Problemas resueltos de geometría en tres dimensiones - repaso Bachillerato

Dificultad: ♣ *(fácil)* ♣♣ *(medio)* ♣♣♣ *(difícil)*

Índice de contenido

Índice temático

Rectas y planos en tres dimensiones

■ *Rectas y planos 1* ♣

Dado el punto $P(1,1,1)$ y el plano $\Pi : x-y+z=5$, calcular la ecuación paramétrica y la ecuación continua de la recta perpendicular al plano y que pasa por el punto.

De la ecuación general del plano podemos deducir su vector característico $\vec{u}_{\Pi}=(1,-1,1)$, perpendicular al plano.

Y con un vector paralelo a la recta y un punto de la recta, tenemos su ecuación paramétrica.

$$r:\left\{\begin{array}{l} x=1+\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1+\lambda \end{array}\right\}$$

Despejando el parámetro libre e igualando, tendremos la ecuación continua de la recta.

$$r:\frac{x-1}{1}=\frac{y-1}{-1}=\frac{z-1}{1}$$

■ *Rectas y planos 2* ♣

a) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $r: x-2=\frac{y-1}{3}=z+1$ **y al punto** $A(2,5,1)$

b) Obtener los puntos de corte del plano $\Pi: x+2y+4z-4=0$ **con los ejes cartesianos del espacio tridimensional.**

a) Podemos expresar la ecuación del plano a partir de dos vectores linealmente independientes y un punto del plano.

El punto lo tenemos: $A(2,5,1)$.

Un primer vector del plano sería uno de los vectores directores de la recta r que contiene. Es decir: $\vec{u}=(1,3,1)$.

Y si el punto A no pertenece a la recta r , podremos obtener un punto B de la recta y trazar el vector $\vec{AB}$, que será linealment independiente respecto al vector $\vec{u}=(1,3,1)$.

Comprobemos, entonces, que A no pertenece a r :

$2-2=\frac{5-1}{3}=1+1 \rightarrow 0=\frac{4}{3}=2$ → Absurdo matemático → El punto no pertenece a la recta.

Obtengamos ahora un punto de la recta. Viendo a ecuación continua, podemos tomar $B(2,1,-1)$.

El vector $\vec{AB}$ será: $\vec{AB}=(0,-4,-2)$. Por lo tanto ya tenemos todos los elementos para expresar la ecuación paramétrica del plano (como el enunciado no exige ninguna ecuación en concreto, planteo la paramétrica).

$$\Pi: \left\{ \begin{array}{c} x=2+\alpha \\ y=5+3\alpha-4\beta \\ z=1+\alpha-2\beta \end{array} \right\}$$

b) Sabemos que la ecuación segmentaria del plano $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ nos ofrece los puntos de corte con los ejes: $(a,0,0)$, $(0,b,0)$, $(0,0,c)$. Por lo tanto:

$$\Pi: x+2y+4z-4=0 \rightarrow \Pi: x+2y+4z=4 \rightarrow \Pi: \frac{x}{4}+\frac{y}{2}+z=1$$

Siendo los puntos de corte: $(4,0,0)$, $(0,2,0)$, $(0,0,1)$.

■ *Rectas y planos 3* ♣♣

a) Dada la recta $r:\begin{Bmatrix} x-2y+z=0 \\ x-z=0 \end{Bmatrix}$ **y los puntos** $P(1,-2,0)$ **y** $Q(0,1,3)$ **.**

a) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta r **y es paralelo al vector** $\vec{PQ}$ **.**

b) Hallar la ecuación de la recta perpendicular a r **, que pasa por** Q **e intersecta a** r **en un punto.**

a) Un plano queda determinado de manera única por un punto del plano y por dos vectores linealmente independientes del plano.

Si el plano contiene a la recta r podemos tomar el vector director de la recta como uno de los vectores del plano, y un punto de la recta como punto del plano. Para ello pasamos la recta de implícita a paramétricas.

$$r:\begin{Bmatrix} x-2y+z=0 \\ x-z=0 \end{Bmatrix} \rightarrow z=\lambda \rightarrow x=\lambda \ , \ y=\lambda \rightarrow r:\begin{Bmatrix} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=\lambda \end{Bmatrix}$$

$$A(0,0,0)\in r \ , \ \vec{u}_r=(1,1,1)$$

Si el vector $\vec{PQ}$ es paralelo al plano, podría ser nuestro segundo vector, siempre y cuando sea linealmente independiente respecto de $\vec{u}_r$.

$$\vec{PQ}=(-1,3,3)$$

Ambos vectores son linealmente independientes por no ser proporcionales, ya que $\frac{1}{-1}\neq\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

Por la determinación lineal del plano podemos obtener su ecuación general.

$$\Pi(\vec{u}_r,\vec{PQ},A):\begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 1 & 3 & y \\ 1 & 3 & z \end{vmatrix}=0 \rightarrow \Pi: z-y=0$$

b) Tomamos un punto arbitrario de la recta r , recordando que ese punto arbitrario tendrá como componentes la ecuación paramétrica de la recta: $A(\lambda,\lambda,\lambda)$.

Creamos el vector $\vec{QA}=(\lambda,\lambda-1,\lambda-3)$.

Si la recta solución corta a r en un punto y lo hace de manera perpendicular, el vector $\vec{QA}$ debe ser ortogonal al vector director $\vec{u}_r=(1,1,1)$ → Producto escalar nulo:

$$\vec{QA}\cdot\vec{u}_r=0 \rightarrow \lambda+\lambda-1+\lambda-3=0 \rightarrow \lambda=4/3$$

Con este valor del parámetro, sacamos el vector director de la recta solución:

$$\vec{QA}=(4/3,1/3,-5/3)$$

Y con el vector director de la recta solución y el punto $Q(0,1,3)$ podemos obtener su ecuación paramétrica → $s:\left\{\begin{array}{c} x=\frac{4}{3}a \\ y=1+\frac{1}{3} \\ z=3-\frac{5}{3}a \end{array}\right\}$

■ *Rectas y planos 4* ♣♣

a) Para qué valor del parámetro a la recta $r:\left\{\begin{matrix} x+y+z=1 \\ -x-2y+z=0 \end{matrix}\right\}$ es perpendicular al plano $\Pi:-6x+ay+2z=0$.

b) Demuestre que si $a=-8$ la recta r corta al plano Π en un punto. Calcular dicho punto de corte.

a) La recta es perpendicular al plano si el vector director de la recta es proporcional al vector normal del plano.

$r:\left\{\begin{matrix} x+y+z=1 \\ -x-2y+z=0 \end{matrix}\right\}$ → $z=\lambda$ → $\left\{\begin{matrix} x+y=1-\lambda \\ -x-2y=-\lambda \end{matrix}\right\}$ → Sumamos → $-y=1-2\lambda$ → $y=-1+2\lambda$ → Sustituyendo en la primera ecuación del sistema → $x+(-1+2\lambda)=1-\lambda$ → $x=2-3\lambda$

La ecuación paramétrica de la recta resulta → $r:\left\{\begin{matrix} x=2-3\lambda \\ y=-1+2\lambda \\ z=\lambda \end{matrix}\right\}$ → Vector director $\vec{u}_r=(-3,2,1)$

El vector normal del plano $\Pi:-6x+ay+2z=0$ es → $\vec{u}_\Pi=(-6,a,2)$

Ambos vectores son proporcionales si se cumplen las siguientes igualdades resultantes de dividir sus respectivas componentes:

$$\frac{-3}{-6}=\frac{2}{a}=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad a=4$$

b) Si $a=-8$ el plano será $\Pi:-6x-8y+2z=0$ → Llevamos a la ecuación general del plano las coordenadas paramétricas de la recta. Si podemos despejar el parámetro libre de forma única, significará que recta y plano se cortan en un punto.

$$-6(2-3\lambda)-8(-1+2\lambda)+2(\lambda)=0 \quad \rightarrow \quad -12+18\lambda+8-16\lambda+2\lambda=0$$

$-4+4\lambda=0$ → $\lambda=1$ → Punto de corte $P(2-3,-1+2,1)=(-1,1,1)$

■ *Rectas y planos 5* ♣

Considera el punto $P(-1,0,1)$ y el plano $\Pi: x-y+z+2=0$. Calcule:

a) Las ecuaciones paramétricas de una recta que pase por el punto P y sea perpendicular al plano Π.

b) La distancia del punto P al plano Π.

a) Para obtener una recta necesitamos un punto de la recta y un vector paralelo a la recta.

El punto es, según el enunciado, $P(-1,0,1)$.

El vector director de la recta debe ser, según el enunciado, perpendicular al plano $\Pi: x-y+z+2=0$. Por lo que podemos tomar el vector normal al plano como vector director de la recta.

$$\vec{u}_\Pi=(1,-1,1) \rightarrow r: \begin{Bmatrix} x=-1+\lambda \\ y=-\lambda \\ z=1+\lambda \end{Bmatrix}$$

b) Para obtener la distancia de un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ a un plano $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$ podemos hacer uso de la fórmula:

$$d(P,\Pi)=\left|\frac{A x_0+B y_0+C z_0+D}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}\right|$$

Aplicado a los datos del enunciado → $d(P,\Pi)=\left|\frac{1\cdot(-1)-1\cdot 0+1\cdot 1+2}{\sqrt{3}}\right|=\frac{2\sqrt{3}}{3}\ u$

■ Rectas y planos 6 ♣♣

Sea r la recta definida por $r:\left\{\begin{matrix} x+2y-z=3 \\ 2x-y+z=1 \end{matrix}\right\}$.

a) Determina la ecuación general del plano que contiene a r y pasa por el origen de coordenadas.

b) Halla las ecuaciones paramétricas del plano que corta perpendicular a r en el punto $(1,1,0)$.

a) Podemos resolver este ejercicio de dos formas: como haz de planos o bien buscando dos vectores independientes y un punto del plano. Vamos a resolverlo de ambas formas.

Como haz de planos necesitamos escribir la ecuación del haz a partir de dos planos que pasen por la recta. De la ecuacón general del plano podemos escribir:

$$a(x+2y-z-3)+b(2x-y+z-1)=0$$

De los infinitos planos que pasan por la recta, nos quedamos con el que pase por el origen de coordenadas. Es decir:

$$a(0+0-0-3)+b(0-0+0-1)=0 \;\rightarrow\; -3a-b=0 \;\rightarrow\; b=-3a$$

Llevamos este resultado al haz de planos.

$$a(x+2y-z-3)+(-3a)(2x-y+z-1)=0 \;\rightarrow\; a(x+2y-z-3-6x+3y-3z+3)=0$$

El plano solución resulta → $\Pi:-5x+5y-4z=0$

Una segunda forma de resolverlo consiste en buscar dos vectores linealmente independientes paralelos al plano y buscar un punto del plano.

Según el enunciado, el punto puede ser $P(0,0,0)$ ya que el plano pasa por el origen de coordenadas.

Necesitamos los dos vectores independientes y paralelos al plano. Uno de esos vectores será el vector director de la recta, ya que el plano contiene a la recta. Si pasamos la recta a paramétrica obtenemos el vector director de la recta.

$$r:\left\{\begin{matrix} x+2y-z=3 \\ 2x-y+z=1 \end{matrix}\right\} \;\rightarrow\; z=\lambda \;\rightarrow\; r:\left\{\begin{matrix} x+2y=3+\lambda \\ 2x-y=1-\lambda \end{matrix}\right\} \;\rightarrow\; r:\left\{\begin{matrix} x+2y=3+\lambda \\ 4x-2y=2-2\lambda \end{matrix}\right\}$$

Sumamos ambas ecuaciones → $5x=5-\lambda \;\rightarrow\; x=1-\frac{1}{5}\lambda \;\rightarrow\; 2(1-\frac{1}{5}\lambda)-1+\lambda=y$

$y=1+\frac{3}{5}\lambda$ → La recta en paramétricas resulta $r:\left\{\begin{matrix} x=1-\frac{1}{5}\lambda \\ y=1+\frac{3}{5}\lambda \\ z=\lambda \end{matrix}\right\}$ → $\vec{u}_r=(\frac{-1}{5},\frac{3}{5},1)$

Para no trabajar con fracciones podemos tomar como vector director → $\vec{u}_r=(-1,3,5)$

Un segundo vector del plano podemos obtenerlo a partir del $P(0,0,0)$ y de un punto de la recta. Por ejemplo el $A(1,1,0)$ → $\vec{PA}=(1,1,0)$

Los dos vectores $\vec{u}_r=(-1,3,5)$ y $\vec{PA}=(1,1,0)$ son independientes, al no ser sus componentes proporcionales, ya que $\frac{-1}{1}\neq\frac{3}{1}\neq\frac{5}{0}$.

Con dos vectores independientes y paralelos al plano y el punto $P(0,0,0)$ perteneciente al plano, podemos obtener la determinación lineal del plano.

$$\begin{vmatrix} -1 & 1 & x \\ 3 & 1 & y \\ 5 & 0 & z \end{vmatrix}=0 \quad \rightarrow \quad -z+5y+0-(5x+0+3z)=0 \quad \rightarrow \quad \Pi:-5x+5y-4z=0$$

Resultado que coincide con el obtenido anteriormente con el método del haz de planos.

b) Un plano perpendicular a la recta $r:\left\{\begin{matrix} x+2y-z=3 \\ 2x-y+z=1 \end{matrix}\right\}$ tendrá como vector normal el vector director de la recta. En el apartado anterior obtuvimos $\vec{u}_r=(-1,3,5)$ como vector director.

Por lo tanto, la ecuación general del plano será $-x+3y+5z+D=0$.

El término independiente lo obtenemos sabiendo que el plano pasa por el punto $(1,1,0)$.

$$-1+3+0+D=0 \quad \rightarrow \quad D=-2 \quad \rightarrow \quad \Pi:-x+3y+5z-2=0$$

Esta es la ecuación general del plano. Debemos pasar a paramátricas, para ello consideramos dos incógnitas como pararámetros libre en la ecuación general.

$$\Pi:\left\{\begin{matrix} x=3\alpha+5\beta-2 \\ y=\alpha \\ z=\beta \end{matrix}\right\}$$

Posiciones relativas

■ *Posiciones relativas 1 ♣♣*

Obtener el valor $a \neq 0$ para que las siguientes rectas sean paralelas.

$$r:\begin{cases} x+y-5z=-3 \\ -2x+z=1 \end{cases} \quad , \quad s: x+1=\frac{y-3}{a}=\frac{z}{2}$$

Para comprobar que dos rectas son paralelas podemos obtener el vector director de ambas, y un vector formado por un punto de cada recta. El rango de esos tres vectores debe ser 2, y el rango de los vectores directores debe ser igual a uno.

O también podemos verlo como que su vectores directores son proporcionales (en este caso, podríamos tener tanto rectas paralelas como rectas coincidentes).

De la ecuación paramétrica de la recta s , obtenemos su vector director → $\vec{u}_s=(1,a,2)$

Y de la ecuación general de la recta r , podemos pasar a paramétrica para sacar su vector director, o bien realizar el producto vectorial de los vectores característicos de los planos que forman su ecuación general.

$$\vec{u}_r=(1,1,-5)\times(-2,0,1)=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & -5 \\ -2 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\hat{i}+10\hat{j}+0-(-2\hat{k}+0+\hat{j})=\hat{i}+9\hat{j}+2\hat{k}=(1,9,2)$$

Y dos vectores son proporcionales si el cociente de sus componentes es proporcional.

$$\frac{1}{1}=\frac{9}{a}=\frac{2}{2} \quad \rightarrow \quad a=9$$

Como hemos razonado anteriormente, podríamos estar ante rectas paralelas o coincidentes. ¿Cómo decidir entre ambos casos?

Viendo si tienen al menos un punto en común. Si lo tienen, al ser sus vectores proporcionaes, las rectas serán coincidentes. Si no lo tienen, las rectas serán paralelas.

De la ecuación continua de la recta s podemos obtener un punto $A \in s \rightarrow A(-1,3,0)$.

Sustituimos las coordendas de este punto en la recta r para comprobar si satisface su ecuación general:

$$r:\begin{cases} x+y-5z=-3 \\ -2x+z=1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -1+3-5\cdot 0\neq -3 \\ -2(-1)+0\neq 1 \end{cases} \rightarrow A\notin r$$ → Las rectas son paralelas

■ *Posiciones relativas 2* ♣♣

Sean las rectas $r:\begin{Bmatrix} x=1+2\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1 \end{Bmatrix}$ **y** $s:\begin{Bmatrix} x+2y=-1 \\ z=-1 \end{Bmatrix}$

a) Comprueba que ambas rectas son coplanarias y halla la ecuación del plano que las contiene.

b) Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en ambas rectas, calcula su área.

Dos rectas en el espacio tridimensional son coplanarias si son paralelas, secantes o coincidentes.

Si tomamos un vector director de cada recta, y un tercer vector con origen un punto de r y fin un punto de s, y estudiamos el rango de la matriz formada por esos tres vectores, este rango debe ser distinto de 3 para rectas coplanarias (los tres vectores no pueden ser linealmente independientes).

$$r:\begin{Bmatrix} x=1+2\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1 \end{Bmatrix} \rightarrow \vec{u}_r=(2,-1,0)$$

$$s:\begin{Bmatrix} x+2y=-1 \\ z=-1 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Pasamos a paramétricas} \rightarrow s:\begin{Bmatrix} x=-1-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1 \end{Bmatrix} \rightarrow \vec{u}_s=(-2,1,0)$$

Es directo que ambos vectores directores son proporcionales → $\vec{u}_r=-\vec{u}_s$, por lo tanto necesariamente las rectas serán paralelas o coincidentes, por lo que pertenecerán al mismo plano. Son coplanarias.

Aunque no lo pide el ejercicio, para practicar, vamos a determinar si son paralelas o coincidentes. P podemos obtener el vector $\vec{AB}$ con $A\in r$ y $B\in s$. Por ejemplo, de las ecuaciones paramétricas → $A(1,1,1)$, $B(-1,0,-1)$ → $\vec{AB}=(-2,-1,-2)$.

Es directo comprobar que $\vec{AB}$ no es proporcional a $\vec{u}_r=(2,-1,0)$, ya que sus respectivas componentes no cumplen la misma regla de proporción → $\frac{2}{-2}\neq\frac{-1}{-1}\neq\frac{0}{-2}$ → $\vec{AB}$ y $\vec{u}_r$ son linealmente independientes, por lo que las rectas son paralelas.

Con dos vectores linealmente independientes del plano y un punto del plano, podemos aplicar la determinación lineal del plano para obtener su ecuación general.

$$\Pi(\vec{u}_r, \vec{AB}, B) \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -2 & x+1 \\ -1 & -1 & y \\ 0 & -2 & z+1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow -2(z+1)+0+2(x+1)-(0-4y+2(z+1))=0$$

$$2(x+1)+4y-4(z+1)=0$$

$$\Pi: 2x+4y-4z-2=0 \rightarrow \text{Simplificamos} \rightarrow \Pi: x+2y-2z-1=0$$

b) Al ser las rectas paralelas y descansar dos lados del cuadrado sobre ambas rectas, y recordando que un cuadrado tiene sus cuatro lados iguales, la longitud de un lado será igual a la distancia entre ambas rectas. Por lo tanto, el área del cuadrado será $[d(r,s)]^2$.

Para obtener la distancia entre ambas rectas tomamos un punto $A(1,1,1)\in r$ y un punto arbitrario de la recta s a partir de su ecuación paramétrica → $Q(-1-2\lambda,\lambda,-1)\in s$.

El vector $\vec{AQ}=(-2-2\lambda,\lambda-1,-2)$ será perpendicurlar al vector director de la recta s si el producto escalar de ambos vectores es nulo. Y si ambos vectores son perpendiculares, el módulo de $\vec{AQ}$ coincidirá con la distancia que separan ambas rectas.

$$\vec{AQ}\cdot\vec{u}_s=(-2-2\lambda,\lambda-1,-2)\cdot(-2,1,0)=0 \rightarrow 4+4\lambda+\lambda-1+0=0$$

$$5\lambda+3=0 \rightarrow \lambda=\frac{-3}{5} \rightarrow \vec{AQ}=(-2+\frac{6}{5},\frac{-3}{5}-1,-2)=(\frac{-4}{5},\frac{-8}{5},-2)$$

$$d(r,s)=|\vec{AQ}|=\sqrt{\frac{16}{25}+\frac{64}{25}+4}=\sqrt{\frac{180}{25}}=\sqrt{\frac{36}{5}}=\frac{6}{\sqrt{5}}=\frac{6\sqrt{5}}{5} \quad u$$

Área del cuadrado solución → $A=[d(r,s)]^2=\frac{36}{5}=7{,}2 \quad u^2$

■ *Posiciones relativas 3 ♣♣♣*

Sean las rectas $r:\begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x-2y+z=2 \end{cases}$ **y** $s:\begin{cases} x+y=0 \\ z=1 \end{cases}$ **.**

a) Determina la posición relativa de ambas rectas.

b) Hallar, si es posible, la ecuación de un plano paralelo a r **que contiene a** s **.**

c) Obtener la mínima distancia entre ambas rectas.

a) Para estudiar la posición relativa de dos rectas podemos hacerlo estudiando el sistema de los cuatro planos que aparecen en la forma implícita de ambas rectas, o bien pasar a paramétrica y trabajar con los vectores directores.

Como tenemos las rectas en forma implícita, estudiaremos la solución del siguiente sistema (en notación matricial).

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow M/D=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Estudiamos el rango de M , con el siguiente menor de orden 3.

$$|F_2 F_3 F_4|=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2+0+0-(0+0-2)=4\neq 0 \rightarrow rango(M)=3$$

Estudiamos el rango de M/D con el siguiente determinante de orden 4.

$$|M/D|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow C'_4=C_4-C_3 \rightarrow |M/D|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollamos el determinante por la fila F_4 .

$$|M/D|=-1\cdot\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}=-(0-1+2-(-2+1+0))=-(1+1)=-2\neq 0 \rightarrow rango(M/D)=4$$

Si $rango(M)=3\neq 4=rango(M/D)$ → No hay solución → Sistema Incompatible → Las rectas son cruzadas.

Para practicar, vamos a comprobar que obtenemos el mismo resultado si pasamos las ecuaciones de las rectas a paramétricas y trabajamos con los vectores directores.

$$r:\begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x-2y+z=2 \end{cases} \rightarrow z=\lambda \rightarrow r:\begin{cases} x-y=2-\lambda \\ 2x-2y=2-\lambda \end{cases} \rightarrow r:\begin{cases} 2x-2y=4-2\lambda \\ 2x-2y=2-\lambda \end{cases}$$

Igualamos ambas ecuaciones.

$$4-2\lambda=2-\lambda \rightarrow \lambda=2 \rightarrow z=2$$

Tomamos otra incógnita como parámetro. Por ejemplo $y=\lambda$. Así:

$$x-\lambda+2=2 \rightarrow x=\lambda$$

La recta r en paramétricas resulta:

$$r=\begin{cases} x=\lambda \\ y=\lambda \\ z=2 \end{cases}$$ → Punto de la recta $A(0,0,2)$. Vector director $\vec{u}_r=(1,1,0)$.

Trabajamos ahora con la segunda recta.

$$s:\begin{cases} x+y=0 \\ z=1 \end{cases} \rightarrow y=\lambda \rightarrow x=-\lambda$$

La recta s en paramétricas resulta:

$$s=\begin{cases} x=-\lambda \\ y=\lambda \\ z=1 \end{cases}$$ → Punto de la recta $B(0,0,1)$. Vector director $\vec{u}_s=(-1,1,0)$.

El vector formado por los puntos obtenidos de las rectas resulta: $\vec{AB}=(0,0,-1)$.

Así, debemos estudiar el rango de la matriz formada por los vectores columnas $\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{AB}$.

$$\{\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{AB}\} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{AB}| = -1+0+0-(0+0+1) = -2 \neq 0$$

Es decir: $rango(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{AB}) = 3$ → Los tres vectores son linealmente independientes → Las rectas son cruzadas.

b) Debemos obtener un plano paralelo a r que contiene a s .

Para obtener la ecuación paramétrica de un plano necesitamos un punto y dos vectores linealmente independientes pertenecientes al plano.

Un punto puede ser $B(0,0,1)$, calculado en el apartado anterior y que pertenece a s . Un vector puede ser el vector director de s → $\vec{u}_s = (-1,1,0)$. Un segundo vector será el vector director de r → $\vec{u}_r = (1,1,0)$. Ambos sean linealmente independientes, como demostramos en el apartado anterior, y además garantizamos obtener un plano paralelo a la recta r .

Por la determinación lineal del plano, podemos obtener la ecuación general resolviendo el siguiente determinante.

$$\Pi(\vec{u}_r, \vec{u}_s, B) : \begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow z-1+0+0-(0+0+1-z) = 0 \rightarrow 2z-2=0$$

$$\Pi(\vec{u}_r, \vec{u}_s, B) : z = 1$$

c) La distancia mínima entre ambas rectas coincide con la distancia medida desde la recta r al plano obtenido en el apartado anterior, que es paralelo a r y contiene a la recta s .

Podemos tomar cualquier punto de la recta r y obtener la distancia al plano $\Pi : z = 1$.

El punto $A(0,0,2) \in r$ y podemos hacer uso de la expresión general de la distancia de un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ a un plano $\Pi : Ax + By + Cz + D = 0$:

$$d(P, \Pi) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \rightarrow d(A, \Pi) = \frac{|1 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{1}} = 1 \quad u$$

■ *Posiciones relativas 4* ♣♣

Sean los planos:

$\Pi_1: 2x+2y+az=1$, $\Pi_2: 2x+ay+2z=-2$ y $\Pi_3: ax+2y+2z=1$

a) El valor de a para que los planos tengan una recta en común.

b) Hallar el vector director de dicha recta.

c) Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta común a los tres planos.

Debemos estudiar la solución común de los tres planos, lo cual reduce nuestro problema de geometría al estudio de la compatibilidad del siguiente sistema de ecuaciones.

$$\left\{\begin{array}{c} 2x+2y+az=1 \\ 2x+ay+2z=-2 \\ ax+2y+2z=1 \end{array}\right\} \rightarrow \text{Notación matricial} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & a & 1 \\ 2 & a & 2 & -2 \\ a & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$$

Estudiamos el rango de la matriz del sistema A y de la matriz ampliada A/C .

Si la solución del sistema es una recta, necesitamos que el sistema sea compatible indeterminado (infinitas soluciones), con un parámetro libre. Es decir, necesitamos:

$$rango(A)=rango(A/C)=2<3=número \;\; de \;\; incógnitas$$

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 2 & a \\ 2 & a & 2 \\ a & 2 & 2 \end{vmatrix}=4a+4a+4a-(a^3+8+8)=-a^3+12a-16=0 \rightarrow a=2 \;,\; a=-4$$

Discusión de casos:

Si $a\neq 2$ y $a\neq -4$ → Solución única → Sistema compatible determinado → La solución es un punto. Este caso no nos da una recta solución.

Si $a=2$ → $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$ → El rango de A es 1, por tener tres columnas idénticas, por lo que solo hay un vector linealmente independiente. Este caso tampoco nos sirve, ya que necesitamos que el rango de A sea 2.

Si $a=-4 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$ → El rango de A es 2, ya que existe al menos un menor de orden 2 no nulo. Por ejemplo $|\alpha_{11}|=\begin{vmatrix} -4 & 2 \\ 2 & 2 \end{vmatrix}=-8-4=-12\neq 0$.

Debemos estudiar el rango de la matriz ampliada A/C , para lo cual estudiamos todos los determinantes de orden 3 contenidos en la matriz ampliada.

$$|C_2 C_3 C_4|=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}=4+16-8-(4-8+16)=0$$

$$|C_1 C_3 C_4|=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}=4-32+4-(-8-8-8)=0$$

$$|C_1 C_2 C_4|=\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & -4 & -2 \\ -4 & 2 & 1 \end{vmatrix}=-8+16+4-(16+4-8)=0$$

Todos los menores de orden 3 son nulos, por lo que el rango de la ampliada no es 3. Por lo tanto, el rango de la ampliada es 2, al estar la matriz A contenida dentro de la matriz ampliada.

Si $a=-4 \rightarrow rango(A)=rango(A/C)=2<3=número\ de\ incógnitas$ → Sistema compatible indeterminado (3 – 2 = 1 parámetro libre). La solución común a los tres planos es una recta.

b) Buscamos la ecuación de la recta solución, para obtener un vector director de la misma.

$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & -4 & 1 \\ 2 & -4 & 2 & -2 \\ -4 & 2 & 2 & 1 \end{array}\right)$ → SCI → Tomamos como parámetro $z=\lambda$

Reduciendo nuestro estudio a un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas.

$\left\{\begin{array}{c} 2x+2y=1+4\lambda \\ 2x-4y=-2-2\lambda \end{array}\right\}$ → Restamos → $6y=3+6\lambda \rightarrow y=\frac{1}{2}+\lambda$

Llevamos este valor a la primera de las ecuaciones del sistema.

$$2x+2\left(\frac{1}{2}+\lambda\right)=1+4\lambda \quad \rightarrow \quad 2x+1+2\lambda=1+4\lambda \quad \rightarrow \quad 2x=2\lambda \quad \rightarrow \quad x=\lambda$$

La recta solución, en paramétricas, resulta:

$$r:\left\{\begin{array}{c} x=\lambda \\ y=\frac{1}{2}+\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\} \quad \rightarrow \text{Vector director} \quad \vec{u}_r=(1,1,1)$$

c) La ecuación paramétrica de la recta la hemos obtenido en el apartado anterior.

$$r:\left\{\begin{array}{c} x=\lambda \\ y=\frac{1}{2}+\lambda \\ z=\lambda \end{array}\right\}$$

■ *Posiciones relativas 5* ♣♣♣

Sean las rectas:

$$r:\begin{Bmatrix} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{Bmatrix} \quad , \quad s:\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-2}$$

a) Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a ambas rectas.

b) Calcula la distancia entre ambas rectas.

a) Primero debemos conocer la posición relativas de ambas rectas. Podemos estudiar el rango de la matriz formada por un vector director de cada recta y por un tercer vector formado por dos puntos pertenecientes a cada una de las rectas.

$\vec{u}_r=(1,1,1)$ → Vector director de r , $A(1,1,0)\in r$

$\vec{u}_s=(-2,1,-2)$ → Vector director de s , $B(1,0,1)\in s$

$\vec{AB}=(0,-1,1)$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Estudiamos su rango} \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{vmatrix}=1+2+0-(0+2-2)=3\neq 0$$

El rango es 3, por lo que tenemos tres vectores linealmente independientes, por lo que ambas rectas son cruzadas.

La recta perpendicular que estamos buscando la denominamos t , y debe cortar ambas rectas r y s de manera perpendicular. Por lo tanto, el producto escalar del vector director de t con cada uno de los vectores directores de las otras rectas debe ser nulo.

El vector director de t lo sacamos a partir de dos puntos genéricos de las otras dos rectas. Para ello, expresamos s en paramétricas.

Punto genérico de r → $\begin{Bmatrix} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{Bmatrix}$

Punto genérico de s → $\begin{Bmatrix} x=1-2\mu \\ y=\mu \\ z=1-2\mu \end{Bmatrix}$

Vector director de t → $\vec{u}_t=(-2\mu-\lambda,-1+\mu-\lambda,1-2\mu-\lambda)$

Realizamos los productos escalares.

$$\vec{u}_r\cdot\vec{u}_t=0 \quad \rightarrow \quad (1,1,1)\cdot(-2\mu-\lambda,-1+\mu-\lambda,1-2\mu-\lambda)=0$$

$$-2\mu-\lambda-1+\mu-\lambda+1-2\mu-\lambda=0 \quad \rightarrow \quad -3\mu-3\lambda=0 \quad \rightarrow \quad \mu=-\lambda$$

$$\vec{u}_s \cdot \vec{u}_t = 0 \;\rightarrow\; (-2,1,-2)\cdot(-2\mu-\lambda,-1+\mu-\lambda,1-2\mu-\lambda)=0$$

$$4\mu+2\lambda-1+\mu-\lambda-2+4\mu+2\lambda=0 \;\rightarrow\; 9\mu+3\lambda-3=0 \;\rightarrow\; 3\mu+\lambda-1=0$$

Llegamos a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas, donde:

$$\mu=-\lambda \;\rightarrow\; -2\lambda-1=0 \;\rightarrow\; \lambda=\frac{-1}{2} \;,\; \mu=\frac{1}{2}$$

Con estos valores podemos sacar, de la ecuaciones genéricas de puntos, un punto de la recta t . Y podemos sacar su vector director.

$$\begin{Bmatrix} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x=\frac{1}{2} \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{-1}{2} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{u}_t=(-2\mu-\lambda,-1+\mu-\lambda,1-2\mu-\lambda) \;\rightarrow\; \vec{u}_t=(\frac{-1}{2},0,\frac{1}{2})$$

Por lo que la recta t buscada es:

$$t:\begin{Bmatrix} x=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\alpha \\ y=\frac{1}{2} \\ z=\frac{-1}{2}+\frac{1}{2}\alpha \end{Bmatrix}$$

b) La distancia entre ambas rectas coincide con el módulo del vector director $\vec{u}_t=(\frac{-1}{2},0,\frac{1}{2})$, ya que lo obtuvimos como diferencia entre los puntos de corte de la recta perpendicular con las dos rectas de partida del enunciado. Por lo tanto:

$$d(r,s)=|\vec{u}_t|=\sqrt{\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\;u$$

■ *Posiciones relativas 6 ♣♣♣♣ (extra difícil)*

Sea el punto $P(-1,0,2)$ **y las rectas** $r:\left\{\begin{matrix} x-z=1 \\ y-z=-1 \end{matrix}\right\}$, $s:\left\{\begin{matrix} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=3 \end{matrix}\right\}$ **.**

a) Determina la posición relativa de ambas rectas.

b) Determina la ecuación de la recta que pasa por P **y corta a ambas rectas.**

c) Determina la ecuación de la recta perpendicular común a ambas rectas.

a) Voy a estudiar la posición relativa de ambas rectas trabajando con un vector director de cada recta y con un vector con origen un punto $A\in r$ y final un punto $B\in s$.

Para ello pasamos la recta r a paramétricas.

$$r \rightarrow z=\alpha \rightarrow x=1+\alpha \ , \ y=-1+\alpha \rightarrow r:\left\{\begin{matrix} x=1+\alpha \\ y=-1+\alpha \\ z=\alpha \end{matrix}\right\}$$

Es decir:

$$\vec{u}_r=(1,1,1)$$

$$\vec{u}_s=(1,1,0)$$

$$A\in r \rightarrow A(1,-1,0) \ , \ B\in s \rightarrow B(1,0,3) \rightarrow \vec{AB}=(0,1,3)$$

Estudiamos el rango de la matriz formada por estos tres vectores.

$rango(\vec{u}_r, \vec{y}_s, \vec{AB}) \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{u}, \vec{v}, \vec{AB}|=3+1+0-(0+0+3)=1\neq 0 \rightarrow$ Rango 3, ya que tenemos tres vectores linealmente independientes → Las rectas son cruzadas.

b) Ahora tenemos un punto $P(-1,0,2)$ y una recta t , de tal forma que $P\in t$. Además la recta t corta tanto a la recta r como a la recta s .

Una forma de resolver el problema es la siguiente.

La recta t pasa por P y cortará a la recta r en un punto que llamaremos Q .

Además, la recta t pasa por P y cortará a la recta s en un punto que llamaremos M .

Los vectores $\vec{PQ}$ y $\vec{PM}$ estarán alineados, por pertenecer a la misma recta t . Ambos vectores deben ser proporcionales, es decir, linealmente dependientes entre si.

$$P(-1,0,2) \ , \ Q(1+\alpha,-1+\alpha,\alpha) \rightarrow \vec{PQ}=(2+\alpha,-1+\alpha,-2+\alpha)$$

$$P(-1,0,2) \ , \ M(1+\lambda,\lambda,3) \rightarrow \vec{PM}=(2+\lambda,\lambda,1)$$

Si ambos vectores son proporcionales, deben cumplirse las siguientes igualdades.

$$\frac{2+\alpha}{2+\lambda}=\frac{-1+\alpha}{\lambda}=\frac{-2+\alpha}{1}$$

Igualando los cocientes primero y segundo.

$$\frac{2+\alpha}{2+\lambda}=\frac{-1+\alpha}{\lambda} \quad \rightarrow \quad (2+\alpha)\lambda=(-1+\alpha)(2+\lambda) \quad \rightarrow \quad \lambda=\frac{-2+2\alpha}{3}$$

Igualando los cocientes primero y tercero.

$$\frac{2+\alpha}{2+\lambda}=\frac{-2+\alpha}{1} \quad \rightarrow \quad 2+\alpha=(-2+\alpha)(2+\lambda) \quad \rightarrow \quad \lambda=\frac{6-\alpha}{-2+\alpha}$$

Igualando los cocientes segundo y tercero.

$$\frac{-1+\alpha}{\lambda}=\frac{-2+\alpha}{1} \quad \rightarrow \quad \lambda=\frac{-1+\alpha}{-2+\alpha}$$

Llegamos a tres expresiones para λ . Si igualamos la dos últimas expresiones obtenidas:

$$\frac{6-\alpha}{-2+\alpha}=\frac{-1+\alpha}{-2+\alpha} \quad \rightarrow \quad 7=2\alpha \quad \rightarrow \quad \alpha=\frac{7}{2}$$

Y con este valor podemos obtener λ de cualquiera de las tres expresiones anteriores. Por ejemplo → $\lambda=\frac{-1+\alpha}{-2+\alpha}$, $\alpha=\frac{7}{2}$ → $\lambda=\frac{5}{3}$.

Ya tenemos dos vectores directores de la recta t . Podemos escoger el que queramos, pues son proporcionales.

$\vec{PQ}=(2+\frac{7}{2},-1+\frac{7}{2},-2+\frac{7}{2})=(\frac{11}{2},\frac{5}{2},\frac{3}{2})$ → Podemos transformar en $\vec{u}_t=(11,5,3)$

$\vec{PM}=(2+\frac{5}{3},\frac{5}{3},1)=(\frac{11}{3},\frac{5}{3},1)$ → Podemos transformar en $\vec{u}_t=(11,5,3)$

Y con vector director y un punto, tenemos la recta t .

$$t:\left\{\begin{matrix} x=-1+11\beta \\ y=5\beta \\ z=2+3\beta \end{matrix}\right\}$$

c) En el último apartado debemos obtener la recta perpendicular común a las rectas r y s .

La forma de razonar es muy semejante al apartado anterior, pero incluyendo el concepto de producto escalar.

La recta perpendicular que buscamos la vamos a llamar w .

La recta w cortará perpendicularmente a la recta r en un punto que llamaremos Q .

La recta w cortará perpendicularmente a la recta s en un punto que llamaremos M .

El vector $\vec{QM}$ será un vector perpendicular a ambas rectas, por ser un vector director de la recta w . Y el producto escalar de $\vec{QM}$ con cada uno de los vectores directores de las rectas r y s será cero, por ser vectores perpendiculares. Y de aquí obtendremos las condiciones necesarias para determinar a a recta solución w .

En el apartado anterior obtuvimos los siguientes puntos geneéricos pertenecientes a cada recta.

$$Q(1+\alpha,-1+\alpha,\alpha)\in r \quad , \quad M(1+\lambda,\lambda,3)\in s \quad \rightarrow \quad \vec{QM}=(\lambda-\alpha,1+\lambda-\alpha,3-\alpha)$$

Hacemos los productos escalares.

$$\vec{QM}\cdot\vec{u}_r=0 \quad \rightarrow \quad (\lambda-\alpha,1+\lambda-\alpha,3-\alpha)\cdot(1,1,1)=\lambda-\alpha+1+\lambda-\alpha+3-\alpha=2\lambda-3\alpha+4=0$$

$$\vec{QM}\cdot\vec{u}_s=0 \quad \rightarrow \quad (\lambda-\alpha,1+\lambda-\alpha,3-\alpha)\cdot(1,1,0)=\lambda-\alpha+1+\lambda-\alpha=2\lambda-2\alpha+1=0$$

Obtenemos un sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas.

$$\begin{Bmatrix} 2\lambda-3\alpha=-4 \\ 2\lambda-2\alpha=-1 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Restamos ambas ecuaciones} \rightarrow \quad -\alpha=-3 \quad \rightarrow \quad \alpha=3$$

En consecuencia → $\lambda=\frac{5}{2}$

Con estos valores obtenemos los puntos $Q(1+\alpha,-1+\alpha,\alpha)\in r$ y $M(1+\lambda,\lambda,3)\in s$, y el vector que forman (que será vector director de la recta solución w).

$$Q(4,2,3) \quad , \quad M(\frac{7}{2},\frac{5}{2},3) \quad \rightarrow \quad \vec{QM}=(\frac{-1}{2},\frac{1}{2},0) \quad \rightarrow \text{Transformamos en} \quad \vec{u}_w=(-1,1,0)$$

Y la recta solución, en paramétricas, será:

$$w:\begin{Bmatrix} x=4-\beta \\ y=2+\beta \\ z=3 \end{Bmatrix}$$

■ *Posiciones relativas 7* ♣♣

Dados el plano $\Pi: x+y-z-1=0$ **y la recta** $r: \begin{Bmatrix} 3x+y+z-6=0 \\ 2x+y-2=0 \end{Bmatrix}$ **.**

a) Estudia la posición relativa de la recta y el plano.

b) Calcula la distancia de la recta al plano.

c) Calcula la ecuación general del plano que contiene a la recta r **y es perpendicular a** Π **.**

a) Vamos a formar un sistema con las dos ecuaciones que forman la ecuación implícita de la recta y con la ecuación general del plano. Será un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas.

$$\begin{Bmatrix} 3x+y+z=6 \\ 2x+y=2 \\ x+y-z=1 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Notación matricial} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$

Según la solución de este sistema, podremos concluir la posición relativa de la recta y el plano.

El determinante de la matriz del sistema es:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = -3+0+2-(1+0-2)=0 \rightarrow \text{El rango de la matriz del sistema no es 3}$$

Existe al menos un menor de orden 2 no nulo → Por ejemplo $|\alpha_{11}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ → El rango de la matriz del sistema es 2.

Ahora estudiamos el rango de la matriz ampliada. Primero buscamos si existe al menos un menor de orden 3 no nulo.

$$|C_2 C_3 C_4| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0+2-6-(0-2+1) = -3 \neq 0 \rightarrow \text{El rango de la matriz ampliada es 3.}$$

Por lo tanto:

$rango(A)=2\neq 3=rango(A/C)$ → Sistema sin solución según el Teorema de Roché-Frobenius → Sistema incompatible → La recta es paralela al plano.

b) Para calcular la distancia de la recta al plano podemos tomar un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ cualquiera de la recta y aplicar la expresión:

$$d(P,\Pi) = \frac{|A x_0 + B y_0 + C z_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Para obtener un punto de la recta podemos pasar de la forma implícita a paramétricas.

$$r:\begin{Bmatrix} 3x+y+z-6=0 \\ 2x+y-2=0 \end{Bmatrix} \rightarrow x=\lambda \rightarrow y=2-2\lambda \ , \ z=4-\lambda \rightarrow r:\begin{Bmatrix} x=\lambda \\ y=2-2\lambda \\ z=4-\lambda \end{Bmatrix}$$

Un punto de la recta es $P(0,2,4)$.

Y la distancia al plano $\Pi: x+y-z-1=0$ resulta:

$$d(P,\Pi)=\frac{|0+2-4-1|}{\sqrt{1+1+1}}=\sqrt{3} \ u$$

c) Finalmente buscamos un plano que contenga a la recta $r:\begin{Bmatrix} x=\lambda \\ y=2-2\lambda \\ z=4-\lambda \end{Bmatrix}$ y sea perpendicular al plano $\Pi: x+y-z-1=0$.

Podemos obtener un plano con un punto y con dos vectores linealmente independientes que pertenezcan al plano.

El punto es $P(0,2,4)$, que pertenece a la recta y, en consecuencia, pertenece al plano.

Uno de los vectores es el vector directo de la recta → $\vec{u_r}=(1,-2,-1)$.

Y el segundo vector podría ser el vector normal del plano Π , que por ser perpendicular al plano pertenecerá en consecuencia al plano que estamos buscando (que es perpendicular a Π). Este razonamiento nos sirve siempre y cuando el vector normal $\vec{u_\Pi}=(1,1,-1)$ sea linealmente independiente respecto al vector $\vec{u_r}=(1,-2,-1)$.

Ambos vectores son linealmente independientes, ya que no son proporcionales, como puede verse de los cocientes de sus componentes respectivas.

$$\frac{1}{1}\neq\frac{-2}{1}\neq\frac{-1}{-1}$$

Por la determinación lineal del plano podemos obtener su ecuación general.

$$\Pi(\vec{u_r},\vec{u_\Pi},P):\begin{vmatrix} 1 & 1 & x \\ -1 & -2 & y-2 \\ -1 & -1 & z-4 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \Pi: x+z-4=0$$

■ *Posiciones relativas 8* ♣♣

Dada la recta $r:\begin{cases} 4x-3y+4z=-1 \\ 3x-2y+z=-3 \end{cases}$ **y el plano** $\Pi: 2x-y+az=0$ **.**

a) Calcular a **para que la recta y el plano sean paralelos.**

b) Obtener un plano perpendicular a la recta que pase por el origen de coordenadas.

a) Una recta y un plano son paralelos si el sistema formado por las dos ecuaciones generales de la recta y por la ecuación general del plano no tiene solución (ausencia de puntos de corte). La notación matricial de ese sistema será:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 4 & -3 & 4 & -1 \\ 3 & -2 & 1 & -3 \\ 2 & -1 & a & 0 \end{array}\right) \rightarrow det(A)=-8a-6-12-(-16-4-9a) \rightarrow det(A)=a+2$$

Si $det(A)=0 \rightarrow a=-2$

Discusión de casos:

- Si $a\neq-2 \rightarrow det(A)\neq 0 \rightarrow Rango(A)=3=Rango(A/C)=n^o\, incógnitas$ → Por el Teorema de Rouché Frobenius tendremos SCD con solución única.
- Si $a=-2 \rightarrow det(A)=0 \rightarrow Rango(A)\neq 3$ → Buscamos un menor de orden 2 no nulo → $\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 3 & -2 \end{vmatrix}=-8+9=1\neq 0 \rightarrow Rango(A)=2$ → Estudiamos el rango de la matriz ampliada → Buscamos un menor de orden 3 no nulo en la ampliada → $\begin{vmatrix} -3 & 4 & -1 \\ -2 & 1 & -3 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix}=0+12-4-(1+0-18)=25\neq 0 \rightarrow Rango(A/C)=3$ → Al no coincidir el rango de la matriz del sistema y el rango de la matriz ampliada tendremos SI sin solución → Recta y plano son paralelos.

b) Un plano perpendicular a una recta tendrá, como vector normal, el vector director de la recta. Por lo tanto, si pasamos la ecuación general de la recta a paramétrica, obtendremos su vector director.

$$r:\begin{cases} 4x-3y+4z=-1 \\ 3x-2y+z=-3 \end{cases} \rightarrow z=\lambda \rightarrow \begin{cases} 4x-3y=-1-4\lambda \\ 3x-2y=-3-\lambda \end{cases} \rightarrow \begin{cases} -12x+9y=3+12\lambda \\ 12x-8y=-12-4\lambda \end{cases} \rightarrow$$

Sumamos ambas ecuaciones → $y=-9+8\lambda$ → Llevando este resultado a la primera ecuación del sistema → $4x-3(-9+8\lambda)=-1-4\lambda \rightarrow 4x+27-24\lambda=-1-4\lambda \rightarrow 4x=-28+20\lambda \rightarrow$ $x=-7+5\lambda$

La ecuación paramétrica queda → $r:\begin{Bmatrix} x=-7+5\lambda \\ y=-9+8\lambda \\ z=\lambda \end{Bmatrix}$ → Vector director $\vec{u}_r=(5,8,1)$

Este vector director será el vector normal del plano, por ser el plano perpendicular a la recta. Por lo tanto la ecuación general del plano resulta:

$\Pi: 5x+8y+z+D=0$

Si el plano pasa por el origen de coordenadas $(0,0,0)$ → $D=0$ → $\Pi: 5x+8y+z=0$

■ *Posiciones relativas 9* ♣♣♣

Dados el plano $\Pi: 2x-y=2$ **y la recta** $r:\begin{cases} x=1 \\ y-2z=2 \end{cases}$ **se pide:**

a) Estudiar la posición relativa de la recta y el plano.

b) Determinar el plano que contiene a la recta r **y es perpendicular a** Π **.**

c) Determinar la recta que pasa por $A(-2,1,0)$ **, corta a** r **y es paralela a** Π **.**

a) Estudiamos la solución del sistema formado por la ecuación general del plano y las dos ecuaciones generales de la recta.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right)$$ → Vamos a aplicar Gauss por encima de la diagonal principal

$C_1 \leftrightarrow C_2$ (al intercambiar columnas, cambian la posición de las incógnitas) → $\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$ →

$F_1'=F_1-2F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -2 & 2 \end{array}\right)$ → De $F_1 \rightarrow -y=0 \rightarrow y=0$

De $F_2 \rightarrow x=1$

De $F_3 \rightarrow 0-2z=2 \rightarrow z=-1$

Al tener el sistema solución única, recta y plano son secantes y se cortan en el punto $P(1,0,-1)$.

b) Buscamos un plano que contenga a r y sea perpendicular a Π .

Si contiene a r , el vector director de la recta es paralelo al plano que buscamos. Si es perpendicular a Π , el vector normal a Π es paralelo al plano que buscamos.

Calculemos ambos vectores.

Si pasamos la ecuación general de la recta a paramétrica, podremos obtener un vector director.

$$r:\begin{cases} x=1 \\ y-2z=2 \end{cases} \rightarrow z=a \rightarrow r:\begin{cases} x=1 \\ y=2+2a \\ z=a \end{cases} \rightarrow \vec{u}_r=(0,2,1)$$

De la ecuación general del plano obtenemos su vector normal.

$$\Pi: 2x-y=2 \quad\rightarrow\quad \vec{u_\Pi}=(2,-1,0)$$

Comprobamos que $\vec{u}_r=(0,2,1)$ y $\vec{u_\Pi}=(2,-1,0)$ no son proporcionales, ya que el cociente de sus componentes no lo son → $\frac{0}{2}\neq\frac{2}{-1}\neq\frac{1}{0}$

El punto $P(1,0,-1)$ obtenido en el apartado a) pertenecerá al plano que estamos buscando (al contener el plano a la recta).

Con dos vectores linealmente independientes y un punto del plano, podemos escribir la ecuación paramétrica del plano.

$$\Pi: \left\{\begin{matrix} x=1+2b \\ y=2a-b \\ z=-1+a \end{matrix}\right\}$$

c) Debemos determinar la recta que pasa por $A(-2,1,0)$, corta a r y es paralela a Π . Llamaremos a la recta solución s .

Si s es paralela a Π , significa que el vector director de s es perpendicular al vector normal de Π , por lo que $\vec{u}_s\cdot\vec{u_\Pi}=0$.

Como razonamos en el apartado b) $\vec{u_\Pi}=(2,-1,0)$.

El vector director de s será el vector $\vec{AB}$, donde $A(-2,1,0)$ y B es un punto arbitrario de la recta r , ya que ambas rectas se cortan según el enunciado. Por lo tanto, de la ecuación paramétrica de r podemos sacar un punto arbitrario:

$$r: \left\{\begin{matrix} x=1 \\ y=2+2a \\ z=a \end{matrix}\right\} \quad\rightarrow\quad B=(1,2+2a,a) \quad\rightarrow\quad \vec{AB}=(3,1+2a,a) \quad\rightarrow\quad \vec{u}_s=\vec{AB}=(3,1+2a,a)$$

$$\vec{u}_s\cdot\vec{u_\Pi}=0 \quad\rightarrow\quad (3,1+2a,a)\cdot(2,-1,0)=0 \quad\rightarrow\quad 6-1-2a=0 \quad\rightarrow\quad a=\frac{5}{2} \quad\rightarrow\quad \vec{u}_s=(3,6,\frac{5}{2})$$

Si el vector director es $\vec{u}_s=(3,6,\frac{5}{2})$ y la recta pasa por $A(-2,1,0)$, su ecuación paramétrica resulta:

$$s: \left\{\begin{matrix} x=-2+3\lambda \\ y=1+6\lambda \\ z=\frac{5}{2}\lambda \end{matrix}\right\}$$

■ *Posiciones relativas 10* ♣♣

Calcula el valor de a para que la recta $r: \frac{x}{2}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-2}{-4}$ no corte al plano $\Pi: 5x+ay+4z=5$. Para ese valor de a calcula la distancia de la recta al plano.

Una recta y un plano no se cortan si el sistema formado por ambas ecuaciones no tiene solución.

Podemos resolver este problema de dos maneras.

La primera es pasar la ecuación de la recta a general y realizar un sistema de tres ecuaciones y tres incógnitas con la ecuación general del plano. Si el sistema no tiene solución, significa que recta y plano no se cortan.

La segunda es pasar la recta a paramétrica y sustituir en la ecuación del plano, quedando una ecuación con incógnita única el parámetro libre de la recta. Si llegamos a un absurdo, significará que recta y plano nos e cortan.

Resolvamos el ejercicios por este segundo método.

$$r: \frac{x}{2}=\frac{y-2}{6}=\frac{z-2}{-4} \rightarrow r: \begin{Bmatrix} x=2t \\ y=2+6t \\ z=2-4t \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Sustituimos en } \Pi: 5x+ay+4z=5$$

$$5(2t)+a(2+6t)+4(2-4t)=5 \rightarrow 10t+2a+6at+8-16t-5=0$$

$$6at-6t+2a+3=0 \rightarrow (6a-6)t=-2a-3 \rightarrow t=\frac{-2a-3}{6a-6}$$

Podremos obtener un valor del parámetro t siempre que el denominador sea distinto de cero, en cuyo cayo tendríamos un absurdo matemático y no habría solución (por lo que recta y plano no se cortarían).

$$6a-6=0 \rightarrow \text{Recta y plano son paralelos si } a=1 \rightarrow \Pi: 5x+y+4z=5$$

La distancia de una recta a un plano, siendo ambos paralelos, es la distancia de un punto cualquiera de la recta a dicho plano. De la ecuación paramétrica de la recta es obvio que el punto $P(0,2,2)$ pertenece a la recta.

Usando la fórmula de la distancia de un punto (x_0, y_0, z_0) a un plano $Ax+By+Cz+D=0$:

$$d(P,\Pi)=\left|\frac{A\cdot x_0+B\cdot y_0+C\cdot z_0+D}{\sqrt{5^2+1^2+4^2}}\right| \rightarrow d(P,\Pi)=\left|\frac{5\cdot 0+1\cdot 2+4\cdot 2-5}{\sqrt{5^2+1^2+4^2}}\right|=\left|\frac{5}{\sqrt{41}}\right|=\frac{5\sqrt{41}}{41}\ u$$

■ *Posiciones relativas 11* ♣♣

a) Halla $a \in \mathbb{R}$ para que las rectas $r:\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -x+y-3z=2 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x+y=0 \\ 3x+2y+z=a \end{cases}$ se corten en un punto.

b) Para dicho valor de a obtener la ecuación implícita de un plano que contenga a ambas rectas.

a) Para estudiar la posición relativa de dos rectas podemos trabajar de dos formas.

La primera es con sus ecuaciones generales, formando un sistema 4x4 que debería tener solución única si queremos que ambas rectas se corten un punto.

La segunda es obtener los vectores directores de cada recta $\vec{u}_r, \vec{u}_s$ y un punto de cada recta para formr el vector $\vec{AB}$. Estudiando el rango de la matriz formada por estos tres vectores podemos deducir la posición relativa de ambas rectas. Vamos a resolverlo de esta segunda forma.

$$r:\begin{cases} x+2y-z=1 \\ -x+y-3z=2 \end{cases} \rightarrow z=t \rightarrow r:\begin{cases} x+2y=1+t \\ -x+y=2+3t \end{cases}$$ → Sumamos ambas ecuaciones

$$3y=3+4t \rightarrow y=1+\frac{4}{3}t \rightarrow x=1+t-2\left(1+\frac{4}{3}t\right) \rightarrow x=-1-\frac{5}{3}t$$

$$r:\begin{cases} x=-1-\frac{5}{3}t \\ y=1+\frac{4}{3}t \\ z=t \end{cases} \rightarrow A\in r=(1,1,0) \quad , \quad \vec{u}_r=\left(\frac{-5}{3},\frac{4}{3},1\right) \rightarrow \vec{u}_r=(-5,4,3)$$

$$s:\begin{cases} x+y=0 \\ 3x+2y+z=a \end{cases} \rightarrow z=m \rightarrow s:\begin{cases} x+y=0 \\ 3x+2y=a-m \end{cases} \rightarrow s:\begin{cases} -2x-2y=0 \\ 3x+2y=a-m \end{cases} \rightarrow$$

Sumamos ambas ecuaciones → $x=a-m \rightarrow y=-a+m$

$$s:\begin{cases} x=a-m \\ y=-a+m \\ z=m \end{cases} \rightarrow B\in s=(a,-a,0) \quad , \quad \vec{u}_s=(-1,1,1)$$

El vector $\vec{AB}$ resulta → $A\in r=(1,1,0) \quad , \quad B\in s=(a,-a,0) \rightarrow \vec{AB}=(a-1,-a-1,0)$

Formamos la matriz $(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{AB})$. Para que las rectas se corten en un punto el rango de esta matriz debe ser dos, ya que los vectores directores de ambas rectas son sistema generador del plano que contiene a ambas rectas. Además, estos dos vectores directores son linealmente independientes entre sí.

$$\vec{u}_r=(-5,4,3) \quad , \quad \vec{u}_s=(-1,1,1) \quad , \quad \vec{AB}=(a-1,-a-1,0)$$

Los vectores directores de las dos rectas, en efecto, son linealmente independientes entre sí ya que no son proporcionales, como se comprueba al dividir sus componentes → $\frac{-5}{-1}\neq\frac{4}{1}\neq\frac{3}{1}$

Nos queda imponer la condición de rango dos para la matriz formada por los tres vectores. Para ello, forzamos que su determinante sea cero (ya que así el rango no será tres.)

$$\begin{vmatrix} -5 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 1 \\ a-1 & -a-1 & 0 \end{vmatrix}=0 \quad \to \quad 0+4(a-1)-3(-a-1)-(3(a-1)+0-5(-a-1))=0$$

$$(a-1)+2(-a-1)=0 \quad \to \quad -a-3=0 \quad \to \quad a=-3$$

Esta valor anula el determinante. Sabemos que el rango de la matriz es dos, al contener dos vectores linealmente independientes (los dos vectores directores). Por lo tanto, para $a=-3$ las rectas se cortan en un solo punto. En el siguiente enlace de Geogebra puedes apreciar la solución en 3 dimensiones.

https://www.geogebra.org/m/ayE64sUe

b) Para $a=-3$ debemos obtener la ecuación general o implícita del plano que contiene a ambas rectas. Sabeos que un plano queda determinado de manera única por dos vectores linealmente independientes paraelos al plano y un punto del plano.

Estos vectores son los directores de las rectas: $\vec{u}_r=(-5,4,3) \quad , \quad \vec{u}_s=(-1,1,1)$

Y el punto es uno de cualquiera de las dos rectas, por ejemplo: $A\in r=(1,1,0)$

Con la determinación lineal del plano podemos obtener su ecuación general anulando el siguiente determinante.

$$\begin{vmatrix} -5 & -1 & x-1 \\ 4 & 1 & y-1 \\ 3 & 1 & z \end{vmatrix}=0 \quad \to \quad -5z-3(y-1)+4(x-1)-(3(x-1)-5(y-1)-4z)=0$$

$$-z+2(y-1)-(x-1)=0 \quad \to \quad \Pi:-x+2y-z-1=0$$

■ *Posiciones relativas 12* ♣♣

Sea la recta r que pasa por los puntos $A(1,0,-1)$ y $B(-1,1,0)$.

a) Halla la ecuación de la recta s paralela a r que pasa por $C(-2,3,2)$.

b) Calcula la distancia de r y s .

a) Si la recta s es paralela a r , tendrán el mismo vector director. Y si s pasa por $C(-2,3,2)$, ya tendremos un punto y un vector para obtener la ecuación de la recta.

$$\vec{u}_s=\vec{u}_r=\vec{AB}=(-2,1,1) \quad , \quad C(-2,3,2)\in s \quad \rightarrow \quad s:\begin{Bmatrix} x=-2-2a \\ y=3+a \\ z=2+a \end{Bmatrix}$$

b) La distancia entre dos rectas paralelas podemos obtenerla como la distancia de un punto $A\in r$ a la otra recta s .

Podemos obtener la distancia con la fórmula $d(P,s)=\frac{|\vec{AP}\times\vec{u}_s|}{|\vec{u}_s|}$, donde $\vec{u}_s$ es el vector director de la recta s y $P\in s$ un punto de dicha recta.

$$A(1,0,-1)\in r \quad , \quad P(-2,3,2)\in s \quad \rightarrow \quad \vec{AP}=(-3,3,3)$$

$$\vec{u}_s=(-2,1,1) \quad \rightarrow \quad |\vec{u}_s|=\sqrt{6}$$

$$\vec{AP}\times\vec{u}_s=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ -3 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{vmatrix}=3\hat{i}-6\hat{j}-3\hat{k}-(-6\hat{k}+3\hat{i}-3\hat{j})=-3\hat{j}+3\hat{k}=(0,-3,3)$$

$$|\vec{AP}\times\vec{u}_s|=\sqrt{18}$$

$$d(P,s)=\frac{|\vec{AP}\times\vec{u}_s|}{|\vec{u}_s|}=\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{6}}=\sqrt{3}\,u$$

■ *Posiciones relativas 13* ♣♣

Dadas las rectas $r:\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1}$ **y** $s:\begin{Bmatrix} x=-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{Bmatrix}$ **.**

a) Determine su posición relativa.

b) Calcule la distancia del punto $P(2,3,1)$ **a la recta** s **.**

a) Para estudiar la posición relativa de ambas rectas debemos obtener sus respectivos vectores directores y un punto de cada recta.

$$r:\frac{x}{2}=\frac{y}{3}=\frac{z}{1} \rightarrow \vec{u}_r=(2,3,1) \quad , \quad A\in r=(0,0,0)$$

$$s:\begin{Bmatrix} x=-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{Bmatrix} \rightarrow \vec{u}_s=(-1,2,2) \quad , \quad B\in s=(0,1,-2)$$

$$\vec{AB}=(0,1,-2)$$

El rango de la matriz formada por los vectores $(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{AB})$ nos informará del número de vectores linealmente independientes y, según este valor, podremos determinar la posición relativa de las rectas.

Calculamos el determinante de la matriz 3x3 formada por $(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{AB})$. Si es no nulo, el rango será 3.

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{vmatrix}=-8-1+0-(0+4+6)=-19\neq 0 \rightarrow \text{Rango 3}$$

Si los tres vectores son linealmente independientes significan que las dos rectas son cruzadas en el espacio.

b) Para obtener la distancia desde un punto $P(2,3,1)$ a la recta s podemos aplicar la fórmula que vimos en teoría o bien razonar de la siguiente manera.

Elegimos un punto arbitrario de la recta s , cuyas coordenadas serán las de la recta en paramétricas.

$$s:\begin{Bmatrix} x=-\lambda \\ y=1+2\lambda \\ z=-2+2\lambda \end{Bmatrix} \rightarrow Q(-\lambda, 1+2\lambda, -2+2\lambda) \rightarrow \text{Punto arbitrario de } s$$

Formamos el vector $\vec{PQ}=(-\lambda-2,-2+2\lambda,-3+2\lambda)$. El módulo del vector $\vec{PQ}$ será la distancia buscada siempre que el producto escalar de $\vec{PQ}$ con el vector director $\vec{u}_s=(-1,2,2)$ sea nulo (ya que los dos vectores serán perpendiculares).

$$\vec{PQ}\cdot\vec{u}_s=0 \rightarrow -(-\lambda-2)+2(-2+2\lambda)+2(-3+2\lambda)=0 \rightarrow \lambda+2-4+4\lambda-6+4\lambda=0$$

$$9\lambda-8=0 \rightarrow \lambda=\frac{8}{9}$$

Con este resultado podemos obtener el vector $\vec{PQ}=(-\lambda-2,-2+2\lambda,-3+2\lambda)$.

$$\vec{PQ}=(\frac{-8}{9}-2,-2+\frac{16}{9},-3+\frac{16}{9})=(\frac{-26}{9},-\frac{2}{9},-\frac{11}{9})$$

$$d(P,s)=|\vec{PQ}|=\sqrt{\frac{676+4+121}{81}}=\sqrt{\frac{801}{81}}=\sqrt{\frac{89}{9}}\ u$$

■ *Posiciones relativas 14* ♣♣

a) Estudia la posición relativa de las rectas $r:\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases}$ **y** $s:\begin{cases} x-z=0 \\ x+2y-z=12 \end{cases}$ **.**

b) Calcula la distancia entre ambas rectas.

a) Para estudiar la posición entre ambas rectas vamos a tomar los siguientes elementos geométricos.

Punto y director de la primera recta → $A, \vec{u}_r$

Punto y vector director de la segunda recta → $B, \vec{u}_s$

Vector formado por los puntos obtenidos → $\vec{AB}$

El estudio del rango de la matriz formada por estos tres vectores $(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{AB})$ nos dará la información necesaria para determinar la posición relativa de las rectas.

Pasamos las rectas, en forma general, a paramétricas.

$$r:\begin{cases} x+y-z=1 \\ 2x+y-2z=1 \end{cases} \rightarrow z=\lambda \rightarrow r:\begin{cases} x+y=1+\lambda \\ 2x+y=1+2\lambda \end{cases}$$ → Restamos las dos ecuaciones →

$$-x=-\lambda \rightarrow x=\lambda \rightarrow y=1 \rightarrow r:\begin{cases} x=\lambda \\ y=1 \\ z=\lambda \end{cases} \rightarrow A(0,1,0) \quad , \quad \vec{u}_r=(1,0,1)$$

$$s:\begin{cases} x-z=0 \\ x+2y-z=12 \end{cases} \rightarrow z=\lambda \rightarrow x=\lambda \rightarrow y=6$$

$$s:\begin{cases} x=\lambda \\ y=6 \\ z=\lambda \end{cases} \rightarrow B(0,6,0) \quad , \quad \vec{u}_s=(1,0,1)$$

$$\vec{AB}=(0,-5,0)$$

$$(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{AB})=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow det=0+0-5-(0+0-5)=0 \rightarrow Rango\neq 3$$

Buscamos un menor de orden dos no nulo → $|\alpha_{11}|=0+5=5 \rightarrow Rango=2$ → Tenemos dos vectores linealmente independientes, por lo tanto la terna $(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{AB})$ está contenida en un mismo plano. Esta configuración puede implicar que las rectas sean paralelas o secantes. Para decidirlo, debemos ver el rango de los dos vectores directores → $(\vec{u}_r, \vec{u}_s)=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ → Son vectores proporcionales, por lo que las rectas son paralelas.

b) La distancia entra ambas rectas paralelas podemos determinarla con la fórmula $d(P,r)=\frac{|\vec{AP}\times\vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|}$, sabiendo que:

$\vec{u}_r$ → Vector director de la recta r → $\vec{u}_r=(1,0,1)$

A → Punto de la recta r → $A(0,1,0)$

P → Punto de la recta s → $P(0,6,0)$

$\vec{AP}=(0,-5,0)$

$$\vec{AP}\times\vec{u}_r=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 0 & -5 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-5\hat{i}+0+0-(-5\hat{k}+0+0)=-5\hat{i}+5\hat{k}=(-5,0,5)$$

$$|\vec{AP}\times\vec{u}_r|=\sqrt{25+0+25}=\sqrt{50}$$

$$|\vec{u}_r|=\sqrt{1+0+1}=\sqrt{2}$$

$$d(P,r)=\frac{\sqrt{50}}{\sqrt{2}}=\sqrt{25}=5\ u$$

■ *Posiciones relativas 15* ♣♣

Sean los planos $\Pi_1: x+y=1$ **,** $\Pi_2: a\,y+z=0$ **,** $\Pi_3: x+(1+a)y+a\,z=a+1$ **.**

a) Cuánto debe valer a **para que no tengan ningún punto en común?**

b) Para $a=0$ **determina la posición relativa de los planos.**

a) Los planos no tendrán ningún punto en común si el sistema $3x3$ formado por sus tres ecuaciones generales resulta incompatible.

$$\left\{\begin{matrix} x+y=1 \\ a\,y+z=0 \\ x+(1+a)\,y+a\,z=a+1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{Notación matricial} \rightarrow \quad A/D=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 1 & 0 \\ 1 & 1+a & a & a+1 \end{array}\right)$$

Estudiamos el rango de la matriz del sistema, calculando en primer lugar su determinante.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 1 & 1+a & a \end{vmatrix}=a^2+1+0-(0+0+1+a)=a^2-a=a(a-1)$$

El determinante se anula si y solo si $a=0\,,a=1$.

Realizamos la discusión de casos del rango en función de los valores del parámetro a .

- Si $a\neq 0$ ó $a\neq 1$ → $det(A)\neq 0 \rightarrow rango(A)=3 \rightarrow rango(A/D)=3$ → Por Rouché-Frobenius estamos ante un sistema compatibe determinado con solución única. Los tres planos se cortan en un punto.
- Si $a=0$ → $det(A)=0$ → Buscamos un menor no nulo → $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$ → $|\alpha_{11}|=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-1$ → $rango(A)=2$ → Estudiamos el rango de la ampliado, comprobando en primer lugar la existencia de menores de orden 3 no nulos → $A/D=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right)$ →

  $|C_1\,C_2\,C_3|=0$ (coincide con el determinante de A)

  $|C_1\,C_2\,C_4|=0$ (por tener las tres columnas iguales)

  $|C_1\,C_3\,C_4|=0$ (por tener dos columnas iguales)

  $|C_2\,C_3\,C_4|=0$ (por tener dos columnas iguales)

El rango de la ampliada también será dos, al no aparecer ningún menor de orden tres no nulo → $Rango(A)=2=Rango(A/D)<3=n^o\ incógnitas$ → Por Rouché-Frobenius estamos ante un sistema compatible indeterminado. Infinitas soluciones con un parámetro libre. La solución al sistema es una recta común a los tres planos

- Si $a=1$ → $det(A)=0$ → Buscamos un menor no nulo → $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ →

  $|\alpha_{11}|=\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-1$ → $rango(A)=2$ → Estudiamos el rango de la ampliado, comprobando en primer lugar la existencia de menores de orden 3 no nulos → $A/D=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{array}\right)$ →

  $|C_1 C_2 C_3|=0$ (coincide con el determinante de A)

  $|C_1 C_2 C_4|=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}=2+1+0-(0+0+0)=2\neq 0$ → $rango(A/D)=3\neq 2=rango(A)$ →

  Por Rouché-Frobenius estamos ante un sistema incompatible. No hay solución. Los planos no tienen ningún punto en común si $a=1$.

b) Como hemos justificado en el apartado anterior, si $a=0$ → El rango de la ampliada también será dos, al no aparecer ningún menor de orden tres no nulo → $Rango(A)=2=Rango(A/D)<3=n^o\ incógnitas$ → Por Rouché-Frobenius estamos ante un sistema compatible indeterminado. Infinitas soluciones con un parámetro libre. La solución al sistema es una recta común a los tres planos.

■ *Posiciones relativas 16* ♣

Sea la recta $r: mx=y=z+2$ **con** $m\neq 0$ **, y la recta** $s:\frac{x-4}{4}=y-1=\frac{z}{2}$ **.**

a) Halla el valor de m **para que las rectas sean perpendiculares.**

b) ¿Existe algún valor de m **para el que las rectas sean paralelas?**

a) Ambas rectas serán perpendiculares si el producto escalar de sus vectores directores es nulo.

$$r: mx=y=z+2 \rightarrow r: x=\frac{y}{m}=\frac{z+2}{m} \rightarrow \vec{u}_r=(1,m,m)$$

$$s:\frac{x-4}{4}=y-1=\frac{z}{2} \rightarrow \vec{u}_s=(4,1,2)$$

$$\vec{u}_r\cdot\vec{u}_s=0 \rightarrow 4+m+2m=0 \rightarrow m=\frac{-4}{3}$$

b) Ambas rectas serán paralelas si sus vectores directores son proporcionales, y si no pasan por los mismos puntos (si lo hicieran, serían coincidentes y no paralelas). Es decir:

$$\frac{1}{4}=\frac{m}{1}=\frac{m}{2}$$

Si igualamos la primera y la segunda fracción → $m=\frac{1}{4}$. Pero con este valor no se cumple la igualdad entra la primera y la tercera fracción. Por lo tanto, no hay un valor de m que haga paralelas ambas rectas.

Puntos pertenecientes a rectas o planos

■ *Puntos 1* ♣♣

Considera el punto $P(1,-1,0)$ **y la recta** $r:\begin{Bmatrix} x=1+3t \\ y=-2 \\ z=t \end{Bmatrix}$ **.**

a) Determinar la ecuación del plano que pasa por P **y contiene a** r **.**

b) Halla las coordenadas del punto simétrico de P **respecto de** r **.**

a) La determinación lineal del plano afirma que un plano queda definido de manera única con un punto perteneciente al plano y dos vectores linealmente independientes y paralelos al plano.

El punto nos lo da el enunciado: $P(1,-1,0)$

Si el plano contiene a la recta del enunciado, su vector director será paralelo al plano: $\vec{u}_r=(3,0,1)$

El segundo vector podemos formarlo con el vector $\vec{AP}$, donde $A\in r$. Mirando la ecuación paramétrica de la recta, ese punto puede ser: $A(1,-2,0) \rightarrow \vec{AP}=(0,1,0)$.

Comprobamos que ambos vectores son independientes dividiendo las respectivas componentes entre si y verificando que no son vectores proporcionales → $\frac{3}{0}\neq\frac{0}{1}\neq\frac{1}{0}$

Igualando a cero determinante asociado a la determinación lineal del plano, obtendremos la ecuación general del plano solución:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & x-1 \\ 1 & 0 & y+1 \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix}=0 \rightarrow (x-1)-(3z)=0 \rightarrow \Pi: x-3z-1=0$$

b) Sea $P(1,-1,0)$ y $P'(x,y,z)$ su simétrico respecto la recta r .

Consideramos un punto arbitrario de la recta, cuyas componentes coinciden con las componentes paramétricas de la recta. Es decir: $B(1+3t,-2,t)\in r$.

Formamos el vector $\vec{BP}=(-3t,1,-t)$. El punto B será el punto medio del segmento $\overline{PP'}$ siempre que el vector $\vec{BP}$ y el vector director de la recta $\vec{u}_r=(3,0,1)$ sean perpendiculares.

Dos vectores perpendiculares cumplen que su producto escalar es nulo. Por lo tanto:

$$\vec{BP}\cdot\vec{u}_r=0 \rightarrow (-3t,1,-t)\cdot(3,0,1)=0 \rightarrow -9t+0-t=0 \rightarrow t=0$$

De donde concluimos que $B=(1,-2,0)$. Recordamos que las coordenadas del punto medio de un segmento se obtiene como la semisuma de las coordenadas de los extremos. Es decir:

$$(1,-2,0)=\left(\frac{x+1}{2},\frac{y-1}{2},\frac{z-0}{2}\right)$$

Igualamos componentes → $x=1$, $y=-3$, $z=0$ → $P'(1,-3,0)$ es el punto solución.

■ *Puntos 2* ♣♣

Sean los puntos $A(0,1,1)$ **,** $B(2,1,3)$ **,** $C(-1,2,0)$ **y** $D(2,1,m)$

a) Calcula m **par** $A, B, C \ y \ D$ **estén en un mismo plano.**

b) Determina la ecuación del plano respecto los puntos A **y** B **son simétricos.**

c) Calcula el área del triángulo de vértices $A, B \ y \ C$ **.**

a) Los cuatro puntos son coplanarios si los tres vectores que podemos formar tomando uno de los puntos como origen común (por ejemplo el punto A), pertenecen a un mismo plano. Es decir, los tres vectores debe ser linealmente dependientes (por ser coplanarios). Por lo tanto, el rango de la matriz cuadrada 3×3 que forman los tres vectores no puede ser tres: el determinante de esa matriz debe ser nulo.

$$\vec{AB}=(2,0,2) \quad , \quad \vec{AC}=(-1,1,-1) \quad , \quad \vec{AD}=(2,0,m-1)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & m-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & m-1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow 2m-6=0 \rightarrow m=3$$

Los cuatro puntos pertenecen al mismo plano siempre que $m=3$.

b) Buscamos un plano de ecuación general $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$ que cumpla que la recta r que une los puntos $A(0,1,1)$ y $B(2,1,3)$, corte al plano de manera perpendicular justo en el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

Con el vector director $\vec{u}_r$ de la recta tendremos el vector normal al plano $\vec{u}_\Pi=(A,B,C)$. Y con el punto medio del segmento $\overline{AB}$ tendremos las coordenadas de un punto del plano, por lo que podremos obtener el término independiente de la ecuación general $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$.

$$\vec{AB}=\vec{u}_r=(2,0,2) \rightarrow \vec{u}_\Pi=(2,0,2)\perp\Pi$$

$$P= \ punto \ \ medio \ \ \overline{AB} \ =\left(\frac{0+2}{2},\frac{1+1}{2},\frac{1+3}{2}\right)=(1,1,2)$$

$$\Pi: 2x+2z+D=0 \quad , \quad P(1,1,2)\in\Pi \rightarrow 2+4+D=0 \rightarrow D=-6$$

$\Pi: 2x+2z-6=0$ → Podemos simplificar a → $\Pi: x+z-3=0$

c) Nuestro triángulo tiene por vértices $A(0,1,1)$, $B(2,1,3)$, $C(-1,2,0)$ **.** Si recordamos una de las aplicaciones del producto vectorial, el área del triángulo de vértices conocidos cumple la siguiente relación:

$$A_{Triángulo}=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|$$

El módulo del producto vectorial podemos obtenerlo de la siguiente relación.

$$|\vec{AB}\times\vec{AC}|=|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|\cdot sen(\alpha)$$

Siendo α el ángulo formado por ambos vectores.

O bien podemos directamente el vector resultante del producto vectorial, y luego aplicar su módulo. Vamos a tomar esta segunda opción.

$$\vec{AB}=(2,0,2) \quad , \quad \vec{AC}=(-1,1,-1)$$

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0-2\,\hat{j}+2\,k-(0+\hat{2}\,\hat{i}-2\,\hat{j})=-2\,\hat{i}+2\,\hat{k}$$

$$|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

Siendo el área del triángulo finalmente:

$$A_{Triángulo}=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2} \quad u^2$$

■ *Puntos 3* ♣

Sea el triángulo de vértices $A(-1,1,0)$, $B(0,-2,3)$ y $C(2,1,-1)$.

a) Halla la ecuación del plano que contiene al triángulo .

b) Halla la ecuación general de la recta que une el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y el punto medio del segmento $\overline{AC}$.

a) La determinación lineal del plano $\Pi(\vec{u},\vec{v},A)$ nos permite calcular la ecuación general del plano a partir de un punto del plano y de dos vectores del plano que sean linealmente independientes. El punto puede ser, por ejemplo, $A(-1,1,0)$. Y los vectores linealmente independientes podemos tomarlos de los vértices del triángulo.

$\vec{AB}=(1,-3,3)$, $\vec{AC}=(3,0,-1)$

Los dos vectores no son proporcionales entre si, por lo tanto son linealmente independientes.

$$\Pi(\vec{u},\vec{v},A)=\begin{vmatrix} 1 & 3 & x+1 \\ -3 & 0 & y-1 \\ 3 & -1 & z \end{vmatrix}=0 \rightarrow 0+9(y-1)+3(x+1)-0+(y-1)+9z=0$$

$$10(y-1)+3(x+1)+9z=0$$

$$\Pi: 3x+10y+9z-7=0$$

b) Sea D el punto medio del segmento $\overline{AB}$. Lo calculamos con la semisuma de las componentes de los extremos del segmento → $D(\frac{-1}{2},\frac{-1}{2},\frac{3}{2})$. Sea E el punto medio del segmento $\overline{AC}$, y sus coordenadas son → $E(\frac{-1}{2},1,\frac{-1}{2})$

Obtenemos un vector director de la recta → $\vec{DE}=(0,\frac{3}{2},-2)$

Y podemos escribir la ecuación paramétrica de la recta:

$$r:\left\{\begin{matrix} x=\frac{-1}{2} \\ y=\frac{-1}{2}+\frac{3}{2}\lambda \\ z=\frac{3}{2}-2\lambda \end{matrix}\right\}$$

La ecuación general la obtenemos eliminando el parámetro λ y expresando la recta como el corte de dos planos → $r:\left\{\begin{matrix} x+\frac{1}{2}=0 \\ 4y+3z-\frac{5}{2}=0 \end{matrix}\right\}$

■ *Puntos 4* ♣♣

Los puntos $A(1,3,-4)$, $B(2,6,7)$ y $C(5,-1,2)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.

a) Halla el cuarto vértice D .

b) Halla la ecuación de la recta que pasa por A y C .

c) Halla la ecuación del plano que contine al paralelogramo.

a) El punto medio del segmento que une A y C es:

$$M=(3,1,-1)$$

Y M también es el punto medio del segmento que une B y D . Por lo tanto, si $D(x,y,z)$:

$$(3,1,-1)=\left(\frac{2+x}{2},\frac{6+y}{2},\frac{7+z}{2}\right) \rightarrow x=4 \ , \ y=-4 \ , \ z=-9 \rightarrow D(4,-4,-9)$$

Otra forma de plantearlo es la siguiente. El vector $\vec{AB}$ tiene la misma dirección, sentido y módulo que el vector $\vec{DC}$. Por lo que podemos igualas sus componentes.

$$\vec{AB}=(1,3,11) \ , \ \vec{DC}=(5-x,-1-y,2-z) \rightarrow \left\{\begin{matrix} 1=5-x \\ 3=-1-y \\ 11=2-z \end{matrix}\right\} \rightarrow x=4 \ , \ y=-4 \ , \ z=-9$$

b) Para la recta necesitamos un punto y un vector. El punto puede ser, por ejemplo, $A(1,3,-4)$. Y el vector $\vec{AC}=(4,-4,6)$. La ecuación continua de la recta será:

$$r: \frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+4}{6}$$

c) Para el plano necesitamos un punto y dos vectores linealmente independientes. El punto puede ser, por ejemplo, $A(1,3,-4)$. Uno de los vectores $\vec{AC}=(4,-4,6)$. Y el segundo vector $\vec{AB}=(1,3,11)$. Ambos vectores son linealmente independiente, al tener como extremos finales vértices distintos del paralelogramo.

Otra forma de ver que son independiente es comprobando que no son proporcionales. Es decir: $\frac{4}{1} \neq \frac{-4}{3} \neq \frac{6}{11}$.

Y la ecuación paramétrica del plano resulta:

$$\Pi: \left\{\begin{matrix} x=1+4\alpha+\beta \\ y=3-4\alpha+3\beta \\ z=-4+6\alpha+11\beta \end{matrix}\right\}$$

■ *Puntos 5* ♣♣

Sean los puntos $A(1,2,-1)$ **,** $P(0,0,5)$ **,** $Q(1,0,4)$ **y** $R(0,1,6)$ **.**

a) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A **, es paralela al plano que pasa por los puntos** $P,Q\ y\ R$ **y tal que la primera componente de su vector director es doble de la segunda.**

b) Hallar la distancia del punto A **al plano que pasa por** $P,Q\ y\ R$ **.**

a) Si los puntos $P,Q\ y\ R$ pertenecen a un plano, los siguientes vectores pertenecerán a dicho plano.

$\vec{PQ}=(1,0,-1)$, $\vec{PR}=(0,1,1)$

Por la determinación lineal del plano, su ecuación general será:

$$\Pi(\vec{PQ},\vec{PR},P):\begin{vmatrix}1 & 0 & x\\ 0 & 1 & y\\ -1 & 1 & z-5\end{vmatrix}=0 \rightarrow z-5+0+0-(-x+y+0)=0 \rightarrow \Pi: x-y+z-5=0$$

Este plano es paralelo a la recta r que estamos buscando, que además pasa por el punto $A(1,2,-1)$.

El vector director de esta recta solución será $\vec{u_r}=(x,y,z)$, y el enunciado nos dice que la primera componente de este vector director es doble de la segunda. Es decir:

$\vec{u_r}=(2y,y,z)$

Un vector perpendicular al plano Π también será perpendicular al vector director $\vec{u_r}$. Es decir, el vector normal del plano $\vec{u_\Pi}=(1,-1,1)$ será perpendicular a $\vec{u_r}$ y el producto escalar de ambos será nulo.

$$\vec{u_r}\cdot\vec{u_\Pi}=(1,-1,1)\cdot(2y,y,z)=0 \rightarrow 2y-y+z=0 \rightarrow y+z=0 \rightarrow z=-y \ .$$

Por lo tanto, el vector director de la recta solución resulta:

$\vec{u_r}=(2y,y,-y)$ → Cualquier valor de y no nulo nos ofrece un vector director de la recta (de los infinitos vectores directores que existen). Por ejemplo $y=1 \rightarrow \vec{u_r}=(2,1,-1)$.

Y con un vector y un punto tenemos la ecuación en paramétricas de la recta solución:

$$r:\begin{Bmatrix}x=1+2\beta\\ y=2+\beta\\ z=-1-\beta\end{Bmatrix}$$

b) Para obtener la distancia de un punto $P(x_0,y_0,z_0)$ a un plano $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$ hacemos uso de la siguiente expresión.

$$d(P,\Pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Aplicado al punto $A(1,2,-1)$ y al plano de ecuación general $\Pi: x-y+z-5=0$, resulta:

$$d(P,\Pi)=\frac{|1-2+-1-5|}{\sqrt{1+1+1}}=\frac{7\sqrt{3}}{3}\ u$$

■ *Puntos 6* ♣♣

Dos de los tres vértices de un triángulo son los puntos $A(1,1,1)$ y $B(1,1,3)$. El tercer vértice C está en la recta r que pasa por los puntos $P(-1,0,2)$ y $Q(0,0,2)$.

a) Determinar la ecuación de la recta r.

b) Calcular el punto C para que el área del triángulo sea igual a $\sqrt{15}\,u^2$.

a) El vector director de la recta r será:

$$\vec{PQ}=(1,0,0)$$

Si la recta pasa por el punto $Q(0,0,2)$, la ecuación de la recta será → $r:\left\{\begin{matrix} x=a \\ y=0 \\ z=2 \end{matrix}\right\}$

b) El punto C es un punto arbitrario de la recta → $C(a,0,2)$ → Este punto cumple que forma un triángulo con los puntos A y B que encierra un área de $\sqrt{15}\,u^2$. El área del triángulo se calcula como la mitad del módulo del producto vectorial de $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$.

$$\vec{AB}=(0,0,2)$$

$$\vec{AC}=(a-1,-1,1)$$

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 0 & 2 \\ a-1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0+0+2(a-1)\hat{j}-(0+0-2\hat{i})=2\hat{i}+2(a-1)\hat{j}=(2,2a-2,0)$$

El módulo de este vector resulta:

$$|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\sqrt{2^2+(2a-2)^2}=\sqrt{4+4a^2+4-8a}=\sqrt{4a^2-8a+8}=2\sqrt{a^2-2a+2}$$

Por lo tanto:

$$\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\sqrt{15} \quad\rightarrow\quad \sqrt{a^2-2a+2}=\sqrt{15} \quad\rightarrow\quad a^2-2a+2=15 \quad\rightarrow\quad a^2-2a-13=0$$

Resolvemos la ecuación de segundo grado:

$$a=\frac{2\pm\sqrt{4+52}}{2}=\frac{2\pm\sqrt{56}}{2}$$

Por lo que punto C solución puede tomar dos valores:

$$C\left(\frac{2+\sqrt{56}}{2},0,2\right) \quad , \quad C\left(\frac{2-\sqrt{56}}{2},0,2\right)$$

■ *Puntos 7* ♣

Consideremos los puntos $A(2,6,-3)$ **y** $B(3,3,-2)$ **.**

a) Halla la ecuación de la recta que contiene a ambos puntos.

b) Determina una ecuación para el plano equidistante de ambos puntos.

a) Para escribir la ecuación de una recta necesitamos un vector director de la recta y un punto de la recta.

El vector $\vec{AB}=(1,-3,1)$ es paralelo a la recta, que además pasa por el punto $A(2,6,-3)$. Por lo tanto, la ecuación paramétrica resulta:

$$r:\left\{\begin{array}{c} x=2+a \\ y=6-3a \\ z=-3+a \end{array}\right\}$$

b) El plano equidistante de ambos puntos pasa por el punto medio del segmento $\overline{AB}$. Ese punto medio será: $C=\left(\frac{2+3}{2},\frac{6+3}{2},\frac{-3-2}{2}\right)=\left(\frac{5}{2},\frac{9}{2},-\frac{5}{2}\right)$.

El vector $\vec{AB}=(1,-3,1)$ es perpendicular al plano solución. Y con un vector perpendicular al plano y un punto del plano podemos escribir su ecuación general $Ax+By+Cz+D=0$.

$$\Pi: x-3y+z+D=0$$

El término independiente lo sacamos sustituyendo las coordenadas del punto en la ecuación del plano.

$$\frac{5}{2}-3\cdot\frac{9}{2}-\frac{5}{2}+D=0 \;\rightarrow\; D=\frac{27}{2} \;\rightarrow\; \Pi: x-3y+z+\frac{27}{2}=0$$

■ *Puntos 8* ♣♣♣

Sea el triángulo de vértices $A(1,2,-2)$ **,** $B(0,-3,1)$ **y** $C(-1,0,0)$ **y los planos** $\Pi_1: x+y+z+1=0$ **y** $\Pi_2: \begin{cases} x=-\alpha+\beta+1 \\ y=\alpha-2\beta \\ z=\alpha+\beta \end{cases}$ **.**

a) Obtener la posición relativa de Π_1 **y del plano que contiene al triángulo.**

b) Obtener un vector $\vec{n}_1$ **perpendicular al plano** Π_1 **y un vector** $\vec{n}_2$ **perpendicular al plano** Π_2 **. Obtener el coseno del ángulo formado por ambos vectores.**

c) Obtener las ecuaciones paramétricas de la recta intersección de ambos planos.

a) En primer lugar calculamos el plano que contiene a los puntos A, B y C. Para ello buscamos dos vectores linealmente independientes y un punto del plano, para aplicar la determinación lineal del plano.

$$\begin{matrix} \vec{AB}=(-1,-5,3) \\ \vec{AC}=(-2,-2,2) \\ C(-1,0,0) \end{matrix} \quad \rightarrow \quad \vec{AB} \text{ y } \vec{AC} \text{ son independientes porque } \frac{-1}{-2}\neq\frac{-5}{-2}\neq\frac{3}{2}$$

$$\Pi(\vec{AB},\vec{AC},C) \rightarrow \begin{vmatrix} -1 & -5 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \\ x+1 & y & z \end{vmatrix}=0 \rightarrow 2z-10(x+1)-6y-(-6(x+1)-2y+10z)=0$$

$$-4(x+1)-4y-8z=0 \rightarrow -4x-4y-8z-4=0 \rightarrow \Pi: x+y+2z+1=0$$

Estudiamos la posición relativa de $\Pi: x+y+2z+1=0$ y $\Pi_1: x+y+z+1=0$, resolviendo el sistema de ecuaciones que forman sus dos ecuaciones generales (otra opción sería estudiar directamente los rangos de la matriz del sistema y de la matriz ampliada).

$$\begin{Bmatrix} x+y+2z+1=0 \\ x+y+z+1=0 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Restamos ambas ecuaciones} \rightarrow \quad z=0 \quad \rightarrow \begin{Bmatrix} x+y+1=0 \\ x+y+1=0 \end{Bmatrix}$$

Ambas ecuaciones son idénticas, por lo que podemos obviar una → $x+y+1=0$

Tomamos una incógnita como parámetro libre → $y=\lambda \rightarrow x=-1-\lambda$

La solución del sistema resulta una recta.

$$r: \begin{Bmatrix} x=-1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Ambos planos son secantes y se cortan en la recta } r \text{ .}$$

b) Las coordenadas del vector normal a un plano coincide con los coeficientes A, B y C de la ecuación general del plano.

$$\Pi_1: x+y+z+1=0 \quad\rightarrow\quad \vec{u}_{\Pi_1}=(1,1,1)$$

$$\Pi_2:\begin{Bmatrix} x=-\alpha+\beta+1 \\ y=\alpha-2\beta \\ z=\alpha+\beta \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Pasamos a general} \rightarrow \quad \Pi_2:\begin{vmatrix} -1 & 1 & x-1 \\ 1 & -2 & y \\ 1 & 1 & z \end{vmatrix}=0$$

$$2z+y+(x-1)-(-2(x-1)-y+z)=0 \quad\rightarrow\quad 3(x-1)+2y+z=0$$

$$\Pi_2: 3x+2y+z-3=0 \quad\rightarrow\quad \vec{u}_{\Pi_2}=(3,2,1)$$

El coseno formado por ambos planos coincide con el coseno formado por sus vectores normales.

$$\cos(\alpha)=\left|\frac{\vec{u}_{\Pi_1}\cdot\vec{u}_{\Pi_2}}{|\vec{u}_{\Pi_2}|\cdot|\vec{u}_{\Pi_1}\cdot|}\right|=\left|\frac{(1,1,1)\cdot(3,2,1)}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{14}}\right|=\frac{3+2+1}{\sqrt{42}}=\frac{6\sqrt{42}}{42}=0{,}926 \quad\rightarrow\quad \alpha=22{,}21^{o}$$

c) Por último debemos obtener la recta, en paramétricas, del corte entre los planos $\Pi_1: x+y+z+1=0$ y $\Pi_2: 3x+2y+z-3=0$, para lo cual resolvemos el siguiente sistema:

$$\begin{Bmatrix} 3x+2y+z-3=0 \\ x+y+z+1=0 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Parámetro libre} \quad z=\lambda \quad\rightarrow \begin{Bmatrix} 3x+2y=3-\lambda \\ x+y=-1-\lambda \end{Bmatrix} \quad\rightarrow\quad F_2'=2F_2$$

$$\begin{Bmatrix} 3x+2y=3-\lambda \\ 2x+2y=-2-2\lambda \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Restamos ambas ecuaciones} \rightarrow \quad x=5+\lambda$$

$$y=-1-\lambda-(5+\lambda) \quad\rightarrow\quad y=-6-2\lambda$$

La recta solución es $r:\begin{Bmatrix} x=5+\lambda \\ y=-6-2\lambda \\ z=\lambda \end{Bmatrix}$

Ángulos

■ *Ángulos 1* ♣

Considera las rectas $r:\begin{cases} x=1 \\ z=2 \end{cases}$ **,** $s:\begin{cases} x+y=1 \\ z=2 \end{cases}$ **, y los planos** **,** $\Pi_2: 2x+y-z=1$

a) Obtener el ángulo entre ambas rectas.

b) Obtener el ángulo entre ambos planos.

c) Obtener el ángulo entre la recta s **y el plano** Π_2

a) Debemos obtener los vectores directores de ambas rectas. Podemos aplicar el producto vectorial a los vectores normales de los planos que forman las ecuaciones generales de las rectas.

$r:\begin{cases} x=1 \\ z=2 \end{cases}$ → Vectores normales a los planos → $\vec{u}_1=(1,0,0)$, $\vec{u}_2=(0,0,1)$

$s:\begin{cases} x+y=1 \\ z=2 \end{cases}$ → Vectores normales a los planos → $\vec{u}_3=(1,1,0)$, $\vec{u}_4=(0,0,1)$

$$\vec{u}_1\times\vec{u}_2=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=0+0+0-(0+0+\hat{j})=-\hat{j}=(0,-1,0)$$

$$\vec{u}_3\times\vec{u}_4=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=\hat{i}+0+0-(0+0+\hat{j})=\hat{i}-\hat{j}=(1,-1,0)$$

El coseno del ángulo entre ambas rectas se define como:

$$\cos(\alpha)=\left|\frac{(0,-1,0)\cdot(1,-1,0)}{\sqrt{(-1)^2}\cdot\sqrt{1^2+(-1)^2}}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{2}}\right|=\left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right| \quad \rightarrow \quad \alpha=45^{\circ}$$

b) El ángulo entre ambos planos coincide con el ángulo formado por sus vectores normales.

$\Pi_1: y=0 \quad \rightarrow \quad \vec{u_{\Pi_1}}=(0,1,0)$

$\Pi_2: 2x+y-z=1 \quad \rightarrow \quad \vec{u_{\Pi_2}}=(2,1,-1)$

$$\cos(\alpha)=\left|\frac{(0,1,0)\cdot(2,1,-1)}{\sqrt{1^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}\right|=\left|\frac{1}{\sqrt{6}}\right|=\frac{\sqrt{6}}{6} \quad \rightarrow \quad \alpha=65{,}91^{o}$$

c) El seno del ángulo entre recta y plano se calcula con el vector director de la recta y el vector normal al plano.

$$sen(\alpha)=\left|\frac{(1,-1,0)\cdot(2,1,-1)}{\sqrt{1^2+(-1)^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+(-1)^2}}\right|=\left|\frac{2-1}{\sqrt{12}}\right|=\frac{\sqrt{12}}{12} \quad\rightarrow\quad \alpha=16{,}79^o$$

Simetrías

■ *Simetrías 1* ♣

Sean los puntos $P(2,3,1)$ y $Q(0,1,1)$. Halla la ecuación general y paramétrica del plano Π respecto del cual ambos puntos son simétricos.

El plano Π respecto al cual ambos puntos son simétricos, será perpendicular a la recta que une los puntos P y Q .Además, el plano pasará por el punto medio del segmento $\overline{PQ}$.

Es decir, si obtenemos el vector $\vec{PQ}$ tendemos el vector perpendicular al plano. Y si obtenemos el punto medio del segmento $\overline{PQ}$, tendremos un punto del plano. Y podremos escribir la ecuación general del plano.

$$\vec{PQ}=(-2,-2,0) \rightarrow \vec{u_\Pi}=(-2,-2,0) \rightarrow \Pi:-2x-2y+D=0$$

Punto medio $\overline{PQ} \rightarrow A\left(\frac{2+0}{2},\frac{3+1}{2},\frac{1+1}{2}\right)=(1,2,1)$

Si $A\in\Pi \rightarrow -2(1)-2(2)+D=0 \rightarrow D=6$

La ecuación general delplano solución es $\Pi:-2x-2y+6=0$ → Simplificar → $\Pi:-x-y+3=0$

Para obtener su ecuación paramétrica, resolvemos el sistema formado por esa ecuación con tres incógnitas.

Un parámetro libre será la incógnita que no aparece en la ecuación general: $z=\alpha$

Y el segundo parámetro libre será una de las otras incógnitas: $y=\beta$

Así, podemos despejar la incógnita x : $x=-\beta+3$

Y la ecuación paramétrica del plano resulta:

$$\Pi:\begin{Bmatrix} x=-\beta+3 \\ y=\beta \\ z=\alpha \end{Bmatrix}$$

■ *Simetrías 2 ♣♣♣*

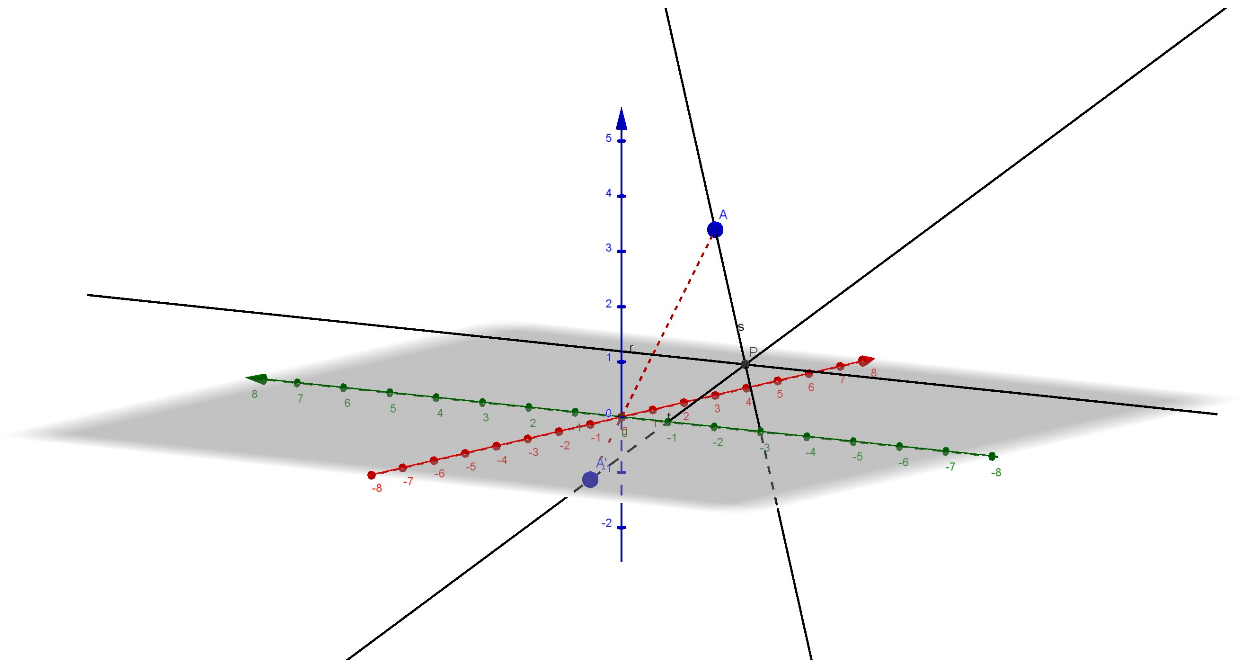
Las rectas $r:\begin{Bmatrix} x=1 \\ y=a \\ z=1 \end{Bmatrix}$ **y** $s:\begin{Bmatrix} x=1+b \\ y=-2+b \\ z=1+b \end{Bmatrix}$ **son secantes en un punto** P **y forman entre sí un ángulo** α **. Encontrar la recta** t **que también pase por** P **y forme con la recta** r **el mismo ángulo que forman** r **y** s **. Escribir la recta** t **en paramétricas, en continua y en general.**

Estos problemas donde aparece el ángulo entre dos rectas, a veces, pueden plantearse de forma más directa usando conceptos de simetría en vez de las fórmulas de ángulos. Si no nos dan el ángulo exacto, la fórmula de ángulo entre dos rectas puede ser difícil de manejar para obtener una solución.

Las tres rectas se cortan en el punto P . Y la recta r será como “un eje de simetría”, donde las rectas s y t se reflejan, formando el mismo ángulo con r . Cogeremos un punto de $A\in s$ distinto de P , obtendremos su simétrico respecto a la recta r , y tendremos así un punto de $A'\in t$.

Con los puntos P y A' podremos escribir la recta t.

La siguiente imagen en tres dimensiones, de Geogebra, nos muestra la solución de nuestros problema.



Para obtener el punto de corte igualamos las componentes paramétricas de las rectas r y s .

$$\left\{\begin{matrix} 1=1+b \\ a=-2+b \\ 1=1+b \end{matrix}\right\} \rightarrow b=0, a=-2 \rightarrow P(1,-2,1)$$

Ahora obtenemos un punto $A\in s$, dando valores al parámetro libre de la recta s .
Por ejemplo $A(3,0,3)\in s$. Y obtenemos el simétrico de A respecto r .
Para ello cogemos el vector director de $r \rightarrow \vec{u}_r=(0,1,0)$
Tomamos un punto arbitrario de $r \rightarrow B=(1,a,1)$
Creamos el vector $\vec{AB}=(-2,a,-2)$
Y forzamos que este vector $\vec{AB}$ sea perpendicular a $\vec{u}_r$, anulando el producto escalar de ambos.

$$\vec{AB}\cdot\vec{u}_r=0 \rightarrow 0+a+0=0 \rightarrow a=0$$

Con el valor del parámetro $a=0$ sacamos $B(1,0,1)$, que será el punto medio del segmento $\overline{AA'}$. Recordamos que $A(3,0,3)$ y $A'(x,y,z)$ son simétricos respecto a la recta r .

$$1=\frac{3+x}{2} \rightarrow x=-1$$

$$0=\frac{y+0}{2} \rightarrow y=0$$

$$1=\frac{3+z}{2} \rightarrow z=-1$$

Y la recta t pasará por el punto $P(1,-2,1)$ y por $A'(-1,0,-1)$. Su vector director será $\vec{PA'}=(-2,2,-2)$. La ecuación paramétrica de la recta es:

$$t:\left\{\begin{matrix} x=1-2\lambda \\ y=-2+2\lambda \\ z=1-2\lambda \end{matrix}\right\}$$

Despejamos el parámetro libre, igualamos y obtenemos la ecuación continua → $\frac{x-1}{-2}=\frac{y+2}{-2}=\frac{z-1}{-2}$

Si en las ecuaciones paramétricas sumamos primera y segunda, y sumamos segunda y tercera, obtenemos la ecuación general → $\left\{\begin{matrix} x+y=-1 \\ y+z=-1 \end{matrix}\right\}$

■ *Simetrías 3* ♣♣

Considera los puntos $P(1,0,-1)$, $Q(2,1,1)$ **y la recta dada por** $r: x-5=y=\frac{z+2}{-2}$ **.**

a) Determina el punto simétrico de P **respecto de** r **.**

b) Calcula el punto de r **que equidista de** P **y** Q **.**

a) Buscamos un punto $P'(x',y',z')$ simétrico de $P(1,0,-1)$ respecto la recta.

Un vector director de la recta es $\vec{u}_r=(1,1,-2)$. Tomamos un punto arbitrario de la recta, cuyas coordenadas coincide con las componentes paramétricas de la recta.

$$A(5+t,t,-2-2t)$$

Trazamos el vector $\vec{PA}=(4+t,t,-1-2t)$ y exigimos que sea perpendicular a la recta. ¿Cómo? Imponiendo que el producto escalar de $\vec{u}_r$ y $\vec{PA}$ sea nulo.

$$\vec{u}_r\cdot\vec{PA}=0 \rightarrow 4+t+t+2+4t=0 \rightarrow t=-1$$

Con el valor del parámetro podemos obtener el punto A de la recta que será el punto medio del segmento $\overline{PP'}$. Recordamos que el punto medio se obtiene como la semisuma de las componentes de los extremos del segmento.

Si $t=-1 \rightarrow A(6,1,-4) \rightarrow (6,1,-4)=(\frac{1+x'}{2},\frac{0+y'}{2},\frac{-1+z'}{2})$

Si dos puntos son iguales, sus coordenadas son iguales. Por lo tanto:

$$x'=11 \quad , \quad y'=2 \quad , \quad z'=-7$$

El punto solución es $P'(11,2,-7)$.

b) Buscamos un punto de la recta que equidiste de P y Q . Nuevamente tomamos el concepto de punto arbitrario de la recta.

$$A(5+t,t,-2-2t)$$

Y exigimos que la distancia de P a A sea igual a la distancia de Q a A .

$$\vec{PA}=(4+t,t,-1-2t) \rightarrow d(P,A)=|\vec{PA}|=\sqrt{(4+t)^2+t^2+(-1-2t)^2}$$

$$\vec{QA}=(3+t,t-1,-3-2t) \rightarrow d(Q,A)=|\vec{QA}|=\sqrt{(3+t)^2+(t-1)^2+(-3-2t)^2}$$

$$16+t^2+8t+t^2+1+4t^2+4t=9+t^2+6t+t^2+1-2t+9+4t^2+12t$$

$$17+12t=19+18t \quad \rightarrow \quad -2=6t \quad \rightarrow \quad t=\frac{-1}{3}$$

Y con el parámetro obtenemos el punto solución → $A\left(\frac{14}{3},-\frac{1}{3},-\frac{4}{3}\right)$

■ *Simetrías 4* ♣

Considera el punto $P(2,-1,3)$ **y el plano** Π **de ecuación** $3x+2y+z=5$ **.**
a) Calcula el punto simétrico del punto respecto del plano.

b) Calcula la distancia del punto al plano.

a) De la ecuación general del plano obtenemos su vector característico, perpendicular al plano:
$\vec{u}=(3,2,1)$

Trazamos la recta que pasa por $P(2,-1,3)$ y con vector director $\vec{u}=(3,2,1)$ $\rightarrow$ $r:\begin{Bmatrix} x=2+3t \\ y=-1+2t \\ z=3+t \end{Bmatrix}$

Esta recta es perpendicular al plano. Obtenemos el punto de corte de recta y plano, llevando la ecuación paramétrica de la recta dentro de la ecuación general del plano:

$$3(2+3t)+2(-1+2t)+(3+t)=5 \rightarrow 6+9t-2+4t+3+t=5 \rightarrow 14t=-2 \rightarrow t=\frac{-1}{7}$$

Llevando el valor del parámetro a la recta, sacamos el punto de corte de recta y plano:

$$A(\frac{11}{7},-\frac{9}{7},\frac{20}{7})$$

Este punto es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, donde $P'(x',y',z')$ es el simétrico de $P(2,-1,3)$ respecto el plano. Como el punto medio es la semisuma de las componentes:

$$(\frac{11}{7},-\frac{9}{7},\frac{20}{7})=(\frac{2+x'}{2},\frac{-1+y'}{2},\frac{3+z'}{2})$$

Igualando componentes:

$x'=\frac{8}{7}$, $y'=\frac{-11}{7}$, $z'=\frac{19}{7}$ $\rightarrow$ El punto solución es $P'(\frac{8}{7},-\frac{11}{7},\frac{19}{7})$

b) Finalmente, la distancia de punto a plano podemos obtenerla con la expresión que relaciona las coordenadas del punto (x_0,y_0,z_0) y la ecuación general del plano $Ax+By+Cz+D=0$:

$$d(P,\Pi)=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}=\frac{|3\cdot 2+2\cdot(-1)+1\cdot(3)-5|}{\sqrt{3^2+2^2+1^2}}=\frac{2}{\sqrt{14}}=\sqrt{\frac{2}{7}}u$$

■ *Simetrías 5 ♣♣♣*

Sea el plano $\Pi : 2x+y-z+8=0$ **.**

a) Calcula el punto P' **, simétrico del punto** $P(2,-1,5)$ **respecto del plano** Π **.**

b) Calcula la recta r' **, simétrico de la recta** $r:\frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{1}$ **respecto del plano** Π **.**

a) La recta s que une los puntos simétricos P y P' es perpendicular al plano $\Pi : 2x+y-z+8=0$, y lo corta en el punto medio del segmento $\overline{PP'}$.

Si $\Pi : 2x+y-z+8=0 \rightarrow \vec{u_\Pi}=(2,1,-1)\perp\Pi \rightarrow \vec{u_\Pi}=\vec{u_s}$, siendo $\vec{u_s}$ el vector director de la recta que une ambos puntos simétricos. Y con vector director y un punto, tenemos la ecuación de la recta:

$$s:\left\{\begin{matrix} x=2+2t \\ y=-1+t \\ z=5-t \end{matrix}\right\}$$

Si llevamos estas ecuaciones paramétricas a la ecuación general del plano, obtenemos el punto de corte de ambos.

$$2(2+2t)+(-1+t)-(5-t)+8=0 \rightarrow t=-1 \rightarrow M=(0,-2,6)\equiv punto \quad medio \quad \overline{PP'}$$

Si $P(2,-1,5)$ y $P'(x,y,z) \rightarrow (0,-2,6)=(\frac{x+2}{2},\frac{-1+y}{2},\frac{5+z}{2}) \rightarrow$ Igualamos cada componente: $x=-2$, $y=-3$, $z=7$.

El punto simétrico buscado es $P'(-2,-3,7)$.

b) Del apartado anterior, el punto P pertenece a la recta r que el enunciado da en este nuevo apartado. Por lo que podemos coger otro punto $Q\in r$ de la recta, sacar su simétrico Q' respecto al plano, y sacar la recta simétrica r' como la recta que pasa por P' y Q' .

También podemos hacerlo de otra manera. Si la recta y el plano se cortasen en un punto, ese punto de corte pertenecería tanto a la recta r como a su simétrica r' , y ya podríamos trazar la recta simétrica al tener dos puntos. Vamos a hacerlo así.

Si pasamos la recta a paramétricas, podremos sustituir directamente en la ecuación general del plano y decidir sobre el resultado que obtengamos.

$$r:\frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{1} \rightarrow r:\left\{\begin{matrix} x=2-2t \\ y=-1+3t \\ z=5+t \end{matrix}\right\} \rightarrow 2(2-2t)+(-1+3t)-(5+t)+8=0 \rightarrow t=3$$

Obtenemos un punto solución, que será el punto de corte de la recta r con el plano. Este punto de corte es $Q(-4,8,8)\in r'$. La recta simétrica r' también corta al plano en ese punto.

Viendo las ecuaciones paramétricas de la recta, es directo que el punto $P(2,-1,5)$ pertenece a r . Y en el apartado anterior obtuvimos el simétrico de este punto respecto al plano: $P'(-2,-3,7)\in r'$. Este punto $P'(-2,-3,7)$ pertenece a la recta simétrica buscada r' .

Contamos con dos puntos de la recta simétrica r' , por lo que podemos sacar un vector director:

$$\vec{P'Q}=\vec{u_{r'}}=(-2,11,1)$$

Y con un punto y un vector director, tenemos la ecuación de la recta simétrica r' .

$$r':\left\{\begin{array}{c} x=-2-2t \\ y=-3+11t \\ z=7+t \end{array}\right\}$$

■ *Simetrías 6* ♣♣♣

Calcular la recta contenida en el plano $\Pi_1: x+y+z=3$ paralela al plano $\Pi_2: x=0$ y que pasa por el punto simétrico de $B(-1,1,1)$ respecto de Π_2 .

Para escribir la ecuación de la recta necesitamos un vector director de la recta y un punto de la recta.

En el enunciado queda claro que la recta pasa por el punto simétrico de $B(-1,1,1)$ respecto de Π_2 . Por lo tanto, calculemos ese punto simétrico.

Para ello tomamos el vector normal a $\Pi_2: x=0 \rightarrow \vec{u_{\Pi:2}}=(1,0,0)$ → Trazamos la recta perpendicular a Π_2 que pasa por $B(-1,1,1) \rightarrow r: \begin{Bmatrix} x=-1+t \\ y=1 \\ z=1 \end{Bmatrix}$

Obtenemos el punto de corte de r con Π_2 , sustituyendo la ecuación en paramétrica de la recta en la ecuación general del plano → $(-1+t)=0 \rightarrow t=1$ → Llevando el valor del parámetro a la recta r tendremos el punto de corte buscado → $\begin{Bmatrix} x=-1+1 \\ y=1 \\ z=1 \end{Bmatrix} \rightarrow P(0,1,1)$

Este punto de corte es el punto medio del segmento $\overline{BB'}$, siendo $B'(x,y,z)$ el punto simétrico de $B(-1,1,1)$ respecto a $\Pi_2 \rightarrow (0,1,1)=(\frac{x-1}{2},\frac{y+1}{2},\frac{z+1}{2}) \rightarrow B'(1,1,1)$ → Este punto pertenece a la recta solución de nuestro ejercicio.

Necesitamos, por último, un vector paralelo a la recta solución.

Los planos $\Pi_1: x+y+z=3$ y $\Pi_2: x=0$ no son paralelos, ya que sus coeficientes A, B, C no son proporcionales. Tampoco son coincientes, por lo que ambos planos se cortan en una recta. Esa recta de corte es paralela a la recta solución del ejercicio, ya que el enunciado afirma que la recta solución está contenida en $\Pi_1: x+y+z=3$ y es paralela a $\Pi_2: x=0$.

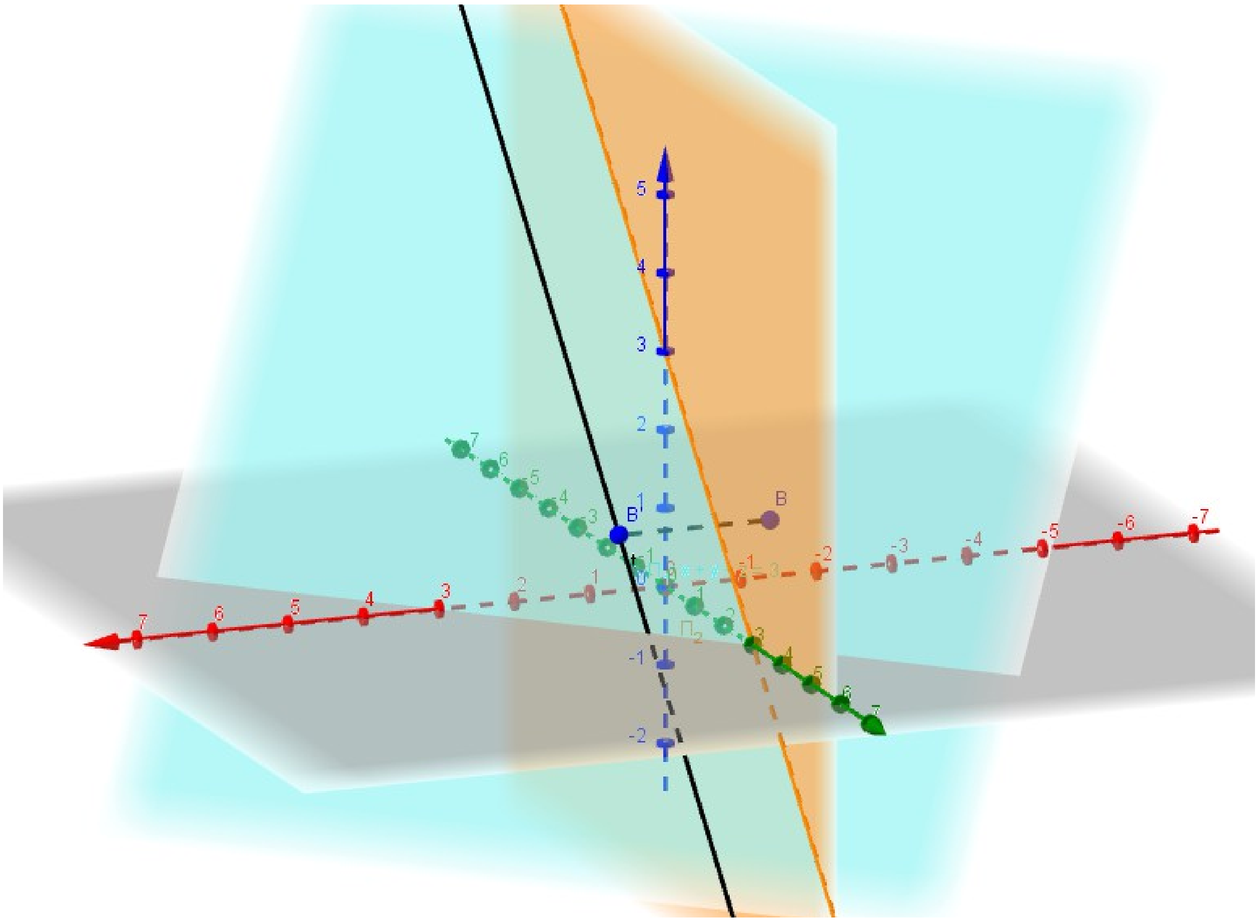
Calculemos la recta de corte de ambos planos, sustituyendo la ecuación $\Pi_2: x=0$ en $\Pi_1: x+y+z=3$

$\rightarrow y+z=3 \rightarrow z=\lambda \rightarrow y=3-\lambda \rightarrow s: \begin{Bmatrix} x=0 \\ y=3-\lambda \\ z=\lambda \end{Bmatrix} \rightarrow \vec{u_s}=(0,-1,1)$

El vector director $\vec{u_s}=(0,-1,1)$ es paralelo a la recta solución del ejercicio. Como esta recta pasa por el punto $B'(1,1,1)$ calculado anteriormente su ecuación será:

$$t: \begin{Bmatrix} x=1 \\ y=1-\lambda \\ z=1+\lambda \end{Bmatrix}$$

Con Geogebra dibujamos los planos y la recta solución de nuestro ejercicio.



Distancias

■ *Distancias 1* ♣♣♣

Sean las siguientes rectas:

$$r:\begin{Bmatrix} x+y=1 \\ y+z=1 \end{Bmatrix} \quad , \quad s:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=z+2$$

a) Comprobar que son cruzadas.

b) Obtener la recta perpendicular a r y s , que corta a ambas rectas a la vez.

c) Obtener la distancia entre ambas rectas.

a) Para estudiar la posición relativa de ambas rectas tengo dos opciones:

- Obtener un vector director de cada recta y un vector formado por dos puntos cualesquiera de ambas rectas, y estudiar el rango de los tres vectores. Ambas rectas serán cruzadas si el rango de esa matriz es 3.

- Pasar todas las rectas a su ecuación general y plantear un sistema de cuatro ecuaciones y tres incógnitas. Ambas rectas serán cruzadas si el rango de la matriz del sistema es 3 y el rango de la matriz ampliada es 4.

Voy a seguir el primer método.

El vector directos $\vec{u}_r \| r$ podemos obtenerlo **pasando la ecuación general a paramétricas, o bien realizando el producto vectorial de los vectores normales a los planos que aparecen en la ecuación general**.

$$\vec{u}_r=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\hat{i}+0+\hat{k}-(0+0+\hat{j})=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}=(1,-1,1)$$

De la ecuación continua de la recta s obtenemos su vector director → $\vec{u}_s=(2,-1,1)$

Dando, por ejemplo, el valor $x=0$ en la ecuación general de la recta r sacamos un punto que pertenezca a la recta r → $A(0,1,0)\in r$

De la ecuación continua de la recta s obtenemos directamente un punto de la recta s → $B(1,0,-2)\in s$

Creamos el vector formado por ambos puntos → $\vec{AB}=(1,-1,-2)$

Estudiamos el rango de la matriz formada por los vectores $(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{AB})$ → $M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

Recordamos que el rango coincide con la dimensión del mayor menor no nulos. Y que el rango es el número de vectores linealmente independientes contenidos en la matriz.

Calculamos el determinante de la matriz. Si es no nulo, su rango será 3.

$$|M|=2-2-1-(-1-1+4)=-3\neq 0 \quad \rightarrow \quad rango(M)=3$$

Los tres vectores son linealmente independientes → Rectas cruzadas

b) La recta t es perpendicular a ambas rectas del enunciado y las corta en un punto. Por lo tanto, el vector director de la recta t es igual al producto vectorial de los vectores directores de las rectas del enunciado.

$$\vec{u}_t=\vec{u}_r\times\vec{u}_s=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=-\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}-(-2\hat{k}-\hat{i}+\hat{j})=\hat{j}+\hat{k}=(0,1,1)$$

Recuerda que con un vector director de la recta y un punto de la recta, ya podemos trazar la recta. Por lo tanto, nos falta obtener un punto de la recta t .

Para ello vamos a obtener el plano que contiene a la recta r y que es paralelo al vector $\vec{u}_t$. Este plano cortará a la recta s en el punto de intersección de la recta s con la recta t .

El plano lo obtenemos a partir de la determinación lineal, ya que tenemos dos vectores paralelos al plano y podemos tomar un punto de la recta r como punto del plano.

$$\Pi(\vec{u}_r,\vec{u}_t,A) \quad \rightarrow \quad \begin{vmatrix}1 & 0 & x\\ -1 & 1 & y-1\\ 1 & 1 & z\end{vmatrix}=0 \quad \rightarrow \quad z+0-x-(x+y-1+0)=0 \quad \rightarrow \quad \Pi:-2x-y+z+1=0$$

Intersectamos este plano con la recta s . Para ellos sustituimos los valores de la ecuación en paramétricas de la recta dentro de la ecuación general del plano.

$$s:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=z+2 \quad \rightarrow \quad s:\begin{Bmatrix}x=1+2\lambda\\ y=-\lambda\\ z=-2+\lambda\end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad -2(1+2\lambda)+\lambda-2+\lambda+1=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=\frac{-3}{2}$$

El punto $P\in s, P\in t$ será → $P\left(1+2\cdot\frac{-3}{2},\frac{3}{2},-2-\frac{3}{2}\right) \quad \rightarrow \quad P\left(-2,\frac{3}{2},-\frac{7}{2}\right)$

Y la recta t solución resulta → $t:\left\{\begin{matrix} x=-2 \\ y=\frac{3}{2}+\alpha \\ z=\frac{-7}{2}+\alpha \end{matrix}\right\}$

Un poco largo, ¿verdad?

Hay **otra forma de resolverlo**... Sí, siempre hay más de una forma para resolver estos problemas de geometría.

Voy a tomar dos puntos arbitrarios de la rectas. Para ello, debo expresarla en paramétricas.

$$r:\left\{\begin{matrix} x+y=1 \\ y+z=1 \end{matrix}\right\} \rightarrow r:\left\{\begin{matrix} x=\alpha \\ y=1-\alpha \\ z=\alpha \end{matrix}\right\} \rightarrow A(\alpha, 1-\alpha, \alpha)$$

$$s:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=z+2 \rightarrow s:\left\{\begin{matrix} x=1+2\lambda \\ y=-\lambda \\ z=-2+\lambda \end{matrix}\right\} \rightarrow B(1+2\lambda, -\lambda, -2+\lambda)$$

Donde uso dos letras distintas para los parámetros libres, ya que son dos rectas distintas.

Realizo el vector entre ambos puntos arbitrarios.

$$\vec{AB}=(1+2\lambda-\alpha, -\lambda-1+\alpha, -2+\lambda-\alpha)$$

Y este vector será el vector director de la recta t solución si es perpendicular a ambas rectas del enunciado. Es decir, el producto escalar de este vector con los vectores directores de las rectas debe ser nulo.

$$\vec{AB}\cdot\vec{u_r}=0 \rightarrow (1+2\lambda-\alpha, -\lambda-1+\alpha, -2+\lambda-\alpha)\cdot(1,-1,1)=0$$

$$1+2\lambda-\alpha+\lambda+1-\alpha-2+\lambda-\alpha=0 \rightarrow 4\lambda-3\alpha=0$$

$$\vec{AB}\cdot\vec{u_s}=0 \rightarrow (1+2\lambda-\alpha, -\lambda-1+\alpha, -2+\lambda-\alpha)\cdot(2,-1,1)=0$$

$$2+4\lambda-2\alpha+\lambda+1-\alpha-2+\lambda-\alpha=0 \rightarrow 6\lambda-4\alpha=-1$$

Y formamos el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\left\{\begin{matrix} 4\lambda-3\alpha=0 \\ 6\lambda-4\alpha=-1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \lambda=\frac{-3}{2} \quad , \quad \alpha=-2$$

Con estos valores de los parámetros → $A(-2,3,-2)$, $B(-2,\frac{3}{2},-\frac{7}{2})$ → $\vec{AB}=(0,-\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$

Los puntos A y B pertenecen a la recta solución t .

Este vector es director de la recta t → $\vec{u}_t=\vec{AB}=(0,-\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$

Fíjate que este vector es proporcional a $\vec{u}_t=(0,1,1)$, que es el vector que obtuvimos por el primer método.

Y con el vector director y un punto de la recta t tenemos la recta → $t:\begin{Bmatrix} x=-2 \\ y=\frac{3}{2}+\alpha \\ z=\frac{-7}{2}+\alpha \end{Bmatrix}$

c) Los dos métodos del apartado anterior son largos. La ventaja del segundo método es que obtenemos los puntos intersección de la recta solución t con las dos rectas del enunciado. Por lo que la distancia entre ambas rectas será la distancia entre ambos puntos de corte.

$$A(-2,3,-2) \quad , \quad B(-2,\frac{3}{2},-\frac{7}{2}) \quad \rightarrow \quad \vec{AB}=(0,-\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$$

$$d(r,s)=d(A,B)=|\vec{AB}|=\frac{3\sqrt{2}}{2} \quad u$$

Si no tenemos ambos puntos de corte, podemos usar la siguiente fórmula para la distancia de dos rectas cruzadas.

$$d(r,s)=\frac{|\vec{AB}\cdot(\vec{u}_r\times\vec{u}_s)|}{|\vec{u}_r\times\vec{u}_s|}$$

Donde $\vec{u}_r,\vec{u}_r$ son los vectores directores de las rectas y $\vec{AB}$ es el vector formado por dos puntos que elijamos de ambas rectas. En nuestro ejemplo:

$$\vec{u}_s=(1,-1,1)$$

$$\vec{u}_s=(2,-1,1)$$

$$A(0,1,0)\in r \quad , \quad B(1,0,-2)\in s \quad \rightarrow \quad \vec{AB}=(1,-1,-2)$$

$$d(r,s)=\frac{\left|\vec{AB}\cdot(\vec{u}_r\times\vec{u}_s)\right|}{\left|\vec{u}_r\times\vec{u}_s\right|}=\frac{\left|\vec{AB}\cdot(0,1,1)\right|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=\frac{\left|(1,-1,-2)\cdot(0,1,1)\right|}{\sqrt{2}}=\frac{\left|0-1-2\right|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}\quad u$$

Resultado que coincide con el obtenido anteriormente. El problema se merece un **chiste**.

“Panadero, ¿tiene pan integral?”

“No, pero si quieres te derivo a un pan de centeno”... jajajaja!!

■ *Distancias 2* ♣♣

Obtener punto de la recta $r:\left\{\begin{matrix} x+y=1 \\ z=0 \end{matrix}\right\}$ **que equidiste del punto** $P(0,1,-1)$ **y del plano de ecuación general** $\Pi: x+y-z=4$ **.**

Debemos obtener un punto arbitrario de la recta e igualar su distancia al punto P y al plano Π para determinarlo de forma única.

Pasamos la recta a paramétrica para obtener punto arbitrario.

$$y=\lambda \;\rightarrow\; r:\left\{\begin{matrix} x=1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{matrix}\right\} \;\rightarrow\; A(1-\lambda,\lambda,0)$$

Calculamos las distancias.

$$d(A,P)=\sqrt{(\lambda-1)^2+(1-\lambda)^2+(-1)^2}=\sqrt{2\lambda^2-4\lambda+3}$$

$$d(A,\Pi)=\frac{|1\cdot(1-\lambda)+1\cdot\lambda+0-4|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{|-3|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

Igualamos distancias

$$\sqrt{2\lambda^2-4\lambda+3}=\sqrt{3} \;\rightarrow\; 2\lambda^2-4\lambda+3=3 \;\rightarrow\; 2\lambda^2-4\lambda=0 \;\rightarrow\; \lambda=0,\lambda=2$$

Los puntos solución son: $A(1,0,0)$, $A(-1,2,0)$

■ *Distancias 3* ♣♣

Calcular las coordenadas de un punto de la recta $r:\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2}$ **que equidiste de los planos** $\Pi_1: 3x+4y-1=0$ **y** $\Pi_2: 4x-3y+9=0$ **.**

Debemos obtener la distancia de un punto arbitrario de la recta a cada uno de los planos e igualar ambas distancias. Es decir.

$$r:\frac{x-2}{2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-2}{2} \;\rightarrow\; r:\left\{\begin{matrix} x=2+2\lambda \\ y=-1+3\lambda \\ z=2+2\lambda \end{matrix}\right\} \;\rightarrow \text{Punto arbitrario} \quad P(2+2\lambda,-1+3\lambda,2+2\lambda)$$

La distancia de ese punto arbitrario al primer plano será:

$$d(P,\Pi_1)=\frac{|3(2+2\lambda)+4(-1+3\lambda)+0-1|}{\sqrt{3^2+4^2+0^2}}=\frac{|1+18\lambda|}{5}$$

La distancia del punto arbitrario al segundo plano será:

$$d(P,\Pi_2)=\frac{|4(2+2\lambda)-3(-1+3\lambda)+0+9|}{\sqrt{4^2+3^2+0^2}}=\frac{|20-\lambda|}{5}$$

Igualamos → $\frac{|1+18\lambda|}{5}=\frac{|20-\lambda|}{5}$ → Al igualar dos valores absolutos debemos considerar la opción positiva (ambos argumentos postivos o negativos) y la opción negativa (un argumento positivo y el otro negativo). Es decir:

$$1+18\lambda=20-\lambda \;\rightarrow\; \lambda=1 \;\rightarrow\; P(4,2,4)$$

$$-1-18\lambda=20-\lambda \;\rightarrow\; -17\lambda=21 \;\rightarrow\; \lambda=\frac{-21}{17} \;\rightarrow\; P\left(\frac{-8}{17},\frac{-80}{17},\frac{-8}{17}\right)$$

■ *Distancias 4* ♣♣

Sea la recta $r:\begin{cases}3x+2y=0\\3x+z=0\end{cases}$ **. Halla los puntos de la recta cuya distancia al origen sea de 4 unidades.**

Tmamos un punto arbitrario de la recta, y forzamos que su distancia al origen de coordenadas sea igual a 4. El punto arbitrario lo tomamosde la ecuación paramétrica de la recta.

$$r:\begin{cases}x=\lambda\\y=\dfrac{-3}{2}\lambda\\z=-3\lambda\end{cases} \quad \text{→ Punto arbitrario de la recta} \quad A(\lambda,-\frac{3}{2}\lambda,-3\lambda)$$

$$O(0,0,0) \rightarrow \vec{AO}=(\lambda,-\frac{3}{2}\lambda,-3\lambda) \rightarrow |\vec{AB}|=\sqrt{\lambda^2+\frac{9}{4}\lambda^2+9\lambda^2}=4 \rightarrow \sqrt{\frac{50}{4}\lambda^2}=4$$

$$\sqrt{50\lambda^2}=8 \rightarrow 50\lambda^2=64 \rightarrow \lambda=\pm\sqrt{\frac{64}{50}} \rightarrow \lambda=\frac{\pm 8}{5\sqrt{2}}=\frac{\pm 4\sqrt{2}}{5}$$

Puntos solución → $A_1(\frac{4\sqrt{2}}{5},-\frac{6\sqrt{2}}{5},\frac{-12\sqrt{2}}{5})$, $A_2(\frac{-4\sqrt{2}}{5},\frac{6\sqrt{2}}{5},\frac{12\sqrt{2}}{5})$

Vectores

■ *Vectores 1* ♣

a) ¿Pueden existir vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ tales que $|\vec{u}|=2$, $|\vec{v}|=3$ y $\vec{u}\cdot\vec{v}=8$? Justifica la respuesta.

b) Determina todos los vectores $\vec{u}=(a,0,b)$ que tengan módulo 8 y sean perpendiculares a la recta $r:\begin{Bmatrix} x+y+z=0 \\ x-y+z-2=0 \end{Bmatrix}$.

a) El producto escalar de dos vectores se define como el producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman entre sí.

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha$$

Si el producto escalar es igual a 8 $\rightarrow$ $|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot\cos\alpha=8$

Si $|\vec{u}|=2$ y $|\vec{v}|=3$ $\rightarrow$ $2\cdot3\cdot\cos\alpha=8$ $\rightarrow$ $\cos\alpha=\frac{4}{3}>1$

Este resultado no es posible, ya que el función coseno está acotada superiormente por 1 . Por lo tanto, no pueden existir dos vectores con las condiciones del enunciado.

b) Si $\vec{u}=(a,0,b)$ tiene módulo 8 → $\sqrt{a^2+b^2}=8$.

Si además $\vec{u}=(a,0,b)$ debe ser perpendicular a la recta $r:\begin{Bmatrix} x+y+z=0 \\ x-y+z-2=0 \end{Bmatrix}$ significa que el producto escalar de $\vec{u}$ con el vector director de la recta debe anularse (por formar entre sí 90º).

Pasamos la recta a paramétricas para obtener su vector director.

$$r:\begin{Bmatrix} x+y+z=0 \\ x-y+z-2=0 \end{Bmatrix} \rightarrow z=\lambda \rightarrow r:\begin{Bmatrix} x+y=-\lambda \\ x-y=-\lambda+2 \end{Bmatrix}$$

Sumamos ambas ecuaciones.

$$2x=-2\lambda+2 \rightarrow x=1-\lambda \rightarrow y=-\lambda-(1-\lambda) \rightarrow y=-1$$

La recta en paramétricas resulta → $r:\begin{Bmatrix} x=1-\lambda \\ y=-1 \\ z=\lambda \end{Bmatrix}$ $\rightarrow$ $\vec{u}_r=(-1,0,1)$

Hacemos el producto escalar e igualamos a cero.

$$\vec{u}\cdot\vec{u}_r=0 \;\rightarrow\; -a+b=0 \;\rightarrow\; a=b$$

Llevamos este resultado a la primera condición obtenida $\sqrt{a^2+b^2}=8$ y despejamos.

$$\sqrt{a^2+a^2}=8 \;\rightarrow\; \sqrt{2a^2}=8 \;\rightarrow\; 2a^2=64 \;\rightarrow\; a=\pm\sqrt{32}=\pm 4\sqrt{2}$$

Los vectores solución son $\vec{u}=(4\sqrt{2},0,4\sqrt{2})$ y $\vec{u}=(-4\sqrt{2},0,-4\sqrt{2})$

Producto vectorial, producto mixto, áreas y volúmenes

■ *Producto vectorial y mixto, áreas y volúmenes 1* ♣♣

Determina todos los vectores $\vec{u}=(a,0,b)$ **que tengan módulo** 8 **y sean perpendiculares a la recta** $r:\begin{Bmatrix} x+y+z=0 \\ x-y+z-2=0 \end{Bmatrix}$ **.**

Una primera condición es que el módulo sea igual a 8 → $\sqrt{a^2+b^2}=8$

La segunda condición es que el vector sea perpendicular a la recta. Es decir, el producto escalar del vector y del vector director de la recta debe ser nulo.

¿Cómo obtener el vector director de la recta? O bien pasando la ecuación a paramétricas o bien haciendo el producto vectorial de los vectores característicos que forman la recta en su ecuación general.

$$r:\begin{Bmatrix} x+y+z=0 \\ x-y+z-2=0 \end{Bmatrix} \rightarrow \vec{u_{\Pi_1}}=(1,1,1) \quad , \quad \vec{u_{\Pi_2}}=(1,-1,1)$$

$$\vec{u_r}=|\vec{u_{\Pi_1}}\times\vec{u_{\Pi_2}}|=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}-(\hat{k}+\hat{j}-\hat{i})=2\hat{i}-2\hat{k} \rightarrow \vec{u_r}=(2,0,-2)$$

Anulamos el producto escalar de $\vec{u}=(a,0,b)$ y de $\vec{u_r}=(2,0,-2)$.

$$\vec{u}\cdot\vec{u_r}=0 \rightarrow (a,0,b)\cdot(2,0,-2)=0 \rightarrow 2a-2b=0 \rightarrow a=b$$

Por lo tanto, si $\sqrt{a^2+b^2}=8 \rightarrow \sqrt{2a^2}=8 \rightarrow 2a^2=64 \rightarrow a=\pm\sqrt{32}$

Los vectores solución son:

$$\vec{u}=(\sqrt{32},0,\sqrt{32}) \quad , \quad \vec{u}=(-\sqrt{32},0,-\sqrt{32})$$

■ *Producto vectorial y mixto, áreas y volúmenes 2* ♣

Tres vértices consecutivos de un paralelogramo son $A(1,3,-4), B(2,6,7), C(5,-1,2)$ **.**

a) Calcular el área del paralelogramo.

b) Obtener el cuarto vértice del paralelogramo.

a) Si obtenemos dos vectores del paralelogramo con un vértice común, podremos obtener su área haciendo el módulo del producto vectorial de ambos vectores.

$$\vec{AB}=(1,3,11) \quad , \quad \vec{AC}=(4,-4,6) \quad \rightarrow \quad Área=|\vec{AB}\times\vec{AC}|$$

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & 3 & 11\\ 4 & -4 & 6\end{vmatrix}=18\hat{i}+44\hat{j}-4\hat{k}-(12\hat{k}-44\hat{i}+6\hat{j})=62\hat{i}+38\hat{j}-16\hat{k}=(62,38,-16)$$

$$Área=|\vec{AB}\times\vec{AC}|=6\sqrt{154}\,u^2$$

b) El cuarto vértice lo obtenemos sabiendo que los lados opuestos del paralelogramo son paralelos y de igual longitud. Si $D(x,y,z)$, tendremos:

$$\vec{AB}=\vec{DC} \quad \rightarrow \quad (1,3,11)=(5-x,-1-y,2-z)$$

Igualamos componentes → $(x,y,z)=(4,-4-9)$

■ *Producto vectorial y mixto, áreas y volúmenes 3* ♣

Sean los vectores $\vec{u}=(1,0,1)$ **,** $\vec{v}=(0,2,1)$ **,** $\vec{w}=(m,1,n)$ **.**

a) Halla m y n sabiendo que los tres vectores son linealmente dependientes y que $\vec{w}$ **es ortogonal a** $\vec{u}$ **.**

b) Para n=1, halla los valores de m para que el tetraedro determinado por los tres vectores tenga volumen 10 unidades cúbicas.

a) Tres vectores linealmente dependientes no tienen rango igual a 3. Por lo tanto, el determinante formado por los tres vectores debe anularse.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ m & 1 & n\end{pmatrix} \rightarrow \quad |A|=0 \quad \rightarrow \quad 2n+0+0-(2m+0+1)=0 \quad \rightarrow \quad 2n-2m=1$$

Una segunda condición la sacamos de los vectores que son ortogonales entre sí, es decir, que son perpendiculares. El producto escalar de dos vectores perpendiculares es igual a 0.

$$\vec{u}\cdot\vec{w}=0 \quad \rightarrow \quad (1,0,1)\cdot(m,1,n)=0 \quad \rightarrow \quad m+n=0 \quad \rightarrow \quad m=-n$$

Con ambas condiciones tenemos un sistema 2x2. Llevamos $m=-n$ a la primera condición.

$$2n-2m=1 \quad \rightarrow \quad 4n=1 \quad \rightarrow \quad n=\frac{1}{4} \quad , \quad m=\frac{-1}{4}$$

b) El volumen de un tetraedro es un sexto del valor absoluto del producto mixto de los tres vectores.

$$V=\frac{1}{6}|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$$

El producto mixto podemos obtenerlo de forma directa mediante el siguiente determinante:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ m & 1 & 1\end{vmatrix}=2-(2m+1)=1-2m$$

Por lo tanto:

$$10=\frac{1}{6}|1-2m| \quad \rightarrow \quad 60=|1-2m|$$

Es una ecuación con valor asboluto, por lo que debo considerar la opción positiva y la opción negativa en argumento del valor absoluto.

$$60=1-2m \quad \rightarrow \quad m=\frac{-59}{2}$$

$$60=2m-1 \quad \rightarrow \quad m=\frac{61}{2}$$

■ *Producto vectorial y mixto, áreas y volúmenes 4* ♣

Define el producto vectorial de dos vectores. Dados los vectores $\vec{u}=(2,2,0)$ **y** $\vec{v}=(1,1,-1)$ **, calcula un vector perpendicular a ambos vectores y que sea unitario.**

El producto vectorial de dos vectores $\vec{u}$ y $\vec{v}$ se denota como $\vec{u}\times\vec{v}$ y es un nuevo vector, con dirección perpendicular al plano formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$, sentido el marcado por la regla de la mano derecha y módulo igual a:

$$|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot sen(\alpha)$$

Siendo α el ángulo formado por $\vec{u}$ y $\vec{v}$.

Las componentes del vector resultante del producto vectorial se obtienen de realizar un determinante donde la primera fila está formado por los vectores de la base canónica, y en las otras dos filas los vectores implicados en el producto vectorial.

$$\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-2\,\hat{i}+0+2\,\hat{k}-(2\hat{k}+0-2\,\hat{j})=-2\,\hat{i}+2\,\hat{j}=(-2,2,0)$$

El módulo de este vector resulta → $|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{(-2)^2+2^2+0^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$

Y si dividimos el vector por su módulo, lo normalizamos y tendremos el vector unitario perpendicular que solicita el enunciado:

$$\hat{w}=(\frac{-2}{2\sqrt{2}},\frac{2}{2\sqrt{2}},0)=(\frac{-\sqrt{2}}{2},\frac{\sqrt{2}}{2},0)$$