manera única con la condición $f(0)=0$ $\rightarrow$ $C=0$

$$f(x)=\frac{x^2}{2}-3x+4\ln|x+1|$$

Una vez obtenida la función primitiva, podemos calcular $f(1)$

$$f(1)=\frac{1}{2}-3+4\ln|2|=\frac{-5}{2}+4\ln(2)\simeq 0{,}27$$

La recta tangente a la función en $x=1$ resulta una recta horizontal (pendiente nula).

$$m=\frac{y-y_0}{x-x_0} \quad\rightarrow\quad 0=\frac{y-f(1)}{x-1} \quad\rightarrow\quad y=f(1) \quad\rightarrow\quad y\simeq 0{,}27$$

Hoja 9. Problema 3

3. Sea el sistema $\left\{\begin{matrix} x+y+z=4 \\ 3x+4y+5z=5 \\ 7x+9y+11z=k \end{matrix}\right\}$

a) Discutir las soluciones del sistema.

b) Resolver en todos los casos que sea compatible.

a) En la web www.matrixcalc.org/es podemos comprobar los pasos del método de Gauss:

https://matrixcalc.org/es/slu.html#solve-using-Gaussian-elimination%28%7B%7B1,1,1,0,4%7D,%7B3,4,5,0,5%7D,%7B7,9,11,0,k%7D%7D%29

La matriz triangular resulta:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & |4 \\ 0 & 1 & 2 & |-7 \\ 0 & 0 & 0 & |k-14 \end{pmatrix}$$ → Explicar Teoría de Gauss

Discusión de casos:

Si $k=14$ → $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & |4 \\ 0 & 1 & 2 & |-7 \\ 0 & 0 & 0 & |0 \end{pmatrix}$ → Rango 2 y 3 incógnitas → SCI con 1 parámetro libre

Si $k\neq 14$ → Absurdo matemático en la tercera fila → SI sin solución

b) Solo debemos resolver en el caso de SCI para $k=14$

Si $z=\lambda\in\mathbb{R}$ → $x=11+\lambda$, $y=-7-2\lambda$

Hoja 9. Problema 4

4. a) Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ y $|A|=2$. Calcula $\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$.

b) Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calcula $|(5\mathrm{A})^{-1}|$.

c) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} m+2 & 0 & 0 \\ -3 & m+1 & 1 \\ 1 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$. Obtener $|A^{10}|$

a) Aplicamos transformaciones lineales de filas y columnas hasta obtener el determinante de la matriz A y así poder aplicar el valor de $|A|=2$.

$$\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$$ → Intercambiamos F_1 con F_3 con el consiguiente cambio de signo →

$$-\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ a-1 & b-1 & c-1 \end{vmatrix}$$ → Intercambiamos F_2 con F_3 lo cual genera un nuevo cambio de signo

$$\rightarrow \begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \end{vmatrix}$$ → Sacamos factor común 5 de la primera fila →

$$5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \end{vmatrix} \rightarrow \quad F'_2=F_2+F_1 \quad , \quad F'_3=F_3+F_1 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=5|A|=5\cdot 2=10$$

b) $|A|=-2 \quad \rightarrow \quad |(5\mathrm{A})^{-1}|=\dfrac{1}{|5\,A|}=\dfrac{1}{5^2|A|}=\dfrac{-1}{50}$

c) $A=\begin{pmatrix} m+2 & 0 & 0 \\ -3 & m+1 & 1 \\ 1 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$ → Sarrus → $det(A)=(m+2)(m^2-1)+0+0-(0+0+0)$

$det(A)=(m+2)(m^2-1) \quad \rightarrow \quad |A^{10}|=|A^{10}|=(m+2)^{10}(m^2-1)^{10}$