¿Cómo estudiar con estos esquemas?

Cada hoja ofrece el resumen de un importante concepto de la asignatura de Matemáticas II, y remite a un ejercicio resuelto en los PDF de repaso para Selectividad que aparecen en la web.

Estos PDF son cuatro, organizados según el tipo de ejercicios del examen de Selectividad en Andalucía:

- PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad.
- PDF Repaso 2 sobre integrales y áreas.
- PDF Repaso 3 sobre sistemas, matrices y determinantes.
- PDF Repaso 4 sobre geometría tridimensional.

¿Está toda la asignatura contenida en estos esquemas?

No, es imposible esquematizar en tan pocas hojas todo el curso de Matemáticas II. Pero sí forman un resumen práctico de cara a Selectividad.

¡Ánimo y a trabajar!

Índice de contenido

1 – Límite de cociente de polinomios en el infinito: indeterminación infinito/infinito

Dividir todos los términos por la potencia de mayor grado.

Si aparecen raíces de polinomios, recordar que la potencia entra dentro de la raíz elevada, a su vez, al índice de la raíz.

Si tenemos límite en $-\infty$, realiamos el cambio de x por $-x$ y resolvems el límite en $+\infty$

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Límites 2*

Resolver:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1}$ *b)* $\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2+5}{4x^2-x+1}$ *c)* $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x^2-x+2}{x^2+1}$

2 – Límite de cociente de polinomios con indeterminación 0/0

Factorizar y simplificar. Factorizamos por Rufinni o, si es posible, con la fórmula para ecuaciones de segundo grado. Ojito, al factorizar, con el coeficiente líder que acompaña a la máxima potencia de la variable.

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Límites 6*

Resolver $\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2-x-2}$

Ejemplo:

Factoriza $-2x^2+2x+4$

3 – Límite con raíces con indeterminación infinito - infinito

Multiplicar y dividir por el conjugado, seguido de simplificar. Aparece binomio de Newton: suma por diferencia igual a diferencia de cuadrados.

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Límites 3*

Obtener el valor de k *que satisface* $\lim_{x \to \infty} \sqrt{4x^2} - \sqrt{4x^2 + kx - 1} = 4$

4 – Límite con fracciones con indeterminación infinito - infinito

Aplicar mínimo común múltiplo y obtener una nueva indeterminación para resolver.

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Límites 7*

Resolver $\lim_{x \to 1^+} \left(\frac{1}{\ln(x)} - \frac{2}{x^2-1}\right)$ → *Ver también apartado 7 sobre L'Hôpital*

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Límites 16*

Resolver $\lim_{x \to 4} \left(\frac{1}{\sqrt{x}-2} - \frac{4}{x-4}\right)$

5 – Límite con indeterminación 0·infinito

Dar la vuelta a uno de los factores usando la relación $a=\frac{1}{\frac{1}{a}}$.

Es cómodo dar la vuelta al factor más sencillo.

Obtendremos una nueva indeterminación del tipo 0/0 o bien infinito/infinito.

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Límites 4*

Resuelve $\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln(x)$ $\rightarrow$ *Ver también apartado 7 sobre L'Hôpital*

6 – Límite en función con valor absoluto

Primero rompemos el valor absoluto para obtener una función a trozos, y luego se resuelve el límite.

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Límites 9*

Resuelve $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1+|x|)}{x}$ → *Ver también apartado 7 sobre L'Hôpital*

7 – Límites 0/0 ó infinito/infinito resueltos por L'Hôpital

L'Hôpital solo se puede aplicar en indeterminaciones 0/0 o bien infinito/infinito. Si al aplicar L'Hôpital dos veces consecutivas llegamos al mismo límite de partida, tendremos que aplicar otra forma de resolución.

Si aplicamos L'Hôpital debemos escribir explícitamente qué dice la regla:

Si $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ es $\frac{0}{0}$ o bien $\frac{\infty}{\infty}$, siendo x_0 un número real o infinito, y existe el límite $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ su valor coincide con el limite de partida $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

Recuerda: en L'Hôpital se deriva numerador y denominador por separado, no se hace la derivada del cociente.

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Límites 1*

Sabiendo que $\lim_{x \to 0} \frac{a x^2 + b x + 1 - \cos(x)}{sen(x^2)}$ *es finito e igual a uno, calcula los valores de* a *y* b *.*

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Límites 8*

Sabiendo que $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1) - a\, sen(x) + x\cos(3x)}{x^2}$ *es finito, calcula* a *y el valor del límite.*

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Límites 10*

Obtener a *para que se cumpla* $\lim_{x \to 0} \left(\frac{sen(3x)}{x^2} + \frac{a}{x} + 3x\right) = 0$

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Límites 11*

Obtener a *para que el siguiente límite exista y sea finito* $\lim_{x \to 0} \frac{e^x - e^{-x} + ax}{x - sen(x)}$

8 – Dominio y continuidad. Repaso de inecuaciones

En la suma, resta y producto de dos funciones, el dominio es la interseccion de los dominios de ambas funciones.

En la potencia de funciones, el dominio es la intersección del dominio de la base y del dominio del exponente, siempre que la base sea positiva.

En el cociente de funciones, el dominio es igual a la intersección del dominio del numerador y del denominador, menos los valores que anulan al denominador.

En la raíz de una función, el dominio se obtiene resolviendo la inecuación de hacer el discriminante mayor o igual que cero.

En el logaritmo de una función, el dominio se calcula con la inecuación de argumento del logaritmo mayor estricto que cero.

Las funciones elementales (no las definidas a trozos) son continuas en su dominio.

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Continuidad 2*

Estudiar el dominio de:

a) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$ *b)* $f(x)=\ln\left(\frac{x}{x-1}\right)$ *c)* $f(x)=\sqrt{x^2+2x-3}$ *d)* $f(x)=\frac{x}{\ln(x)}$

9 – Continuidad en una función definida a trozos

Si me piden estudiar la continuidad en una función a trozos, debo estudiarla tanto en intervalos abiertos como en puntos frontera.

Las condiciones de continuidad en un punto son:

1. Existe el valor de la función en el punto.
2. Los límites laterales existen y son iguales. Su valor es el límite.
3. La función evaluada en el punto es igual al límite.

Ojo con dos detalles:

- Las indeterminaciones solo aparecen en límites. Si al evaluar la función en un punto divido por cero, eso es un absurdo y la función no está definida en ese punto.
- Al resolver un límite no es lo mismo infinito que no existir. Por ejemplo, el límite a la derecha de 0 del logaritmo existe y vale menos infinito. Mientras que el límite a la izquierda de 0 del logaritmo no existe.

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Continuidad 4*

Estudia la continuidad y discontinuidad de $f(x)=\begin{cases} \dfrac{sen(x)}{x} & si \quad -3<x<0 \\ x^2+1 & si \quad 0\leq x\leq 1 \\ \dfrac{e^{(x-1)}-1}{x^2-1} & si \quad 1<x\leq 5 \end{cases}$ en su dominio.

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Continuidad 5*

Obtener valor de m para que la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+mx)}{sen(2x)} & si \quad x\neq 0 \\ 3 & si \quad x=0 \end{cases}$ sea continua en $x=0$

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Continuidad 6*

Obtener a *y* b *para que la función* $f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax^2+bx+1-e^{2x}}{sen\left(x^2\right)} & si \quad x\neq 0 \\ 1 \quad si \quad x=0 \end{cases}$ *sea continua en* $x=0$ *.*

10 – Asíntotas

Una función puede tener A.V., A.H. y/o A.O.

Los candidatos a las A.V. son los puntos $x=x_0$ donde la función no está definida o los puntos frontera de los intervalo donde está definida.

Debemos hacer el límite de $x \to x_0$ y, si sale infinito, hacer los límites laterales para ver el signo del infinito. Puede hacer A.V. por ambos lados o solo por un lado. La A.V. es una recta vertical del tipo $x=x_0$. Una función nunca corta a su A.V.

La A.H. es una recta horizontal $y=k$ donde $\lim_{x \to \pm\infty} f(x)=k$. Hay que hacer los dos límites en + y en – infinito. Solo si es un cociente de polinomios, podemos decir que ambos límites coinciden y calcular solo el límite en + infinito. La función no corta a la A.H. en el infinito, pero sí puede cortarla antes. La A.H. puede ser en + y en – infinito, o solo en uno de ellos.

La A.O. es una recta horizontal $y=mx+n$ donde $m=\lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$ y

$n=\lim_{x\to\pm\infty}\left(f(x)-mx\right)$. Hay que hacer los dos límites en + y en – infinito. Solo si es un cociente de polinomios, podemos decir que ambos límites coinciden y calcular solo el límite en + infinito. La función no corta a la A.O. en el infinito, pero sí puede cortarla antes. Si hay A.H. no hay A.O. y viceversa. En cociente de polinomios donde el grado del numerador supera en una unda unidad al grado del denominador, habrá A.O. La A.O. puede ser en + y en – infinito, o solo en uno de ellos.

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Asíntotas 3*

Estudia las asíntotas de $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Asíntotas 4*

Determinar, si existen, las asíntotas horizontales de $f(x)=\dfrac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Asíntotas 7*

Indicar la posición relativa de $f(x)=\frac{x^2-3x+3}{x^2-4}$ *respecto a su horizontal. ¿Corta la función en algún momento a la A.H.? En caso afirmativo, encontrar el punto de corte.*

11 – Definición formal de derivadas

La derivada de una función se define como:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Si deseo conocer el valor de la derivada en un punto $x=x_0$:

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

Si me piden explícitamente hacer la derivada mediante la definición formal, recuerda que no puedes aplicar L'Hôpital (debes aplicar las técnicas de resolución que estudiamos antes de saber derivar). Si no piden definición formal, aplicamos la tabla de derivación.

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Derivadas 1*

Estudia la derivabilidad de $f(x)=\begin{Bmatrix}\sqrt{x} & si & 0\leq x\leq 1\\ x^2 & si & x>1\end{Bmatrix}$ *en* $x_0=1$ *usando la definición formal de derivada.*

12 – Interpretación geométrica de la derivada. Recta tangente y recta normal

La derivada de una función $f(x)$ en un punto x_0 coindice con el valor de la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

$f'(x_0)=m \rightarrow \ f'(x_0)=\dfrac{y-f(x_0)}{x-x_0}$ → Ec. punto-pendiente recta tangente

La tangente y la normal son perpendiculares, por lo que el producto de sus pendientes es igual a $-1 \rightarrow \ m \cdot m_n = -1$

$\dfrac{-1}{f'(x_0)}=\dfrac{y-f(x_0)}{x-x_0}$ → Ec. punto-pendiente recta normal

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Derivadas 2*

Obtener la recta tangente y normal a $f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{1}{x+1}$ *en* $x=0$ *.*

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Derivadas 3*

Obtener la recta tangente a $f(x)=arcotg(x)$ *paralela a la recta que pasa por los puntos* $A(1,3)$ *y* $B(-2,0)$ *.*

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Derivadas 8*

Sea $f(x)=\begin{cases} \frac{x^2}{6}-\frac{3}{2} & si \quad x<3 \\ \ln(x-2)x & si \quad x\geq 3 \end{cases}$ *. Calcular los puntos de la gráfica en que la función es paralela a la recta* $x+3y=0$ *.*

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Derivadas 10*

Dadas las funciones $f(x)=x^2-ax-4$ *y* $g(x)=\frac{x^2}{2}+b$ *, halla los valores de* a *y* b *de manera que las gráficas de* $f(x)$ *y* $g(x)$ *tengan la misma recta tangente en el punto* $x=3$ *. Halla la ecuación de la recta.*

13 – Derivabilidad de una función definida a trozos

Para que una función sea derivable, primero debe ser continua. Un error muy típico es olvidar esto, y pasar a la condición de derivabilidad sin haber demostrado antes la continuidad. Las condiciones de continuidad ya las estudiamos en el apartado 9.

Nuevamente distinguimos entre intervalos abiertos y puntos frontera. Los polinomios, e^x , $\ln(x)$, $sen(x)$ y $\cos(x)$ son derivables en su dominio.

Si tenemos una composición de funciones, estudiar la derivabilidad en un intervalo abierto consiste en comprobar que la función derivada es continua en ese intervalo abierto.

En los puntos frontera (recuerdo: comprobar antes que la función es continua) debemos exigir que las derivadas laterales sean iguales:

$$f'(x_0^-)=f'(x_0^+)$$

Ojo, las derivadas laterales, por definición, son límites:

$$\lim_{x\to x_0^-} f'(x)=\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$$

Si aparecen indeterminaciones, aplicamos técnicas de resolución de límites.

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Derivadas 4*

Obtener a *y* b *para que* $f(x)=\begin{cases} a\cdot\cos(x)+2x & si \quad x\leq 0 \\ a^2\cdot\ln(x+1)+\dfrac{b}{x+1} & si \quad x>0 \end{cases}$ *sea derivable en* $x=0$ *.*

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Derivadas 14*

Determina $k\neq 0$ *sabiendo que la función* $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ *definida por* $f(x)=\begin{cases} 3-kx^2 & si \quad x\leq 1 \\ \dfrac{2}{kx} & si \quad x>1 \end{cases}$ *es derivable.*

14 – Crecimiento (monotonía) y extremos relativos

Si la primera derivada evaluada en un punto es positiva, la función es estrictamente creciente en ese punto.

Si la primera derivada evaluada en un punto es negativa, la función es estrictamente decreciente en ese punto.

La condición necesaria de extremo relativo es primera derivada igual a cero: $f'(x)=0$ --> Los valores que cumplen esta condición necesaria son los puntos críticos.

Si la primera derivada nunca se anula, significa que la función no posee extremos relativos.

Un punto crítico puede ser máximo relativo, mínimo relativo o punto de inflexión.

Existen dos condiciones suficientes para determinar si tenemos un extremo relativo.

La primera condición suficiente consiste en situar en la recta real a los puntos críticos y a los puntos frontera del dominio de definición.

Evaluamos la primera derivada en cada intervalo, y si hay cambio de signo a ambos lados del puntos crítico, tendremos un extremos relativo.

La segunda condición suficiente es realizar la segunda derivada. Si la segunda derivada evaluada en el punto crítico es positiva, tenemos un mínimo relativo. Si la segunda derivada evaluada en el punto crítivo es negativa, tenemos un máximo relativo. Y si la segunda derivada evaluada en el punto crítico es cero, o bien es un extremo o bien es un punto de inflexión.

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Derivadas 9*

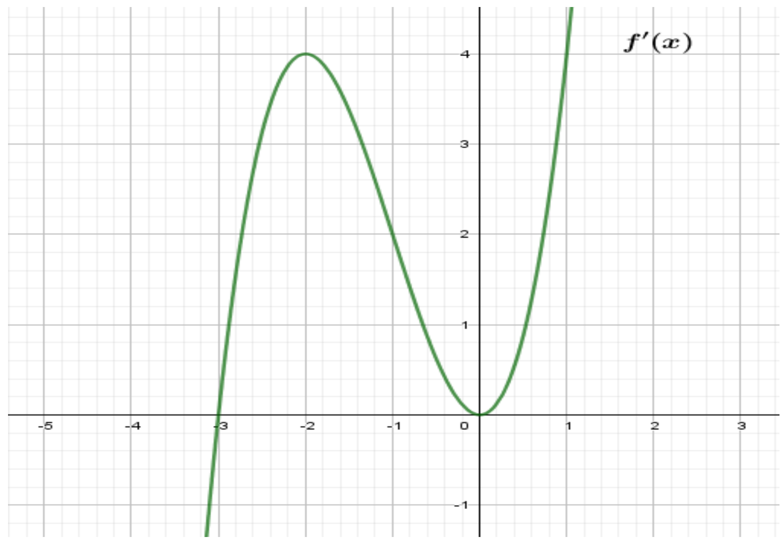
Sea $P(x)$ *un polinomio de grado tres, con extremo relativo en* $(1,1)$ *y punto de inflexión en* $(0,5)$ *. Determinar el polinomio.*

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Derivadas 11*

Halla los coeficientes a, b *y* c *sabiendo que la función* $f(x): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ *definida por* $f(x) = x^3 + a x^2 + b x + c$ *tiene en* $x = 1$ *un punto de derivada nula que no es extremo relativo y que la gráfica pasa por el punto* $(1,1)$ *.*

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Derivadas 16*

A partir de la gráfica (ver imagen) de la función derivada $f'(x)$ *obtener los intervalos de crecimiento, los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función original* $f(x)$ *.*



Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Valor absoluto 2*

Sea la función $f(x)=x^2-|x|$ *. Estudiar su derivabilidad, monotonía y extremos relativos.*

15 – Curvatura y puntos de inflexión

Las funciones con forma U se denominan convexas y su segunda derivada en esos puntos es positiva.

Las funciones con forma ∩ se denominan cóncavas y su segunda derivada en esos puntos es negativa.

La condición necesaria de punto de inflexión (cambio de curvatura) es que la segunda derivada evaluada en ese punto sea cero: $f''(x)=0$ Los puntos que cumplen esta condición necesaria son los candidatos a puntos de inflexión.

Si la segunda derivada evaluada en un punto es cero, ese punto será candidato a punto e inflexion. ¿Cómo comprobarlo? Aplicando una condición suficiente.

La primera condición suficiente implica representar en la recta real los candidatos a puntos de inflexión y los puntos frontera del dominio de definición. Evaluamos la segunda derivada en cada intervalo. Si alrededor de un candidato a punto de inflexión hay cambio de curvatura, tendremos punto de inflexión.

Una segunda condición consiste en realizar la tercera derivada y evaluarla en el candidato a punto de inflexión. Si el resultado es positivo hay punto de inflexión por el paso de ∩ a **U** en la curvatura. Si el resultado es negativo hay punto de inflexión por el paso de **U** a ∩ en la curvatura. Y si la tercera derivada es nula, no sabemos si hay punto de inflexión.

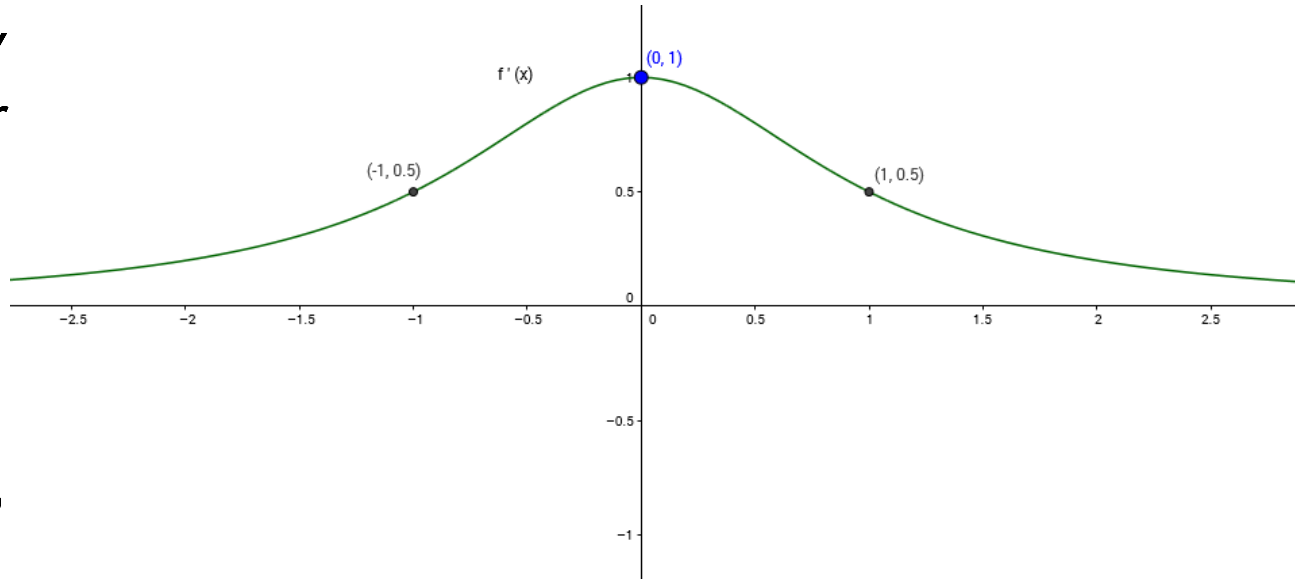
Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Derivadas 9 , 11 y 16 (ejemplos propuestos anteriormente en el apartado 13 sobre monotonía y extremos relativos)*

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Derivadas 12*

Sea la función $f(x)=\frac{x}{e^x}$ *definida en toda la recta real. Determina el punto de la gráfica en el que la pendiente de la recta tangente es mínima.*

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Estudiar funciones 6*

Indica la monotonía, extremos relativos y puntos de inflexión de $f(x)$ *a partir de la siguiente gráfica de su derivada* $f'(x)$ *.*



Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Estudiar funciones 8*

Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentracion en sangre del principio activo viene dada por $c(t)=t\,e^{-t/2}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de $c(t)$ e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo.

Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.

16 – Diferencia entre extremos relativos y absolutos

Un máximo absoluto, en un intervalo, posee la imagen más grande posible. Un mínimo absoluto, posee la imagen más pequeña.

Los extremos relativos se obtienen con la condición necesaria $f'(x)=0$ y luego aplicando condición suficiente.

¿Cómo decidir entre ellos quién posee las imágenes más grande o más pequeña en un intervalo $[a,b]$?

Si x_0 es el extremo relativo, hacemos una tabla con $f(a), f(x_0), f(b)$. El valor mayor será el máximo absoluto y el menor será el mínimo absoluto.

¿Y si el dominio es toda la recta real, o un intervalo que llega hasta infinito?

Debemos dibujar por completo la función para decidir si hay o no extremos absolutos.

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Estudio y representación de funciones 1*

Sea la función $f:(0,+\infty)$ *y definida por* $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$ *. Halla los extremos absolutos de* $f(x)$ *(abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan) en el intervalo* $[\frac{1}{e},e]$ *.*

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Estudio y representación de funciones 9*

Obtener extremos absolutos de $f(x)=(x^2-3)e^{-x+2}$ *en el intervalo* $[-2,4]$

.

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Estudiar funciones 7*

El número de litros por metro cuadrado que llovíó en un determinado lugar viene dado por la función siguiente:

$$Q(t)=\frac{-t^3}{8}+\frac{3t^2}{2}-\frac{9t}{2}+10$$

Donde t es el tiempo en días que va desde $t=1$ (lunes) hasta $t=8$ (lunes de la semana siguiente).

a) Determina en qué día de la semana llovió más y en que día llovió menos. ¿Cuántos litros por metro cuadrado llovió esos días?

b) Representa gráficamente la función durante los 8 días.

17 – Estudio completo de una función. Caso simplificado: boceto

El estudio completo de una funcion implica dominio, cortes con los ejes, simetría, asíntotas, crecimiento y extremos relativos, curvatura y puntos de inflexión, y dibujar la gráfica.

Si solo piden un boceto, suele ser de funciones elementales cuyas gráficas son fácilmente conocidas. Por ejemplo:

- Los polinomios no tienen asíntotas.
- Una parábola $f(x)=ax^2\ bx+c$ es convexa si $a>0$ y cóncava si $a<0$.
- Repasar gráfica de $f(x)=\ln(x)$ y de $f(x)=e^x$
- Si $k>0$ tenemos desplazamiento vertical ascendente con $f(x)+k$ y vertical descendente con $f(x)-k$. Y tenemos desplazamiento horizontal a la derecha con $f(x-k)$ y desplazamiento horizontal a la izquierda con $f(x+k)$.
- En valor absoluto de funciones elementales es práctico dibujar la gráfica de la función original, y una vez pintada sobre los ejes,

aplicarle el valor absoluto pasando a positivo los tramos donde la función es negativa.

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Valor absoluto 3*

Representar sobre una misma gráfica las funciones $f(x)=|x^2-1|$ *y* $g(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ *. Obtener puntos de corte de ambas gráficas.*

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Estudiar funciones 2*

Sea la función definida por $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$ *. Estudia el dominio, los puntos de corte con los ejes, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos.*

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Estudiar funciones 10*

Dibuja sobre los mismos ejes $f(x)=\cos(x)$ *y* $g(x)=sen(x)$ *en el intervalo* $[0,\pi/2]$ *.*

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Estudiar funciones 11*

Dibuja sobre los mismos ejes $f(x)=x^2-2x$ *y* $g(x)=-x^2+4x$

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Estudiar funciones 12*

Considera las funciones $f(x)$ *y* $g(x):\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ *dadas por* $f(x)=6x-x^2$ *y* $g(x)=|x^2-2x|$ *. Esboza el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y calcula los puntos de corte de dichas gráficas.*

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Estudiar funciones 13*

Esboza el recinto limitado por la recta $y=4-2x$ *y las gráficas de* $f(x)=3-x^2$ *y* $g(x)=\frac{-x^2}{4}$ *. Calcula todos los puntos de corte entre las gráficas (las dos curvas y la recta).*

18 – Vector y Segmento en dos dimensiones. Mediatriz de un segmento en dos dimensiones. Ángulo formado por una recta en dos dimensiones con el eje horizontal (pendiente)

Dados dos puntos $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, su vector resulta de hacer componentes finales menos iniciales:

$$\vec{AB}=(x_2-x_1, y_2-y_1)$$

La distancia entre ambos puntos es el módulo del vector:

$$|\vec{AB}|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)}$$

La pendiente del vector se obtiene dividiendo segunda componente entre primera:

$$m_{\vec{AB}}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$$

La pendiente del vector coincide con la pendiente de la recta paralela a él. Conocido un punto de la recta (x_0, y_0) y su pendiente m , podemos escribir la ecuación punto pendiente de la recta:

$$m=\frac{y-f(x_0)}{x-x_0}$$

La mediatriz de un segmento pasa por el punto medio del segmento y es perpendicular a la recta que une los puntos del segmento (por lo que el producto de las pendientes da igual a -1).

El punto medio de un segmento se obtiene con la semisuma de las coordenadas de los extremos:

$$Punto\ medio=(\frac{x_1+x_2}{2},\frac{y_1+y_2}{2})$$

La tangente del ángulo que forma la recta con el eje horizontal OX es igual a la pendiente de la recta:

$$tg(\alpha)=m$$

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Estudiar funciones 15*

Obtener la recta mediatriz del segmento de extremos $A(0,0)$ *y* $(4,2)$ *.*

19 – Teorema de Bolzano y Rolle

Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y si cumple que $f(a)\cdot f(b)<0$. El Teorema de Bolzano concluye que al menos existe una solución de la función en ese intervalo abierto: $\exists c\in(a,b)/f(c)=0$.

Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo cerrado $[a,b]$ y derivable en el intervalo abierto (a,b) , y se cumple que $f(a)=f(b)$. El Teorema de Rolle concluye que al menos existe un valor perteneciente al intervalo abierto con derivada nula: $\exists c\in(a,b)/f'(c)=0$.

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Derivadas 5*

Demuestra que la función $f(x)=x-\sqrt{x}$ tiene una única solución para $x>\frac{1}{4}$.

20 – Composición de funciones y función inversa

La composición de funciones implica aplicar una función dentro de otra.

Dos funciones son inversa si al componerse, en ambos sentidos, resulta la función identidad x .

Si existe función inversa, se puede obtener despejando la variable x en función de y y haciendo, finalmente, un intercambio de variables $x \Leftrightarrow y$.

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Estudiar funciones 14*

Obtener la inversa de $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ *y comprobar que* $(f \circ f^{-1})(x)=x$ *y que* $(f^{-1} \circ f)(x)=x$

21 – Romper valor absoluto

No podemos operar en una ecuación donde aparezca valor absoluto. Antes debemos romperlo. Para ello sacamos raíces del numerador y del denominador del argumento del valor absoluto, los situamos en la recta real, y vemos el signo que toma ese argumento en los diferentes argumentos.

Donde sea positivo, quitamos las barras de valor absoluto.

Donde sea negativo, quitamos las barras y colocamos delante un signo – que afecta a todo el argumento.

En el caso de dibujar una función que toda ella (ojo, toda la función) esté dentro del valor absoluto es práctico dibujar la función sin valor absoluto y luego, sobre su gráfica, pasar a positivo lo que sea negativo.

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Valor absoluto 1*

Estudiar la derivabilidad de $f(x)=x-\left|\frac{x^2-1}{x}\right|$ *en su dominio de definición.*

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Valor absoluto 3*

Representar sobre una misma gráfica las funciones $f(x)=|x^2-1|$ *y* $g(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ *. Obtener puntos de corte de ambas gráficas.*

22 – Determinar función a partir de condiciones de contorno

Tras haber estudiado asíntotas, interpretación geométrica de la derivada, extremos relativos y puntos de inflexión, son comunes los ejercicios donde hay que detectar parámetros de una función que cumplen una serie de condiciones.

Si debemos determinar n-parámetros, tendremos que buscar en el enunicado n-condiciones.

¿Cuáles son las condiciones más típicas en estos ejercicios?

- Si $f(x)$ pasa por $(x_{0,} y_0) \rightarrow f(x_0)=y_0$
- Punto crítico en $x_0 \rightarrow f'(x_0)=0$
- Extremo relativo en $x_0 \rightarrow f'(x_0)=0$
- Punto de inflexión en $x_0 \rightarrow f''(x_0)=0$
- Punto crítico que no es extremo relativo → es un punto de inflexión → $f'(x_0)=0$ y $f''(x_0)=0$

- En x_0 la recta tangente a la función tiene pendiente igual a $m \rightarrow$ $f'(x_0)=m$
- Asíntota horizontal $y=k \rightarrow \lim_{x \to \pm\infty} f(x)=k$
- En cociente de funciones, si hay asíntoa vertical en $x=x_0$ significa que el denominador se anula para $x=x_0$.
- Rectas paralelas, tienen la misma pendiente. La pendiente de una recta en forma explícita $y=mx+n$ es igual al factor m , y el punto de corte con el eje vertical es $(0,n)$.

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Derivadas 6*

Sea $f(x)=a+bx+cx^2$ *, cuya gráfica pasa por* $P(0,1)$ *y* $Q(2,0)$ *. La recta tangente a la función en el punto* P *es paralela al eje OX. Calcula* a,b,c *.*

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Derivadas 15*

Halla los valores a, b *y* c *sabiendo que la gráfica de la función* $f(x)=\frac{ax^2+b}{x+c}$ *tiene una asíntota vertical en* $x=1$ *, una asíntota oblicua de pendiente* 2 *, y un extremo local en el punto de abscisa* $x=3$

23 – Optimización

Sabiendo que cada ejercicio de optimización “es de su padre y de su madre”, podemos indicar unos pasos comunes a la hora de resolverlos:

1. Tener claro cuál es la función a optimizar.
2. Esta función suele depender de dos variables (aunque no siempre).
3. Buscar en el enunciado una relación entre las variables y sustituir esta relación en al función, para obtener una función que dependa solo de una variable.
4. Optimizar esa función (ya sea maximizar o minimizar), aplicando condición necesaria de extremo relativo y una de las condiciones suficientes.
5. Ojo, a veces el enunciado me pide obtener el valor final de cada variable o el valor final de la función. No olvidar hacerlo.

¿Cuáles son las fórmulas más típicas que aparecen en optimización?

- Perímetro de un polígono: suma de los lados
- Área del rectángulo: $\acute{A}rea = base \cdot altura$
- Área del triángulo: $\acute{A}rea = \frac{1}{2} \cdot base \cdot altura$
- Pitágoras en triángulos rectángulos: $h^2 = a^2 + b^2$
- Perímetro de una circunferencia: $P = 2\pi \cdot r$
- Área del círculo: $\acute{A}rea = \pi \cdot r^2$
- Volumen de un cilindro: $Volumen = \pi \cdot r^2 \cdot h$
- Área de las caras de un cilindro (con dos tapaderas): $\acute{A}rea = 2\pi \cdot r^2 + 2\pi r h$
- Volumen de una esfera: $Volumen = \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$
- Área de la superficie exterior de una esfera: $\acute{A}rea = 4\pi \cdot r^2$

- Volumen cono: $Volumen=\frac{1}{3}\pi\cdot r^2\cdot h$
- Perímetro de un arco circular de ángulo α en radianes:
  $Perímetro=\alpha\cdot r+2r$
- Área de un arco circular de ángulo α en radianes:
  $Área=\frac{\alpha}{2}\cdot r^2$
- Pasar de radianes a grados: $360º=2\cdot\pi$
- Velocidad media: $Velocidad=\frac{espacio}{tiempo}$
- Precio total de un producto que mide k unidades y que sabemos su precio p por unidad de longitud: $Precio=k\cdot p$
- Precio total de una superfice que mide k unidades cuadradas y que sabemos su precio p por unidad de área: $Precio=k\cdot p$

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Optimización 3*

Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para 13,5 metros cúbicos. Para ello se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcula las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea al mínimo posible.

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Optimización 5*

Encontrar, de entre todas las rectas que pasan por el punto $(1,2)$ *, aquella que forma con la partes positivas de los ejes de coordenadas un triángulo de área mínima. Obtener dicha área mínima.*

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Optimización 11*

Sea una ventana cuya parte inferior es un rectángulo y la superior un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de $6m$ *, calcula las dimensiones de la ventana para que entre la cantidad de luz máxima.*

Ejemplo: *PDF Repaso 1 sobre continuidad y derivabilidad – Optimización 12*

Con un hilo de 60 cm de longitud, forma un rectángulo que al girar alrededor de uno de sus lados, engendre un cilindro de área lateral máxima. Obtener dimensiones del rectángulo y el valor del área lateral máxima.

24 – La integral indefinida como proceso inverso de la derivada. Concepto de primitiva. La integral indefinida como una familia de infinitas primitivas. Integrales inmediatas e “ideas felices”

En una primera aproximación, la integral indefinida es el proceso inverso a la derivada. Ahora me dan la función derivada y debo encontrar la función promitiva.

Esta primivita solemos representarla como $F(x)$. Por lo tanto:

$$\int f(x)\,dx = F(x) + C$$

Donde a constante de integración C aparece porque la derivada de un número vale 0, por lo que existen infinitas primitivas para una misma integral. El conjunto de estas infinitas primitivas se llama integral indefinida.

En esta primr aproximación, integrar no es más que aplicar la tabla de derivación en sentido contrario. Así tendremos las integrales inmediatas.

Algunas propiedades importante:

- La integral de la suma es la suma de las integrales.
- La integral de un número por una función, es el número por la integral de la función.

Y algunos truquillos o “ideas felices”:

- Si tenemos la integral de un cociente, donde el numerador es la derivada del denominador, el resultado es el logaritmo neperiano del denominador.
- Si multiplico dentro de la integral por un número k , fuera de la integral debo multiplicar por $\frac{1}{k}$.
- Si tengo integral de una función elevada a un exponente multiplicada por la derivada de esa función, es buena idea comparar el resultado con la derivada de la potencia de una función e identificar términos.
- Relaciones trigonométricas importantes: $sen^2(x)+\cos^2(x)=1$, $sen(x)\cdot\cos(x)=sen(2x)$, $\cos^2(x)-sen^2(x)=\cos(2x)$

- La integral $\int \sqrt[n]{x}\,dx$ podemos verla como una potencia: $\int x^{1/n}\,dx$
- La integral $\int \frac{1}{x^n}\,dx$ con $n>2$ podemos verla como una potencia de exponente impar: $\int x^{-n}\,dx$
- La integral $\int \frac{f(x)+g(x)+h(x)}{x^n}\,dx$ podemos romperla como $\int \frac{f(x)}{x^n}\,dx+\int \frac{g(x)}{x^n}\,dx+\int \frac{h(x)}{x^n}\,dx$

Ejemplo: *PDF Repaso 2 sobre integrales y áreas – Integrales inmeditas 1*
Calcula:

a) $\int \frac{x^3}{1+x^4}dx$ *b)* $\int \frac{e^x}{\sqrt{1+e^x}}dx$ *c)* $\int sen(x)\cdot\cos(x)dx$

d) $\int \sqrt{8-x}\,dx$ *e)* $\int \frac{1}{x^3}\,dx$ *f)* $\int \frac{\ln(x)}{x}\,dx$

g) $\int \frac{x+x^2-\sqrt{x}}{x}\,dx$ *h)* $\int x\cos\left(x^2\right)dx$ *i)* $\int \frac{1}{\sqrt[4]{x}}\,dx$

25 – Integrales de cociente de polinomios

Primero miramos grado de los polinomios.

Si el grado del numerador es mayor o igual que el grado del denominador, hacemos la división de polinomios. Y aplicamos el Teorema del Resto:

$$\int \frac{f(x)}{g(x)} dx = \int \left(Cociente + \frac{Resto}{g(x)}\right) dx$$

Si el grado del denominador es mayor que el grado del denominador, descomponemos el denominador en raíces y aplicamos el método de coeficientes indeterminados.

En Selectividad aparecerán denominadores solo con raíces simples, con múltiples o ambas raíces a la vez. No saldrán raíces complejas (aunque la integral inmediata $\int \frac{1}{1+x^2} dx = arcotg(x) + C$ hay que sabérsela).

Ejemplo: *PDF Repaso 2 sobre integrales y áreas – Integrales cocientes de polinomios 2*

Calcula $\int \frac{x^3}{x^2-5x+6}dx$

Ejemplo: *PDF Repaso 2 sobre integrales y áreas – Integrales cocientes de polinomios 5*

Calcula la siguiente integral en función de a *y* b *:* $I=\int \frac{ax+b}{x^2-3x+2}dx$

Ejemplo: *PDF Repaso 2 sobre integrales y áreas – Integrales cocientes de polinomios 7*

Calcula $\int \frac{x^2+5}{x^3-2x^2+x}dx$

26 – Integrales por cambio de variable

Aunque en estos ejercicios suele ofrecerse, como ayuda, el cambio de variable, no está de más saber de antemano los siguientes casos:

- Impar en seno: $\cos(x)=t$
- Impar en coseno: $sen(x)=t$
- Par en el producto seno por coseno: $tg(x)=t$
- Raíces con el mismo radicando y diferentes índices: $radicando=t^m$, donde m es el m.c.m. de los índices.

Una vez tengamos el cambio de variable, diferenciamos. Es decir, derivamos a ambos lados del cambio de variable y colocamos el diferencial correspondiente.

Sustituimos tanto el cambio de variable como el nuevo diferencial en la integral. Toda la nueva integral debe quedar en función de la nueva variable t .

Tras resolver la integral, no olvidar deshacer el cambio de variable.

Si tenemos una integral definida donde hemos aplicado un cambio de variable, debemos deshacer el cambio antes de aplicar la regla de Barrow (ver **apartado 28** sobre condiciones de contorno).

Ejemplo: *PDF Repaso 2 sobre integrales y áreas – Integrales cambio de variable 2*

Calcula $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$

Ejemplo: *PDF Repaso 2 sobre integrales y áreas – Integrales cambio de variable 3*

Calcula $\int_1^{16} \frac{d\,x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$

Ejemplo: *PDF Repaso 2 sobre integrales y áreas – Integrales cambio de variable 4*

Utilizando el cambio de variable $1+x^2=t^2$, calcule una primitiva $F(x)$ de la función $f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$ que cumpla $F(0)=0$.

Ejemplo: *PDF Repaso 2 sobre integrales y áreas – Integrales cambio de variable 6*

Calcula $\int \frac{1}{1+tg(x)} dx$

Ejemplo: *PDF Repaso 2 sobre integrales y áreas – Integrales cambio de variable 7*

Resuelve $\int \frac{e^x}{e^x+e^{2x}-2} dx$ (ayuda: $e^x=t$)

27 – Integrales por método por partes

Este método es especialmente práctico en producto de funciones que, aparentemente, son muy distintas entre sí.

Una vez detectadas ambas funciones, la que es más difícil de integrar será la que se derive en el método de partes y la otra función se integra. Es decir:

$$I=\int u(x)\cdot v'(x)\,dx=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)\,dx$$

Si aplicamos partes a una integral definida, no olvidemos que los límites de integración afectan a toda la expresión del método de partes. Una buena idea puede ser resolver primero la integral indefinida, y con la solución por delante, le aplicamos los límites de integración y la regla de Barrow.

Es bastante típico tener que aplicar partes dos o tres veces seguidas, de manera encadenada.

Y también es muy típico el ejercicio donde dan la segunda derivada d euna función, y hay que obtener la función original tras aplicar partes dos veces. No olvides que cada integración genera una constante de integración (C, D, ...), que puede calcularse su valor aplicando las condiciones de contorno del enunciado.

Un último consejo. En las integrales del logaritmo, de la arcotangente o del arcoseno, donde aparentemente solo aparece una única función, debemos verla como multiplicada por el valor 1 , y así tendremos dos funciones multiplicadas sobre las que aplicar el método de partes.

Ejemplo: *PDF Repaso 2 sobre integrales y áreas – Integrales por partes 1*

Resuelve $\int x^2 \cdot \cos(x)\,dx$

Ejemplo: *PDF Repaso 2 sobre integrales y áreas – Integrales por partes 2*

Calcula una función primitiva de $f'(x)=x\cdot\ln(x^2+1)$ que pase por el punto $(0,1)$.

Ejemplo: *PDF Repaso 2 sobre integrales y áreas – Integrales por partes 3*

Sea $f''(x)=\ln(x)$ *. Obtener* $f(x)$ *sabiendo que su gráfica pasa por el* $(1,0)$ *y que la pendiente de la recta tangente a la función en* $x=2$ *es igual* 1 *.*

Ejemplo: *PDF Repaso 2 sobre integrales y áreas – Integrales por partes 10*

Resuelve $\int x^2 e^{2x} dx$

Ejemplo: *PDF Repaso 2 sobre integrales y áreas – Integrales por partes 11*

Resuelve $\int arcosen(x) dx$

Ejemplo: *PDF Repaso 2 sobre integrales y áreas – Integrales por partes 12*

Resuelve $\int sen(x)e^x\,dx$

28 – Determinar constante de integración con condición de contorno

Siempre que realizamos una integral indefinida, aparece una constante de integración.

Podemos determinar esta constante si conocemos una condición de contorno, es decir, si conocemos un punto por donde deba pasar la primitiva: $F(x_0)=y_0$

Ejemplo: *PDF Repaso 2 sobre integrales y áreas – Integrales por cambio de variable 4*
Utilizando el cambio de variable $1+x^2=t^2$ *, calcule una primitiva* $F(x)$ *de la función* $f(x)=\frac{x^3}{\sqrt{1+x^2}}$ *que cumpla* $F(0)=0$ *.*

Ejemplo: *PDF Repaso 2 sobre integrales y áreas – Integrales por partes 2*

Calcula una función primitiva de $f'(x)=x\cdot\ln(x^2+1)$ *que pase por el punto* $(0,1)$ *.*

Ejemplo: *PDF Repaso 2 sobre integrales y áreas – Integrales por partes 3*

Sea $f''(x)=\ln(x)$ *. Obtener* $f(x)$ *sabiendo que su gráfica pasa por el* $(1,0)$ *y que la pendiente de la recta tangente a la función en* $x=2$ *es igual* 1 *.*

29 – Integral definida y regla de Barrow

Cuando fijamos un límite inferior y un límite superior en un integral, tenemos una integral definida. El resultado es un número, que puede ser negativo, positivo o cero.

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

La integral definida cumple las mismas propiedades que la integral indefinida. Además, se cumple:

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

¿Cómo obtener el resultado numérico de la integral definida?

Con la regla de Barrow, que es un corolario (consecuencia) del Teorema Fundamental del cálculo integral.

$\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$, siendo $F(x)$ la primitiva de $f(x)$

Recuerda: si en la integral has realizado cambio de variable, no puedes evaluar la primitiva en los límites de integración hasta que hayas desecho el cambio de variable.

Y puede ser práctico primero resolver la integral indefinida y, luego, aplicar límites de integración y la regla de Barrow.

Ejemplo: *PDF Repaso 2 sobre integrales y áreas – Integrales definidas y Barrow 3*

Calcula $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(x)} dx$

Ejemplo: *PDF Repaso 2 sobre integrales y áreas – Integrales definidas y Barrow 5*

Si $P(x)$ *es un polinomio de tercer grado, con un punto de inflexión en el punto* $(0,5)$ *y un extremo relativo en el punto* $(1,1)$ *, calcule* $\int_0^1 P(x)dx$ *.*

Ejemplo: *PDF Repaso 2 sobre integrales y áreas – Integrales definidas y Barrow 7*

Calcula $\int_3^5 \frac{x^2+x+6}{x-2}\,dx$

30 – Área encerrada por una función con el eje horizontal en un intervalo

Una función encierra con el eje horizontal un área en un intervalo $[a, b]$. Si la función está por encima del eje horizontal, ese área se calcula:

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)\,dx$$

Si la función está por debajo del eje horizontal, ese área se calcula:

$$\text{Área} = \left| \int_a^b f(x)\,dx \right|$$

Si la función corta al eje horizontal, se aplica en cada tramo uno de los dos casos anteriores. Para obtener los puntos de corte, igualamos la función a cero y resolvemos.

Por definición, el área siempre es una cantidad positiva y siempre va acompañada de la expresión unidades cuadradas: u^2 .

Ejemplo: *PDF Repaso 2 sobre integrales y áreas – Integrales Áreas 5*

Calcula el área limitada por la curva $y=(x+1)e^{2x}$ y las rectas $x=0$, $x=1$ e $y=0$.

Ejemplo: *PDF Repaso 2 sobre integrales y áreas – Integrales Áreas 6*

Calcula el área limitada por $f(x)=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ *, el eje* OX *y las rectas* $x=0$ *y* $x=\ln(5)$ *.*

31 – Área encerrada entre dos funciones

Dos funciones que se corten, o que estén delimitadas a un intervalo $[a,b]$, también generan un área.

Los puntos de corte entre ambas funciones se realiza igualando las funciones en cuestión (por lo general son dos o tres funciones).

Si los puntos de intersección son, por ejemplo, x_1 y x_2 , el área encerrada por dos funciones es la integral definida de la función que permanece por arriba (por ejemplo, $f(x)$) menos la función que permanece por debajo (por ejemplo, $g(x)$).

$$Área=\int_{x_1}^{x_2}(f(x)-g(x))dx$$

Si hemos colocado correctamente las funciones, la integral definida anterior siempre resulta un valor positivo. En estos ejercicios es muy común hacer bocetos de funciones elementales (asunto que ya estudiamos en apartados anteriores).

Ejemplo: *PDF Repaso 2 sobre integrales y áreas – Integrales Áreas 11*
Sea $f(x)=-x^2+2x+3$ *y la recta* $2x+y-7=0$ *. Calcula el área encerrada por las gráficas de ambas funciones con el semieje positivo* OX *.*

Ejemplo: *PDF Repaso 2 sobre integrales y áreas – Integrales Áreas 17*
a) Calcule los puntos en que las dos curvas $y=e^x$ *,* $y=-x^2$ *cortan a las rectas* $x=0$ *,* $x=1$

b) Calcula el área de la región plana limitada del apartado anterior.

Ejemplo: *PDF Repaso 2 sobre integrales y áreas – Integrales Áreas 18*
Dibujar y calcular el área de la región plana limitada por las siguientes rectas: $y=3x$ *,* $y=x$ *,* $y=-x+8$ *,* $x=3$ *.*

Ejemplo: *PDF Repaso 2 sobre integrales y áreas – Integrales Áreas 19*
Calcular el área que encierra la función $f(x)=e^x$ *con la recta* $y=e$ *y el eje vertical (ojo: con el eje vertical).*

32 – Teorema fundamental del cálculo integral

El Teorema afirma:

Si $f(x)$ es una función continua en $[a, b]$, la función definida por $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ es una función continua y derivable, que a la vez es una primitiva de $f(x)$ y cumple la siguiente igualdad:

$F'(x)=f(x), \forall x\in[a, b]$

Es decir, la derivada de $F(x)$ coincide con la función $f(x)$.

Ejemplo: *PDF Repaso 2 sobre integrales y áreas – Integrales Teorema Fundamental 1*

Sea $f(x)=\frac{\ln(x)}{2x}$ *para* $x>0$ *. Y sea* $F(x)$ *la primitiva de* $f(x)$ *, que cumple* $F(1)=2$ *.*

a) Calcula $F'(e)$ *.*

b) Halla la ecuación de la recta tangente a $F(x)$ en el punto de abscisa $x=e$.

Ejemplo: *PDF Repaso 2 sobre integrales y áreas – Integrales Teorema Fundamental 3*

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=1$ sabiendo que $f(0)=0$ y $f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x+1}$ para $x>-1$.

33 – Problemas con enunciado para formar sistema de ecuaciones. Tipos de solución y número de soluciones. Crer sistema a partir de un enunciado

Dado un sistema $m \times n$ de m ecuaciones y n incógnitas, discutir sus soluciones de determinar si es:

- Sistema Compatible Determinado (S.C.D.) con solución única.
- Sistema Compatible Indeterminado (S.C.I.) con infinitas soluciones.
- Sistema Incompatible (S.I.) sin solución.

Si el sistema depende de un parámetro o coeficiente, según los valores de ese coeficiente podemos tener diferentes tipos de solución.

Por ejemplo, puede ocurrir que si el parámetro $a=2$ tengamos un S.C.I. y si $a=5$ tengamos S.I.

Un error muy típico: olvidar el estudio cuando $a \neq \{2,5\}$. ¡No olvidarlo!

Recuerda que la matriz de números que multiplica a las incógnitas se llama matriz del sistema, y la matriz que incluye a los términos independientes se llama matriz ampliada.

El ejemplo más típico es un sistema 3x3, pero recuerda que podemos tener sistemas con más ecuaciones que incógnitas, o con más incógnitas que ecuaciones.

La notación matricial de un sistema 3x3 quedaría:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & c_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & c_3 \end{array}\right)$$

Donde a_{ij} es el coeficiente asociado a la fila-i y a la columna-j. Mientras que c_i es el término independiente de la fila-i.

La notación que vamos a seguir para Filas es F_i y para Columnas C_i .

Ejemplo: *PDF Repaso 3 sobre sistemas, matrices y determinantes – Sistemas 1*

a) Justifica que es posible hacer un pago de 34,50 euros cumpliendo las siguientes restricciones.

- *Utilizando únicamente monedas de 50 céntimos de euro, de 1 euro y de 2 euros.*
- *Se tienen que utilizar exactamente un total de 30 monedas.*
- *Tiene que haber igual número de monedas de 1 euro como de 50 céntimso y 2 euros juntas.*

¿De cuántas maneras y con cuántas monedas de cada tipo se puede hacer el pago?

b) Si se redondea la cantidad a pagar a 35€, justifica si es posible o no seguir haciendo el pago bajo las mismas condiciones que en el apartado anterior.

Ejemplo: *PDF Repaso 3 sobre sistemas, matrices y determinantes – Sistemas 3*

a) Un boxeador ha disputado 20 combates en el año 2018. Por cada combate ganado cobraba 3 mil euros, 2 mil por combate nulo y mil por combate perdido. En total obtuvo 40 mil euros en 2018. Si las cantidades cobradas hubieran sido 6 mil euros por combate ganado, 4 mil euros por nulo y mil por perdido, habría obtenido 72 mil eruros. Con estos datos, ¿es posible saber cuántos combates ganó, cuantos hizo nulo y cuantos perdió? En caso afirmativo, calcúlalos.

b) Estudia si hay alguna cantidad k que sustituya a los 6 mil euros por combate ganado del apartado anterior, y que hiciera imposible la solución del problema dentro del campo de los número reales.

34 – Método de Gauss para sistemas de ecuaciones. Rango como número de ecuaciones no nulas sin absurdo matemático

En un sistema de ecuaciones podemos intercambiar el orden de las filas, y podemos intercambiar el orden de las columnas asociadas a una incógnita. Estos cambios lo denotamos así:

- $F_i \Leftrightarrow F_j \rightarrow$ Intercabiar posición de la Fila-i con la Fila-j
- $C_i \Leftrightarrow C_j \rightarrow$ Intercabiar posición de la Columna-i con la Columna-j

Además, en el método de Gauss, en la búsqueda de hacer nulos los coeficientes por encima o por debajo de la diagonal principal, podemos aplicar transformaciones lineales entre las filas (solo entre las filas) del sistema:

- $F'_i = a F_i + b F_j \rightarrow$ La nueva Fila-i se obtiene multiplicando por a la antigua Fila-i y sumando la antigua Fila-j multiplicada a su vez por b .

En estas transformaciones lineales, el número que multiplica a la antigua fila que estamos transformando no puede ser nulo. Es decir: $a \neq 0$ **.**

Esto hay que tenerlo en cuenta cuando el sistema depende de un parámetro. Una vez que obtengamos los candidatos para hacer la discusión de casos del tipo de solución, tenemos que **comprobar si inhabilitan el método de Gauss** en alguna transformación lineal.

Si ocurre esto, deberemos sustituir ese valor antes de la transformación no permitida y estudiar el caso particular del sistema que nos queda.

Además, durante el proceso de Gauss si:

- Aparece una ecuación (fila) con todos los términos nulos ($0=0$), podemos tacharla (obviarla).
- Aparecen dos ecuaciones (filas) iguales, podemos tachar una de las dos.
- Aparecen dos ecuaciones (flas) proporcionales, podemos tachar una de las dos.

Tras terminar el método de Gauss, si encontramos una ecuación (fila) con absurdo matemático (por ejemplo, $2=0$), estaremos ante un S.I. sin solución.

Si tras terminar Gauss, tachar las filas nulas o propocionales, comprobar que ningún paso se inhabilita y que no aparecen absurdos matemáticos, podremos afirmar:

- Si el número de ecuaciones no nulas es igual al número de incógnitas, tendremos S.C.D. con solución única.
- Si el número de ecuaciones no nulas es menor que el número de incógnitas, tendremos S.C.I. con infinitas soluciones. Y la diferencia entre el número de incógnitas y ecuaciones es el número de parámetros libres.

No olvides explicar todo esto con palabras. No basta con obtener los números y operar, sino que **debes explicar con palabras lo que haces, por qué lo haces y qué consecuencias tienen los resultados obtenidos**.

Adelantando cosas de geometría en tres dimensiones, recuerda que en los sistemas de 3 incógnitas cuya solución tenga un parámetro libre será una recta. Y si la solución tiene dos parámetros libres, tendremos un plano.

Fíjate que hemos razonado todo sin hacer uso del concepto de rango. Si queremo hacerlo, debemos recordar que el rango de un sistema es el número de ecuaciones no nulas que quedan tras aplicar Gauss, eliminar las filas nulas y las filas proporcionales, y tras comprobar la ausencia de absurdos matemáticos.

Ejemplo: *PDF Repaso 3 sobre sistemas, matrices y determinantes – Sistemas 1*

Sea el sistema de ecuaciones $\begin{Bmatrix} x+y+(m+1)z=2 \\ x+(m-1)y+2z=1 \\ 2x+my+z=-1 \end{Bmatrix}$

a) Discutir sus posibles soluciones según el valor del parámetro $m \in \mathbb{R}$ *.*

b) Resolver el sistema, si es posible, para $m=2$ *.*

Ejemplo: *PDF Repaso 3 sobre sistemas, matrices y determinantes – Sistemas 7*

Dado el sistema $\begin{Bmatrix} x+y+z=2 \\ a\,x+2\,y+3\,z=0 \\ a^2\,x+4\,y+9\,z=-12 \end{Bmatrix}$

a) Estudiar la compatibilidad del sistema según el parámetro real a *.*

b) Resolver, si es posible, para $a=3$ *.*

Ejemplo: *PDF Repaso 3 sobre sistemas, matrices y determinantes – Sistemas 8*

Dado el sistema de ecuaciones $\begin{Bmatrix} 4\,x+a\,y-2\,z=-1 \\ x+y-a\,z=-1 \\ x+y+(2\,a+2)\,z=6-a \end{Bmatrix}$

a) Estudiar las posibles soluciones según el valor de a *.*

b) Resolver para todos los casos en que el sistema sea compatible.

35 – Teorema de Rouché Frobenius. Rango como dimensión del mayor menor no nulo

Con Rouché-Frobenius vemos el sistema como dos matrices, la matriz del sistema A y la matriz ampliada A/C. Y estudiamos el rango de ambas matrices. Lo más práctico es obtener estos rangos mediante determinantes (**ver siguiente apartado 36 sobre determinantes**), sabiendo que el rango coincide con la dimensión del mayor menor no nulo.

De esta forma, según el Teorema:

- Si rango(A) no coincide con rango(A/C) el sistema es S.I. sin solución.
- Si ambos rangos coinciden, tendremos solución.
  - Si rango(A) = rango(A/C) = nº incognitas, tendremos S.C.D. con solución única.
  - Si rango(A) = rango(A/C) < nº incognitas, tendremos S.C.I con infinitas soluciones. La diferencia entre el nº incógnitas y el rango es el número de parámetros libres.

Para el caso estándar de sistema 3x3 que dependa de un parámetro, el procedimiento a seguir es:

- Calcular det(A) para obtener valores de discusión de casos. Igualamos det(A)=0 porque si el determinante es nulo el rango será igual a 3.
- Con cada valor de la discusión de casos, comprobamos si el rango(A) es 3, 2 ó 1. Y cuando lo tengamos, estudiamos el rango(A/C) para el caso concreto que estamos estudiando. Si al menos un menor de orden 3 de A/C es no nulo, el rango(A/C) será 3. Y solo si todos los menores de orden 3 son nulos, buscaremos un menor de orden 2 que sea no nulo.

Ejemplo: Rehacer los mismos ejercicios del apartado anterior sobre método de Gauss, pero aplicando determinantes y Teorema de Rouché-Frobenius.

36 – Determinantes y sus propiedades

E

37 – Matriz inversa: método directo, Gauss-Jordan y usando la matriz de adjuntos

E

38 – Operaciones con matrices: suma, producto, traspuesta, matriz n-ésima, matrices que conmutan, sistemas de ecuaciones matriciales

E