Repaso FUNDAMENTAL para cursillo preparatorio a SELECTIVIDAD

Índice de contenido

0. Consejos para Selectividad

Dispones de 90 minutos para el examen. Dedica tiempo a leer detenidamente las dos opciones, al completo, y razonar qué opción crees que controlas mejor.

No decidas solo porque el primer ejercicio sea muy sencillo o muy difícil. Lee los cuatro ejercicios de cada opción y piensa cómo habría que plantearlos.

Puedes dedicar hasta 10 minutos en decidir que opción elegir. Una vez pasado ese tiempo, mi consejo es que elijas una opción y no la cambies.

Explica todos los pasos. Escribe todas las operaciones. Facilita la tarea al corrector. Se ordenado. Indica claramente la solución final del ejercicio y responde claramente a lo que estén preguntando.

Si usas un Teorema o regla, nómbrala (L'Hôpital, Barrow, Sarrus, Rouché-Frobenius, inducción matemática, etc.).

Si llegas a un resultado que no tiene ni pies ni cabezas, y te das cuenta, escribe por lo menos "este resultado no tiene sentido por esto, por esto y por esto... pero no encuentro el fallo en mis operaciones ni en mi razonamiento". No dejar barbaridades escritas sin más.

Lleva calculadora que funcione bien. Si usas razones trigonométricas, recuerda que modo "DEG" devuelve ángulos en grados y el modo "RAD" en radianes.

Y piensa que vas bien preparado. Has trabajado duro estos dos años de Bachillerato y has hecho ejercicios más difíciles de los que te van a preguntar en Selectividad.

¡Ánimo!

1. Funciones elementales, dominio, valor absoluto, composición y función inversa

El dominio de un polinomio son todos los reales.

El dominio del seno y del coseno son todos los reales. Si la calculadora está en modo “DEG” obtienes los ángulos en grados. Si está en modo “RAD” obtienes los ángulos en radianes. Recuerda que 360º son π radianes.

El dominio de $f(x)=e^x$ son todos los reales. La exponencial siempre pasa por el punto $(0,1)$.

El dominio del $f(x)=\ln(x)$ es $(0,+\infty)$. El logaritmo siempre pasa por $(1,0)$.

El dominio de la suma, la resta y el producto de funciones es la intersección del dominio de cada función.

El dominio de un cociente de funciones es la intersección del dominio de cada función, menos los valores que anulan al denominador. Así, por ejemplo, el dominio de un cociente de polinomios son todos los reales menos los valores que anulan al denominador.

En el dominio de $\ln(f(x))$ exigimos la inecuación $f(x)>0$. En el dominio de $\sqrt{f(x)}$ exigimos la inecuación $f(x)\geq 0$. Para resolver una inecuación de una función obtenemos las raíces del numerador y del denominador, los situamos en la recta real y vemos el signo que toma la función. El dominio será la unión de los intervalos que satisfagan el signo de la inecuación.

Si en una función encontramos un valor absoluto, debemos romperlo antes de operar. Para romper el valor absoluto, se iguala su argumento a cero, se obtienen las raíces de numerador y denominador, se representan en la recta real y se evalúa el signo de dicho argumento. Donde sea positivo, se quita el valor absoluto sin más. Donde sea negativo, se quita el valor absoluto y se coloca delante el signo negativo.

Al componer dos funciones, introducimos una función dentro de otra. Si la composición es igual a x ambas funciones son inversas. Para obtener la inversa $f^{-1}(x)$ se iguala $f(x)=y$, se despeja la variable x en función de y , para intercambiar finalmente el nombre de las variables.

Dada la gráfica de $f(x)$ y un número real positivo $k>0$, la gráfica $f(x)+k$ desplaza verticalmente hacia arriba la gráfica de $f(x)$. Mientras que $f(x)-k$ la desplaza verticalmente hacia abajo.

La gráfica $f(x+k)$ desplaza horizontalmente a la izquierda la gráfica de $f(x)$. Mientras que $f(x-k)$ la desplaza horizontalmente hacia la derecha.

Ejemplos

1a) Estudiar el dominio de $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$, $f(x)=\ln\left(\dfrac{x}{x-1}\right)$, $f(x)=\sqrt{x^2+2x-3}$, $f(x)=\dfrac{x}{\ln(x)}$

1b) Romper en trozos la función $f(x)=\dfrac{x}{1+\left|\dfrac{x-1}{x+4}\right|}$

1c) Obtener la inversa de $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ y comprobar que $(f\circ f^{-1})(x)=x$ y que $(f^{-1}\circ f)(x)=x$

1d) Haz un esbozo de la gráfica de $f(x)=|x^2-4|$

1e) Dibuja sobre los mismos ejes $f(x)=\cos(x)$ y $g(x)=sen(x)$ en el intervalo $[0,\pi/2]$

1f) Dibuja sobre los mismos ejes $f(x)=x^2-2x$ y $g(x)=-x^2+4x$

1g) Sea $f(x)=-x^2+2x+3$ y la recta $2x+y-7=0$. Represéntalas sobre los mismos ejes y obtén sus puntos de corte.

1h) Representar sobre los mismos ejes la función $f(x)=x^2$ y la función $y=k$. Obtener puntos de corte de ambas funciones.

2. Asíntotas, límites, indeterminaciones y L'Hôpital

En las asíntotas verticales $x=x_0$ siempre debemos hacer los límites laterales, para saber si la función tiende a más o a menos infinito a la derecha y a la izquierda de x_0 . Una asíntota vertical es una recta vertical. En un cociente de polinomios las asíntotas verticales aparecen en los valores que anulan al denominador.

Las asíntotas horizontales $y=k$ se calculan haciendo el límite de la función cuando x tiende a infinito. Una asíntota horizontal es una recta horizontal (pendiente nula). En un cociente de polinomios, basta con hacer $\lim_{x \to \infty} f(x)$, ya que si existe la asíntota horizontal en $x \to +\infty$ será la misma que aparezca en $x \to -\infty$. Si en nuestra función tenemos exponencial, logaritmo, raíces y/o valores absolutos que rompan la función a trozos, deberemos realizar tanto $\lim_{x \to \infty} f(x)$ como $\lim_{x \to -\infty} f(x)$ y podríamos tener dos asíntotas horizontales distintas.

Si no hay asíntota horizontal, puede aparecer asíntota oblicua $y=mx+n$. Donde $m=\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x}$ y $n=\lim_{x \to \infty} (f(x)-mx)$. Si hay asíntota horizontal, seguro que no habrá oblicua. La asíntota oblicua aparece siempre en un cociente de polinomios donde el grado del numerador supera en una unidad al grado del denominador.

Las indeterminaciones $\frac{0}{0}$ en cociente de polinomios se resuelven factorizando y simplificando. Si hay raíces, debemos multiplicar y dividir por el conjugado. En ambos casos, podemos aplicar L'Hôpital (ojo con L'Hôpital: derivar numerador y denominador por separado, no como un cociente).

En indeterminaciones $\infty-\infty$ debemos aplicar conjugado si hay raíces o bien mínimo común múltiplo si hay fracciones.

Las indeterminaciones $\frac{\infty}{\infty}$ se resuelven por L'Hôpital. En cociente de polinomios, además, se puede resolver dividiendo por el máximo grado o bien explicando la ley de los grados cuando $x \to \infty$.

Al aplicar L'Hôpital debo indicar siempre lo siguiente: si en el límite de un cociente $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ aparecen indeterminaciones $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, siendo x_0 un valor real o infinito, si existe el límite $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ coincide con el valor de $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$.

En indeterminaciones $0 \cdot \infty$ se da la vuelta a uno de los factores para obtener $\frac{0}{0}$ o bien $\frac{\infty}{\infty}$.

Recuerda que $\frac{0}{\infty}=0$ y que $\frac{0}{número}=0$.

Ejemplos

2a) Estudiar el dominio y las asíntotas de las siguientes funciones: $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$, $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+1}$, $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$, $f(x)=\frac{2}{x^2-5x+6}$

2b) Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\frac{x\cos(x)+b\,sen(x)}{x^3}$ es finito, calcular b y el valor del límite.

2c) Resuelve $\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x)$, $\lim_{x\to -1}\frac{x+1}{x^2-x-2}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{2x^3+1}{-3x^3-x-2}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^3+1}{-x-2}$, $\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{4x^5-2}$

2d) Obtener k para que $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{4x^2}-\sqrt{4x^2+kx-1}\right)=4$

2e) Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-a\,sen(x)+x\cos(3x)}{x^2}$ es finito, calcula a y el valor del límite.

2f) Calcula $\lim_{x\to 0}\frac{x^2\cos(x)}{sen(x)}$

2g) Determinar, si existen, las asíntotas horizontales de $f(x)=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$

3. Continuidad en una función a trozos

Una función $f(x)$ es continua en un punto x_0 si existe la imagen de ese punto $f(x_0)$, si existen los límites laterales, son finitos y coinciden $L^-=L^+=L$, y si el valor del límite coincide con el valor de la imagen $f(x)=L$.

Si la función no está definida en el punto, y los límites laterales existen, son finitos y coinciden, tendremos una discontinuidad evitable.

Si los límites laterales existen, son finitos pero no coinciden, tendremos una discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito.

Si los límites laterales existen, y al menos uno es infinito, tendremos una discontinuidad no evitable de primera especie de salto infinito.

Si al menos uno de los límites laterales no existe, tendremos una discontinuidad no evitable de segunda especie.

No confundir que el límite tienda a infinito con que el límite no exista. Son dos cosas distintas. No existe el límite si aparece raíz o el logaritmo de un número negativo, o si la función no está definida a un lado del punto frontera de la función a trozos.

En una función a trozos debo leer atentamente el enunciado, para saber si debo estudiar la continuidad solo en los puntos frontera o en todo el dominio de definición. Si es en todo el dominio, estudio continuidad en intervalos abiertos y luego en los puntos frontera.

Ejemplos

3a) Estudiar continuidad de $f(x)=\begin{cases} \dfrac{sen(x)}{x} & si \quad -3<x<0 \\ x^2+1 & si \quad 0\leq x\leq 1 \\ \dfrac{e^{(x-1)}-1}{x^2-1} & si \quad 1<x\leq 5 \end{cases}$

3b) Obtener valor de k para que la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x-1}{x^2+4x-5} & si \quad x\neq 1 \\ k & si \quad x=1 \end{cases}$ sea continua.

3c) Obtener valor de m para que la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+mx)}{sen(2x)} & si \quad x\neq 0 \\ 3 & si \quad x=0 \end{cases}$ sea continua en $x=0$.

3d) Obtener a y b para que la función $f(x)=\begin{cases} \dfrac{ax^2+bx+1-e^{2x}}{sen(x^2)} & si \quad x\neq 0 \\ 1 & si \quad x=0 \end{cases}$ sea continua en $x=0$.

3e) Realiza un dibujo aproximado de $f(x)=\begin{cases} 4x+12 & si \quad x\leq -1 \\ x^2-4x+3 & si \quad x>-1 \end{cases}$.

4. Definición formal de derivada. Derivabilidad en una función a trozos

La definición formal de derivada de una función es $f'(x)=\lim_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Si tengo que aplicarla en algún ejercicio, deberé operar (factorizar, hacer mínimo común múltiplo, multiplicar por conjugado, etc.) y simplificar para no tener indeterminación. En la definición formal de derivada no se puede aplicar L'Hôpital.

Una función es derivable en un punto x_0 , si es continua en ese punto y si las derivadas laterales coinciden. Es decir: $f'(x_0^-)=f'(x_0^+)$.

Importante: para saber si una función es derivable en un punto miramos solo las derivadas laterales, no necesitamos el valor de la derivada en ese punto. Y no olvides estudiar la continuidad en ese punto, antes de hacer la derivabilidad.

Recuerda que $f'(x_0^+)$ y $f'(x_0^-)$ son límites; por ejemplo: $f'(x_0^+)=\lim_{x\to x_0^+} f'(x)$. Si sale una indeterminación, aplicamos las técnicas de resolución de indeterminaciones.

Al igual que en la continuidad, si piden estudiar derivabilidad en el punto frontera solo hago el estudio para ese punto. Y si piden estudiar derivabilidad en todo el dominio, debo considerar también los intervalos abierto. Recuerda que una función es derivable en un intervalo abierto si la función derivada es continua en ese intervalo.

Si el enunciado del ejercicio no dice nada de aplicar la definición formal de derivada, aplicamos la tabla de derivación y la regla de la cadena.

Especial atención a la derivada de productos, de cociente, de la inversa, de la raíz de una función, del logaritmo de una función y de la exponencial de una función.

Recuerda que la derivada de una constante por una función es igual a la constante por la derivada de la función. Así ganas tiempo, en vez de hacerlo como la derivada de un producto.

Ejemplos

4a) Sea $f(x)=\begin{cases} x^3-12x+1 & si \quad 0\le x\le 1 \\ a x^2+bx & si \quad 1<x\le 2 \end{cases}$. Obtener a y b para que la función sea continua y derivable en todo su dominio.

4b) Obtener a y b para que $f(x)=\begin{cases} a\cdot\cos(x)+2x & si \quad x<0 \\ a^2\cdot\ln(x+1)+\dfrac{b}{x+1} & si \quad x\ge 0 \end{cases}$ sea derivable en $x=0$.

4c) Aplica la definición formal de derivada en $f(x)=\dfrac{1}{x}$.

4d) Sabiendo que $f(x)=\begin{cases} x^2+bx+c & si \quad x\le 0 \\ \dfrac{\ln(x+1)}{x} & si \quad x>0 \end{cases}$ es derivable en $x=0$, obtener b y c .

4e) Obtener a y b para que $f(x)=\begin{cases} a-x & si \quad x\le 1 \\ \dfrac{b}{x}+\ln(x) & si \quad x>1 \end{cases}$ sea derivable en $x=1$.

4f) Estudia la derivabilidad de $f(x)=x^2-3|x|+2$ en $x=0$ mediante la definición formal de derivada.

5. Interpretación geométrica de la derivada. Recta tangente y recta normal a una función en un punto. Vector paralelo a una recta. Ángulo entre rectas

La derivada de una función en un punto coincide con el valor de la recta tangente a la función en ese punto.

La ecuación de esa recta tangente es $f'(x_0)=\dfrac{y-f(x_0)}{x-x_0}$. Donde $f'(x_0)=m$ es la pendiente de la recta, x_0 la abscisa del punto y $f(x_0)$ la imagen del punto en la función.

La recta tangente y la recta normal son perpendiculares (forman 90º entre sí). El producto de pendientes de rectas perpendiculares es igual a $m_t\cdot m_n=-1$.

Dos rectas son paralelas si tienen la misma pendiente.

Para obtener la ecuación de una recta necesitamos un punto y un vector paralelo a la recta, y podremos escribir su ecuación paramétrica $r:\begin{Bmatrix} x=x_0+\lambda u_x \\ y=y_0+\lambda u_y \end{Bmatrix}$ o la ecuación continua $\frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y}$.

La ecuación canónica de la recta depende de los punto de corte de la recta $(a,0)$ y $(0,b)$ con los ejes de coordenadas, de la forma $r:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1$.

Recuerda que, si nos dan dos puntos A y B de la recta, podemos obtener un vector director haciendo el vector $\vec{AB}$. Dado un vector $\vec{u}=(u_x,u_y)$ su módulo es $|\vec{u}|=\sqrt{(u_x)^2+(u_y)^2}$.

Si conocemos los vectores directores $\vec{u}_r=(u_x,u_y)$ y $\vec{v}_s=(v_x,v_y)$ de dos rectas, podemos obtener el ángulo entre las rectas con la fórmula $\alpha=arcocos\left|\frac{u_x v_x+u_y v_y}{\sqrt{(u_x)^2+(u_y)^2}\cdot\sqrt{(v_x)^2+(v_y)^2}}\right|$.

Normalizar un vector consiste en dividir el vector por su módulo: $\hat{u}=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$ $\rightarrow$ $|\hat{u}|=1$

Ejemplos

5a) Obtener la ecuación de la recta tangente y normal a $f(x)=\frac{x^3}{(x-3)^2}$ en el punto $x=2$.

5b) Obtener el valor $(x_0,f(x_0))$ donde la recta tangente a la función $f(x)=\ln(\frac{1}{2}x^2+x)$ tiene pendiente igual a $\frac{4}{3}$.

5c) Obtener la recta tangente a $f(x)=arcotg(x)$ que es paralela a la recta que pasa por los puntos $A(1,3)$ y $B(-2,0)$.

5d) Dado el vector $\vec{u}=(4,3)$, obtener el vector $\vec{v}=(a,b)$ que sea perpendicular (ortogonal) a $\vec{u}$ y de módulo unidad.

5e) Calcula a y b para que la función $f(x)=x^3+a x^2+b x+2$ pase por el punto $(-1,6)$ y su recta tangente en $x=1$ forme un ángulo de 45° con el eje OX.

5f) Obtener la ecuación de la recta tangente y normal a $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$ en el punto $x=e$

5g) Sea la función $f(x)=\frac{1}{2x}+\ln(x)$ definida para $x>0$. Determina el punto de la gráfica en el que la pendiente de la recta tangente es máxima. Halla la ecuación de la recta normal a la gráfica en el punto de abscisa $x=1$. Halla el área del triángulo formado por la recta tangente a la función en el punto $x=\frac{1}{e}$ con los semiejes positivos de coordenadas.

5h) Sea $f(x)=-x^2+a^2$. Obtener la pendiente de la recta tangente a la función en $x=-a$.

5i) Sea $f(x)=sen(x)$. Obtener la ecuación de la recta tangente a la función en $x=\pi/6$ .Obtener la ecuación de la recta normal a la función en $x=\pi/3$. Obtener el ángulo formado por ambas rectas.

5j) Obtener los puntos de $f(x)=\frac{x^3}{3}-4x^2-\frac{2x}{3}-4$ donde la recta tangente a la función sea paralela a la recta $0=2x+3y-4$

6. Extremos relativos, puntos de inflexión, intervalos de crecimiento (monotonía) y curvatura. Extremos absolutos

Si la función $f(x)$ es creciente en un punto x_0 , su derivada en ese punto será positiva: $f(x_0)>0$.

Si la función $f(x)$ es decreciente en un punto x_0 , su derivada en ese punto será negativa: $f(x_0)>0$.

La condición necesaria de extremo relativo de una función es: $f'(x)=0$ → De esta ecuación se obtienen los puntos críticos, candidatos a extremos relativos. Si la primera derivada nunca se anula, significa que no hay extremos relativos.

Una primera condición suficiente de extremo relativo es colocar en la recta real los puntos críticos y los puntos donde la función no está definida, y evaluar el signo de la primera derivada en cada intervalo. Donde la derivada sea positiva, al función crece. Donde la derivada sea negativa, la función decrece. Alrededor del punto crítico donde haya cambio de crecimiento, tendremos un máximo o un mínimo relativo.

Una segunda condición suficiente de extremo relativo es evaluar la segunda derivada en los puntos críticos. Donde sea positivo tendremos un mínimo. Donde sea negativo tendremos un máximo. Donde se anule, no podremos concluir nada.

Si me piden obtener la imagen del extremo relativo en $x=x_0$, debo hacer $(x_0, f(x_0))$.

La condición necesaria de punto de inflexión de una función es: $f''(x)=0$ → De esta ecuación se obtienen los candidatos a puntos de inflexión. Si la segunda derivada nunca se anula, significa que no hay puntos de inflexión.

La primera condición suficiente de punto de inflexión implica colocar sobre la recta real los puntos que anulan a la segunda derivada y los puntos donde la función no está definida. Deberemos evaluar la segunda derivada en los intervalos que se forman. Una segunda derivada positiva indica función cóncava hacia arriba U. Y segunda derivada negativa indica una función cóncava hacia abajo ∩. Si alrededor de un punto hay cambio de curvatura, tendremos punto de inflexión.

Una segunda condición suficiente de punto de inflexión supone realizar la tercera derivada y evaluar en ella los candidatos a puntos de inflexión. Si la tercera derivada evaluada no es nula, tendremos punto de inflexión.

Si me dan un intervalo cerrado y me piden estudiar los extremos absolutos, además de obtener los puntos $(x_0, f(x_0))$ de los extremos relativos, debemos evaluar la función en los extremos de los intervalos para saber si las imágenes son máximos absolutos o mínimos absolutos.

Si me dan la gráfica de la función derivada $f'(x)$ puedo saber si la función original tiene extremos relativos viendo si la derivada corta al eje horizontal: $f'(x)=0$.

Si me dan la gráfica de la función segunda derivada $f''(x)$ puedo saber si la función original tiene puntos de inflexión viendo si la segunda derivada corta al eje horizontal: $f''(x)=0$.

Un punto de inflexión es un extremo relativo de la gráfica de la función derivada $f'(x)$. Otra forma de decirlo: la segunda derivada optimiza (máximo o mínimo) la primera derivada.

Ejemplos

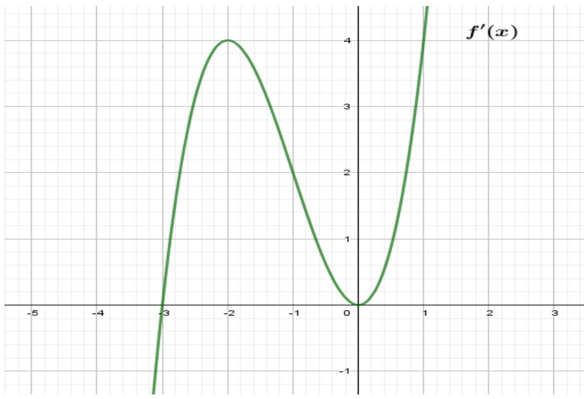
6a) Estudia los extremos relativos, los puntos de inflexión y los intervalos de crecimiento de

$$f(x)=\frac{1}{x}+\ln x$$

6b) Halla los valores $a, b\ y\ c$ sabiendo que la gráfica de la función $f(x)=\frac{a x^2+b}{x+c}$ tiene una asíntota vertical en $x=1$, una asíntota oblicua de pendiente 2 , y un extremo local en el punto de abscisa $x=3$

6c) Sea la función $f(x)=a x^3+b x^2+c x+d$. Obtener $a, b, c\ y\ d$ sabiendo que existe un extremo relativo en $(0,1)$ y un punto de inflexión en $(1,-1)$.

6d) A partir de la gráfica (ver imagen) de la función derivada $f'(x)$ obtener los intervalos de crecimiento, los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función original $f(x)$.



6e) Determinar los extremos absolutos de $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$ en el intervalo $[\frac{1}{e}, e]$

6f) Estudia y representa $f(x)=\frac{1}{1+x^2}$

6g) Sea $f(x)=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$. Obtener $f'(4)$.

7. Optimización

En los problemas de optimización debemos tener muy clarito cuál es la magnitud física a optimizar: distancia mínima, área máxima, beneficio máximo, etc.

Después deberemos escribir la ecuación que relaciona esa magnitud con las variables del enunciado. Si hay más de una variable, deberemos relacionarlas entre si con algún dato del enunciado, para obtener una función de una sola variable.

Sobre esa función aplicaremos la condición necesaria de extremo relativo: primera derivada igual a 0. Y luego comprobaremos si tenemos un máximo o un mínimo con alguna de las condiciones suficientes. No olvidar obtener las dimensiones de todas las variables y, si lo piden, la imagen del extremo relativo en la función.

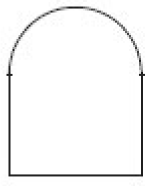
Es recomendable controlar las fórmulas de perímetro de circunferencia, área del círculo, volumen de una esfera, área lateral de un cilindro, volumen de un cilindro, volumen de un paralelepípedo, área lateral de un cono, volumen de un cono, distancia entre dos puntos (módulo del vector que forman).

Ejemplos

7a) Un granjero desea vallar un terreno rectangular de pasto adyacente a un río. El terreno debe tener $180.000\,m^2$ para producir suficiente pasto para su ganado. ¿Qué dimensiones tendrá el terreno rectangular de modo que utilice la mínima cantidad de valla, si el lado que da al río no necesita vallado?

7b) Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para 13,5 metros cúbicos. Para ello se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcula las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea al mínimo posible.

7c) Se quiere hacer una puerta rectangular coronada por un semicírculo, como el de la figura. El hueco de la puerta tiene que tener 16 metros cuadrados. Si es posible, determina la base x para que el perímetro sea mínimo. La altura de la parte rectangular es h .



7d) Se necesita construir un depósito cilíndrico, con tapa inferior y superior, de volumen $20\pi m^3$. El material de las tapas cuesta 10€ el metro cuadrado y el material para el resto del cilindro 8€ el metro cuadrado. Calcula, si existe, el radio de las tapas y la altura del cilindro que hace que el coste total sea mínimo.

7e) Se desea construir un contenedor con forma de paralelepípedo rectangular de $100 m^3$ de volumen, de manera que el largo de su base sea $\frac{4}{3}$ de la anchura x de su base. Los precios de m^2 de suelo, de techo y de pared lateral son, respectivamente, $225€/m^2$, $300€/m^2$ y $256€/m^2$. Determinar razonadamente las dimensiones que minimizan el coste de pintura y dicho coste mínimo.

7f) Obtener las dimensiones del rectángulo inscrito en la circunferencia de radio unidad y centrada en el origen de coordenadas, con mayor área posible. Obtener el valor de dicha área máxima.

7g) Obtener el punto de la gráfica de la función $f(x)=\sqrt{x-1}$ a menor distancia del punto $P(5,0)$. Obtener dicha distancia mínima.

7h) Sea un triángulo rectángulo de hipotenusa $90 cm$. Haciéndolo girar alrededor de uno de sus catetos genera un cono. Obtener las dimensiones de los catetos para que el volumen del cono engendrado sea máximo. Ayuda: volumen de un cono $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

7i) Se quiere construir una caja, sin tapa, partiendo de una lámina rectangular de 32 cm de larga por 24 cm de ancha. Para ello se recortará un cuadradito en cada esquina y se doblará. ¿Cuál debe ser el lado del cuadradito cortado para que el volumen de la caja resultante sea máximo?

7j) Una imprenta recibe el encargo de diseñar un cartel con las siguientes características: la zona impresa debe ocupar $100 cm^2$, el margen superior debe medir 3 cm, el inferior 2 cm, y los márgenes laterales 4 cm cada uno. Calcula las dimensiones que debe tener el cartel de modo que se utilice la menor cantidad de papel posible.

7k) Calcular la base y la altura de un triángulo isósceles de perímetro 8 y área máxima.

7l) En un experimento de un laboratorio se han realizado 5 medidas del mismo objeto, que han dado los siguientes resultados: $m_1=0.92$, $m_2=0.94$, $m_3=0.89$, $m_4=0.90$, $m_5=0.91$. Se tomará como resultado el valor de x tal que la suma de los cuadrados de los errores sea mínima. Es decir, el valor para el que la función $E(x)=(x-m_1)^2+(x-m_2)^2+(x-m_3)^2+(x-m_4)^2+(x-m_5)^2$ alcanza el mínimo. Calcula dicho valor de x .

8. Integral indefinida. Inmediata, cociente de polinomios, cambio de variable y por partes

De la misma forma que decimos que $f'(x)$ es la función derivada de $f(x)$, podemos afirmar que $f(x)$ es la función integral de $f'(x)$. De manera general, lo diremos así: $f(x)$ admite integral si encontramos una función $F(x)$ tal que cumpla $\frac{d[F(x)]}{dx}=f(x)$. A la función $F(x)$ se le llama primitiva de $f(x)$.

Con notación de integral indefinida podemos decir lo mismo: $F(x)+C=\int f(x)dx$. Donde C es la constante de integración y $F(x)+C$ representa el conjunto de infinitas primitivas cuya derivada coincide con $f(x)$. Recuerda que la derivada de una constante es 0. A este conjunto de infinitas primitivas se le conoce como integral indefinida.

Si tras realizar la integral indefinida y obtener $F(x)+C$ nos dan una condición de contorno que afirma que la función primitiva para, por ejemplo, por el punto (x_0, y_0) , podremos conocer la constante de integración de manera única evaluando $F(x_0)+C=y_0$ y despejando el valor concreto de C .

Dos funciones primitivas solo se diferencian por la constante de integración. Por lo tanto, sus gráfica son idénticas pero desplazadas verticalmente una cantidad igual a la diferencia de sus constantes de integración. No olvidar la famosa C al resolver una integral indefinida.

Aplicando de derecha a izquierda la tabla de derivación, podemos obtener la tabla de integrales inmediatas.

La integral de una constante por una función, es la constante por la integral de la función. Los números reales pueden entrar y salir de la integral. La variable de integración x nunca, nunca, nunca puede salir fuera del operador integral.

La integral de la suma de funciones es la suma de integrales.

Si dentro de la integral añadimos un número multiplicando para obtener de forma más clara una integral inmediata, no se nos debe olvidar dividir por ese número fuera de la integral, para balancear el resultado final. Se ordenado y limpio si añades números dentro de la integral, para que el corrector vea claramente lo que estás haciendo.

Si añadimos sumando un número dentro de la integral, también deberemos añadir el mismo número, pero restando, dentro de la misma integral.

Los métodos de integración que debemos controlar para Selectividad son los cocientes de polinomios cuyo denominador posee solución real, integración por partes (que se puede aplicar de manera reiterada) y cambios de variable (es recomendable llevar aprendidos los cambios de variable más usuales que estudiamos: impar en seno: $\cos(x)=t$, impar en coseno: $sen(x)=t$, par en producto seno por coseno: $tg(x)=t$, raíces con diferentes índices: $x=t^{m.c.m.\ de\ los\ índices}$).

En los cocientes de polinomios debemos mirar el grado del numerador y del denominador. Si el grado del numerador es mayor o igual, debemos hacer primero la división de polinomios. Si el grado del denominador es menor, podremos aplicar directamente la técnica de los coeficientes indeterminados. Al hacer la división de polinomios, recuerda: dividendo/divisor = cociente + resto/divisor.

Es recomendable dedicar un tiempo a ver si la integral se puede transformar en inmediata. Mirando si el numerador es la derivada del denominador, multiplicando y dividiendo por un número, etc. Controlar la tabla de derivación con fluidez es esencial.

Al integrar por partes, ojito con el signo menos que aparece en su definición:

$$I=\int u(x)\cdot v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)-\int v(x)\cdot u'(x)dx$$

Escribir siempre las partes y la fórmula que se aplica: quién es $u(x)$ y su derivada, y quién es $v'(x)$ y su integral.

En los cambios de variable no olvidar diferenciar. El cambio afecta tanto a la variable x como al diferencial dx .

Si me dan la segunda derivada y me piden obtener la función original, deberá integrar dos veces de manera consecutiva. En cada integración no olvidar la correspondiente constante de integración (en este caso, habrá dos distintas).

Ejemplos

8a) Resuelve $\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}dx$, $\int \frac{x^3}{x^2-5x+6}dx$

8b) Resuelve $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$, $\int x^2 \cdot \cos(x)\,dx$

8c) Calcula una función primitiva de $f'(x)=x\cdot\ln(x^2+1)$ que pase por el punto $(0,1)$

8d) Sea $f''(x)=\ln(x)$. Obtener $f(x)$ sabiendo que su gráfica pasa por el $(1,0)$ y que la pendiente de la recta tangente a la función en $x=2$ es igual 1 .

8e) Sea $f(x)=\frac{\ln(x)}{2x}$ para $x>0$. Y sea $F(x)$ la primitiva de $f(x)$, que cumple $F(1)=2$. Calcula $F'(e)$. Halla la ecuación de la recta tangente a $F(x)$ en el punto de abscisa $x=e$.

8f) Obtener una función derivable $f(x):\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, tal que $f'(x)=\begin{cases} x^2-2x & si \quad x<0 \\ e^x-1 & si \quad x\geq 0\end{cases}$ y sabiendo que $f(1)=1$

8g) Resuelve $\int x\cdot sen(2x)\,dx$ y obtener primitiva que pase por $(\pi,0)$.

8h) Resuelve $\int \frac{e^x}{1+e^x+e^{2x}}dx$ (ayuda: $e^x=t$)

8i) Resuelve $\int \frac{3e^{2x}}{1+e^x}dx$ y obtener la primitiva que pasa por $(0,1)$ (ayuda: $e^x=t$)

8j) Resuelve $\int \frac{x^4}{x^2-1}dx$

8k) Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=1$ sabiendo que $f(0)=0$ y $f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x+1}$ para $x>-1$.

9. Integral definida. Regla de Barrow

Cuando fijamos un límite inferior a y un límite superior b hablamos de integral definida como el número asociado a la expresión: $\int_a^b f(x)\,dx = número$.

Si $F(x)=\int f(x)\,dx$ es una primitiva de la función $f(x)$, la integral definida se calcula aplicando la regla de Barrow: $\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$ (fíjate que no aparece la constante de integración que sí aparecía en la integral indefinida).

El resultado es un número (positivo, negativo o nulo).

Una propiedad importante de la integral definida es la del cambio de orden en los límites d eintegración: $\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$

Ejemplos

9a) Sea $I=\int_0^8 \frac{1}{2+\sqrt{x+1}}dx$. Expresa I aplicando el cambio de variable $t=2+\sqrt{x+1}$. Calcula el valor de I .

9b) Calcula $\int_1^{16} \frac{dx}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ (sugerencia: $t=\sqrt[4]{x}$)

9c) Calcula $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{x}{\cos^2(x)}dx$ (ayuda: integrar por partes)

9d) Calcula $\int_0^{\pi} x^2 sen(x)dx$

9e) Calcula $\int_{-1}^{1} \ln(4-x)dx$

9f) $\int_2^3 \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}dx$

9g) Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[2,3]$ y $F(x)$ una primitiva de $f(x)$ tal que $F(2)=1$ y $F(3)=2$. Calcular: $\int_2^3 f(x)dx$, $\int_2^3 (5\cdot f(x)-7)dx$, $\int_2^3 F^2(x)\cdot f(x)dx$

9h) Calcula $\int_0^{\pi^2} sen(\sqrt{x})dx$ (ayuda: cambio de variable $\sqrt{x}=t$)

9i) Aplicar el método de integración por partes para calcular la integral $\int_1^2 x^2\ln(x)dx$

10. Cálculo de áreas

La aplicación fundamental de la integral definida es el cálculo de áreas. O bien el área encerrada por una función con el eje horizontal en un intervalo cerrado $[a,b]$, o bien el área encerrada por la gráfica de dos funciones que se cortan.

En el caso de una función que siempre está por encima del eje horizontal en $[a,b]$, el área coincide con $Área=\int_a^b f(x)dx$. El resultado son unidades cuadradas.

Si la función está por debajo del eje horizontal en $[a,b]$, el área es el valor absoluto de la integral definida $Área=\left|\int_a^b f(x)dx\right|$.

Si la función corta al eje horizontal dentro de $[a,b]$, hay que sacar los puntos de corte de la función con el eje horizontal ($f(x)=0$) y aplicar en cada tramo las reglas indicadas anteriormente.

En el caso del área encerrada por dos funciones $f(x)$ y $g(x)$ debemos obtener los puntos de corte entre ambas funciones ($f(x)=g(x)$) y calcular en cada tramo la integral definida de la función que está por encima menos la función que está por debajo.

Ejemplos

10a) Calcular el valor de $a>1$ sabiendo que el área encerrada por la parábola $y=-x^2+a\,x$ y la recta $y=x$ es igual a $\frac{4}{3}$.

10b) Sea $g(x)=\ln(x)$. Calcula el valor de $a>1$ para que el área limitada por su gráfica, el eje de abscisas y la recta $x=a$ sea igual a 1 .

10c) Calcular el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x)=2-x$ y $g(x)=\frac{2}{x+1}$.

10d) Calcular el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x)=|x(x-2)|$ y $g(x)=x+4$.

10e) Calcula el área limitada por la curva $y=(x+1)e^{2x}$ y las rectas $x=0$, $x=1$ e $y=0$.

10f) Calcula el área limitada por $f(x)=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$, el eje OX y las rectas $x=0$ y $x=\ln(5)$.

10g) Considere la región limitada por gráfica de la función $f(x)=\sqrt{2x-2}$, la recta $y=x-5$ y el eje de abscisas. Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte la función con las rectas. Expresa el área del recinto interior como una integral. Calcula el área.

10h) Considere la región limitada por las curvas $y=x^2$ e $y=-x^2+4x$. Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte de ambas curvas. Expresa el área como una integral. Calcula el área.

10i) Sea $f:(0,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ la función dada por $f(x)=\ln(x)$. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=1$. Esboza el recinto comprendido entre la gráfica de la función, la recta $y=x-1$ y la recta $x=3$. Calcula su área.

10j) La parábola $f(x)=\frac{x^2}{2}$ divide al rectángulo de vértices $(0,0)$, $(4,0)$, $(4,2)$ y $(0,2)$ en dos recintos. Calcular el área de cada recinto.

10k) Sea $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ la función definida por $f(x)=|x^2-4|$. Haz un esbozo de la gráfica de f . Calcula el área del recinto limitado por la gráfica de f y la recta $y=5$.

10l) Realiza un dibujo aproximado de la gráfica de la función $f(x)=\left\{\begin{matrix} 4x+12 & si & x\leq -1 \\ x^2-4x+3 & si & x>-1\end{matrix}\right\}$. Calcula el área del recinto limitado por la función, por el eje de abscisas y la recta $x=2$.

10m) Calcula el parámetro $a\in\mathbb{R}, a>0$ para que el valor del área de la región determinada por la parábola $f(x)=-x^2+a^2$ y el eje de abscisas coincida con la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=-a$.

10n) La curva $y=x^2$ y la recta $y=k$, con $k>0$, determinan una región plana. Calcula el valor del área de esta región en función de parámetro k . Encuentra el valor de k para que el área limitada sea $\sqrt{6}\ u^2$.

10ñ) Calcula el área encerrada por la función $g(x)=x^3-4x$ y la recta $y=-x-2$.

10o) Sean las funciones $f(x)=x^2-2x$ y $g(x)=-x^2+4x$. Representa las gráficas de ambas funciones, sobre los mismos ejes. Calcula el área total del recinto limitado por ambas gráficas.

10p) Sean las funciones $f(x)=sen(x)$ y $g(x)=\cos(x)$ definidas en $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Realiza un esbozo de las gráficas de ambas funciones, sobre los mismos ejes, en el intervalo $[0,\frac{\pi}{2}]$. Calcula el área total de los recintos limitados por ambas gráficas y las rectas $x=0$ y $x=\frac{\pi}{2}$.

10q) Hallar el área del reciento limitado por la curva $f(x)=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$, el eje OX y las rectas $x=-1$ y $x=1$.

11. Gauss y sistemas de ecuaciones. Notación matricial. Tipos de solución. Concepto de rango como número de vectores linealmente independientes

El Sistema Compatible Determinado implica solución única. El Sistema Compatible Indeterminado implica infinitas soluciones, con al menos un parámetro libre. El Sistema Incompatible no tiene solución.

La notación matricial de un sistema de ecuaciones genera la matriz del sistema y la matriz ampliada (que incluye la columna de términos independientes).

En los sistemas homogéneos todos los términos independientes son nulos. Los sistema homogéneos siempre tienen solución. Al menos existe la solución trivial (todas las incógnitas nulas $x=y=z=0$), o puede tener infinitas soluciones (que también incluirá la solución trivial).

La resolución por Gauss consiste en hacer nulos todos los coeficientes que están por debajo o por encima de la diagonal principal. Podemos aplicar transformaciones lineales entre filas y entre columnas. E intercambiar la posición de columnas entre sí, y de filas entre sí.

Si el sistema tiene tantas ecuaciones como incógnitas, da igual hacer Gauss por arriba o por debajo de la diagonal principal. Si hay más ecuaciones que incógnitas, haremos Gauss por debajo de la diagonal principal. Si hay menos ecuaciones que incógnitas, haremos Gauss por encima de la diagonal principal.

En las transformaciones del tipo $F_i'=a\cdot F_i+b\cdot F_j$, recuerda que el factor a que multiplica a la fila antigua que estamos transformando, no puede ser 0. En ese caso, inhabilita Gauss y para estudiar ese valor deberemos antes de la transformación no permitida.

Si el sistema depende de un parámetro, y he aplicado Gauss, deberé anular los términos de la diagonal principal que dependen del parámetro para determinar qué valores del parámetro debo considerar en la discusión de casos. Si nos queda una fila con todos los coeficientes nulos salvo el término independiente, que a su vez dependa del parámetro libre, también anularemos ese término a cero para obtener valores en la discusión de casos.

Al terminar el proceso de Gauss, el número de filas no nulas coincide con el número de vectores linealmente independientes que forman la matriz del sistema. Este número, a su vez, coincide con el rango de la matriz.

Si al aplicar Gauss una fila queda con todos sus coeficientes nulos, significa que es combinación lineal de las otras filas y puedo obviarla.

Si tras aplicar Gauss tengo el mismo número de incógnitas que de filas, tendremos un Sistema Compatible Determinado con solución única.

Si tras aplicar Gauss hay más incógnitas que filas, tendremos un Sistema Compatible Indeterminado (donde la diferencia entre incógnitas y filas será el número de parámetros libres).

Y si tras aplicar Gauss aparece un absurdo, tendremos un Sistema Incompatible sin solución.

Si tras aplicar Gauss quedan más ecuaciones que incógnitas significa que algunas ecuaciones son proporcionales (y podré eliminar al menos una) o bien que hay un absurdo matemático (y no habrá solución por ser sistema incompatible).

Importante: No olvides la expresión "tras aplicar Gauss", para que tus conclusiones sean correctas. E indicar claramente el número de ecuaciones no nulas y el número de incógnitas. Debes escribir esto explícitamente.

Finalmente, si me dan las soluciones de un sistema en función de uno o más parámetros libres y me piden eliminar esos parámetros lo que tengo que hacer es encontrar un sistema de ecuaciones equivalente donde no aparezcan los parámetros. Para ello considero en primer lugar los parámetros como incógnitas y aplico el método de Gauss. Las filas con todos los coeficientes nulos salvo el término independiente, formarán el sistema solución.

Ejemplos

11a) Sea el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{c} x+y+(m+1)z=2 \\ x+(m-1)y+2z=1 \\ 2x+my+z=-1 \end{array}\right\}$. Discutir sus posibles soluciones según el valor del parámetro $m\in\mathbb{R}$. Resolver el sistema, si es posible, para $m=2$.

11b) Sea $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x-a\cdot y+z=1 \\ a\cdot x+y+z=4 \end{array}\right\}$. Discutir las soluciones en función del valor de $a\in\mathbb{R}$.

11c) Sea el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{c} ax+7y+5z=0 \\ x+ay+z=3 \\ y+z=-2 \end{array}\right\}$. Discutir sus posibles soluciones según el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$. Resolver el sistema, si es posible, para $a=4$.

11d) Considera $A=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Resuelve $AX=-3X$. Determina, si existe, alguna solución con $x=1$.

11e) Sabemos que el coste de 3 lápices, 1 rotulador y 2 carpetas es de 15€, mientras que el de 2 lápices, 4 rotuladores y 1 carpeta es de 20€. Sabiendo que 1 lápiz y 7 rotuladores cuestan 25€, ¿podemos deducir el precio de cada uno de los artículos? Razona tu respuesta. Si por el precio de una carpeta se pueden comprar 10 lápices, ¿cuánto cuesta cada uno de los artículos?

11f) Sea el sistema de ecuaciones lineales $\left\{\begin{array}{c} (3\alpha-1)x+2y=5-\alpha \\ \alpha x+y=2 \\ 3\alpha x+3y=\alpha+5 \end{array}\right\}$. Discútelo según los valores del parámetro α. Resuélvelo para $\alpha=1$ y determina en dicho caso, si existe, alguna solución donde $x=4$.

11g) Dado el sistema $\left\{\begin{array}{c} x+y+z=2 \\ ax+2y+3z=0 \\ a^2x+4y+9z=-12 \end{array}\right\}$. Estudiar la compatibilidad del sistema según el parámetro real a. Resolver, si es posible, para $a=3$.

11h) Sabemos que el vector $(2,1,-1)$ es solución del sistema de ecuaciones

$\begin{cases} a x+b y+c z=a+c \\ b x-y+b z=a-b-c \\ c x-b y+2 z=b \end{cases}$. Calcule el valor de los parámetros a , b y c .

11i) Considera el siguiente sistema de ecuaciones $\begin{cases} 2 x+y+(\alpha-1) z=\alpha-1 \\ x-\alpha y-3 z=1 \\ x+y+2 z=2\alpha-2 \end{cases}$. Resuelve e sistema para $\alpha=1$. Determina, si existe, el valor de α para el que $(x , y , z)=(1,-3,\alpha)$ es la única solución del sistema dado.

11j) Dado el sistema de ecuaciones $f(x)=\begin{cases} k x+2 y=3 \\ -x+2 k z=-1 \\ 3 x-y-7 z=k+1 \end{cases}$. Estudiar las posibles soluciones según el valor de k . Resolver para $k=1$.

11k) Considera el sistema de ecuaciones $\begin{cases} \lambda x+y-z=-1 \\ \lambda x+\lambda z=\lambda \\ x+y-\lambda z=0 \end{cases}$. Discute el sistema según los valores de λ . Resuelve el sistema para $\lambda=0$.

11l) Discute las soluciones del siguiente sistema en función del parámetro m para $\begin{cases} x+m y+z=2 \\ m x-y+z=0 \\ 2 x-y+2 z=1 \end{cases}$. Resuelve, si es posible, el sistema para el caso $m=1$.

11m) Dado el sistema de ecuaciones $\begin{cases} 4 x+a y-2 z=-1 \\ x+y-a z=-1 \\ x+y+(2 a+2) z=6-a \end{cases}$. Estudiar las posibles soluciones según el valor de a . Resolver para todos los casos en que el sistema sea compatible.

11n) Elimina parámetros $\begin{cases} x_1=1+a+b \\ x_2=-a+2b \\ x_3=2+2a+8b \\ x_4=-1+a \\ x_5=3-b \end{cases}$ (obtener sistema de ecuaciones equivalente sin parámetros)

12. Operaciones con matrices. Rango de matriz. Traspuesta, identidad, métodos para obtener inversa, matrices que conmutan, matriz enésima. Ecuaciones y sistemas matriciales

Podemos sumar matrices con las mismas dimensiones (mismo número de filas y mismo número de columnas). Se suma coeficiente a coeficiente.

Puedo multiplicar un número por una matriz multiplicando todos los coeficientes por ese número.

Solo puedo multiplicar matrices donde el número de columnas de la primera coincida con el número de filas de la segunda. El resultado es una nueva matriz con tantas filas como la primera y tantas columnas como la segunda.

La matriz traspuesta A^t consiste en colocar las filas como columnas.

Recuerda que $(A+B)^t=A^t+B^t$. Pero $(A\cdot B)^t=B^t\cdot A^t$: ojo con el cambio de orden en los factores del producto.

La matriz identidad I tiene todos los coeficientes nulos, salvo los de la diagonal principal que valen 1. Se cumple que $A\cdot I=I\cdot A=A$. Es decir, el producto de una matriz por la identidad resulta la misma matriz.

Una matriz cuadrada es la que tiene el mismo número de filas que de columnas. Solo las matrices cuadradas pueden tener inversa A^{-1} (ojo, no todas las matrices cuadradas tienen inversa).

Recuerda que $(A+B)^{-1}\neq A^{-1}+B^{-1}$. Es decir, la inversa de la suma por lo general no es la suma de las inversas. Sí se cumple $(A\cdot B)^{-1}=B^{-1}\cdot A^{-1}$: ojo nuevamente con el cambio de orden en los factores del producto.

Si hay inversa es única y cumple: $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$.

Si me dan la matriz A puedo obtener la inversa con la definición $A\cdot A^{-1}=I$. Este método es útil para matrices 2x2, ya que sale un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas. Si la matriz es 3x3 sale un sistema de nueve ecuaciones y nueve incógnitas que puede ser algo tedioso de resolver.

Para matrices 3x3 podemos obtener la inversa por el método de Gauss-Jordan, que consiste en pasar de la matriz de partida A a la matriz identidad I mediante transformaciones lineales $F_i'=a\cdot F_i+b\cdot F_j$. Es decir pasamos del (A/I) a (I/A^{-1}) .

Si solo me piden determinar si una matriz admite inversa puedo aplicar Gauss a la matriz, haciendo ceros por debajo o por encima de la diagonal principal. El número de filas no nulas tras aplicar Gauss coincide con el rango, es decir, con el número de vectores linealmente independientes de la matriz.

Solo existe inversa si el rango de la matriz coincide con su dimensiones (matrices 3x3 requieren rango 3 paa que haya inversa; matrices 2x2 requieren rango 2).

El rango de una matriz coincide con el rango de la traspuesta: $rango(A)=rango(A^t)$.

El producto de matrices, por lo general, no es conmutativo: $A\cdot B\neq B\cdot A$.

Por lo tanto si me piden obtener matriz B que conmute con A deberé hacer $A\cdot B=B\cdot A$, operar y resolver los coeficientes de B (puede cumplirlo una única matriz o bien infinitas matrices porque al menos un coeficiente dependa de un parámetro libre).

Al despejar en una ecuación matricial debemos tener claro como sacar factor común y cómo aplicar matriz inversa. Por ejemplo:

- $AX=B \rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}B \rightarrow IX=A^{-1}B \rightarrow X=A^{-1}B$
- $XA=B \rightarrow XAA^{-1}=BA^{-1} \rightarrow XI=BA^{-1} \rightarrow X=BA^{-1}$
- $AXB=C \rightarrow A^{-1}AXBB^{-1}=A^{-1}CB^{-1} \rightarrow IXI=A^{-1}CB^{-1} \rightarrow X=A^{-1}CB^{-1}$
- $ABX=C \rightarrow A^{-1}ABX=A^{-1}C \rightarrow IBX=A^{-1}C \rightarrow BX=A^{-1}C \rightarrow B^{-1}BX=B^{-1}A^{-1}C \rightarrow IX=B^{-1}A^{-1}C \rightarrow X=B^{-1}A^{-1}C$
- A^2+A es lo mismo que $A(A+I)$. Y si debo despejar X en la ecuación $AX+B=C$ lo haré de la forma $AX=C-B \rightarrow X=A^{-1}(C-B)$. Ojito con el lado: si aplico inversa a la izquierda, en la otra parte de la igualdad también aplico inversa por la izquierda.

Para obtener la matriz enésima A^n aplico inducción matemática. Para ello calculo A, opero para obtener los primeros términos A^2, A^3,... para inducir A^n y demostramos que $A^{n+1}=A^n\cdot A$ partiendo de la forma de A^n y de A.

En los ejercicios de realizar la suma de $A+A^2+A^3+...+A^n$ es común que aparezcan sumas de número del tipo $a_1+a_2+a_3+...+a_n$ donde podremos emplear la fórmula de la serie aritmética (si la diferencia entre término consecutivos es la suma de una cantidad fija $a_2=a_1+d$): $\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$. O bien la fórmula de la serie geométrica de razón r (si al diferencia entre términos consecutivos es el producto de una razón fija $a_2=a_1\cdot r$): $\frac{a_1(r^n-1)}{r-1}$

Ejemplos

12a) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1+m & 1\\ 1 & 1-m\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$. ¿Para qué valores de m se verifica $A^2=2A+I$? (Siendo I la matriz identidad). Para $m=1$ calcula A^{-1}. Para $m=1$ calcula X que satisface $A\cdot X-B=A\cdot B$.

12b) Despeja X de la ecuación matricial $X(CD)^{-1}=A+X(D^{-1}C^{-1}-B)$, siendo $A,B,C\,y\,D$ matrices cuadradas invertibles.

12c) Sean $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 1 & 2 & 1\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix}-1 & 2 & 0\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$. Determina la matriz X que verifica $AXB=C^t$, siendo C^t la traspuesta de C.

12d) Sean $A=\begin{pmatrix}1\\ -1\\ 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$. Estudia, según los valores de k, el rango de la matriz resultante de operar AB^t+kI, donde B^t es la matriz traspuesta de B e I es la matriz identidad de orden 3.

12e) Sea $A=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 0 & a & 0\\ 2 & 1 & a^2-1\end{pmatrix}$. Calcular el rango de A en función del parámetro real a. Decidir si la matriz tiene inversa para $a=1$ y, en caso afirmativo, calcularla.

12f) Sea A una matriz cuadrada de orden 3 con elementos reales, tal que $A^2=I$ (siendo I la matriz identidad de orden 3). Prueba que la matriz A tiene inversa y dé dicha inversa. Obtener A^n para cualquier número natural n. Si $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 0 & a & 0\\ 0 & 0 & a\end{pmatrix}$, calcula el valor del número real a para que se cumpla $A^2=I$.

12g) Calcular las matrices A y B tales que: $5A+3B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ -4 & 15\end{pmatrix}$, $3A+2B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -2 & 9\end{pmatrix}$

12h) Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$. Encuentra el valor, o los valores, de m para los que A y B tienen el mismo rango.

12i) Dado $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$, obtener todas la matrices que conmutan con ella.

12j) Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular A^n , con $n\in\mathbb{N}$. Calcula la matriz suma $A+A^2+A^3+...+A^n$

12k) Sean las matrices $A=\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}$. Halla la matriz X que verifica $A X+B=2A$. Calcular B^2 y B^{2016} .

13. Determinantes. Concepto de rango como dimensión del mayor menor no nulo

Un determinante es un número real asociado solo a matrices cuadradas.

En matrices de orden uno el determinante es el único coeficiente de la matriz.

En matrices de orden dos el determinante es el producto de la diagonal principal menos el producto de la diagonal secundaria. En matrices de orden tres aplico la regla de Sarrus.

Y para matrices de orden superior debo desarrollar el determinante por los adjuntos de una línea. Recuerda que el adjunto de la fila *i* y la columna *j* se define como $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot|\alpha_{ij}|$, donde $|\alpha_{ij}|$ es el menor asociado tras tachar la fila *i* la columna *j*.

Lo más cómodo para determinantes de orden cuatro es: coger en una línea (fila o columna) y hacer todos los coeficientes cero salvo uno. Y el determinante es ese coeficiente no nulo por su correspondiente adjunto.

Un menor es el determinante de cualquier submatriz cuadrada contenida en la propia matriz.

Así, por ejemplo, una matriz de orden 3x3 contiene un menor de orden 3 (el determinante de la propia matriz), contiene 9 menores de orden 2 (resultado de tachar una fila y una columna) y contiene 9 menores de orden 1 (resultado de tachar dos filas y dos columnas).

El rango de una matriz coincide con la dimensión del mayor menor nulo.

Así, en una matriz de orden 3x3, si su determinante es distinto de cero diremos que el rango es 3. Y si su determinante es cero, el rango podrá ser 2 ó 1. ¿Cómo decidir? Buscando un menor de orden 2 no nulo. Si lo encontramos, su rango es 2. Y si no lo encontramos, y hemos hecho todos los menores de orden 2 (tooooodos), diremos que su rango es 1. Ojo: debes comprobar que todos los menores de orden 2 son nulos antes de afirmar que el rango no es 2.

Ejemplos

13a) Sea $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 1 & a^2-1 \end{pmatrix}$. Calcular el rango de A en función del parámetro real a .

13b) Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$. Encuentra el valor, o los valores, de m para los que A y B tienen el mismo rango. Determina, si existen, los valores de m para los que A y B tienen el mismo determinante.

13c) Sean $A=\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Estudia, según los valores de k , el rango de la matriz resultante de operar $A\,B^t+k\,I$, donde B^t es la matriz traspuesta de B e I es la matriz identidad de orden 3.

13d) Considera $A=\begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$ y $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Determina los valores de λ para los que la matriz $A+\lambda\,I$ no tiene inversa (I es la matriz identidad).

13e) Sea A una matriz 3x3 tal que $det(2\,A)=8$. ¿Cuánto vale $det(A)$? Siendo B la matriz que se obtiene de A multiplicando por 3 la primera fila y por -1 la tercera, ¿cuánto vale $det(B)$?

13f) Determina los valores de x para que la siguiente matriz A verifique que $det(2\,A)=8$.

$$A=\begin{pmatrix} x & 1 & 1 \\ x+1 & 2 & 2 \\ x & -x+2 & 1 \end{pmatrix}$$

13g) Determina el rango de $A=\begin{pmatrix} a & -a & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ a+2 & -5 & -10 \end{pmatrix}$ según el valor de a .

14. Inversa con determinantes. Propiedades de determinantes

El determinante de un producto es el producto de los determinantes: $|A\cdot B|=|A|\cdot|B|$.

El determinante de la suma, por lo general, no es la suma de los determinantes: $|A+B|=|A|+|B|$.

El determinante de la matriz identidad es igual a 1: $|I|=1$. No confundas la matriz I con el número 1. El primer caso es una matriz y el segundo caso un número. Son entidades matemáticas diferentes.

El determinante de la inversa es la inversa del determinante: $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$. Por lo tanto, existe inversa de una matriz cuadrada sí y solo si su determinante es distinto de cero. $\exists A^{-1}\Leftrightarrow|A|\neq 0$

El determinante de una matriz triangular es igual al producto de los coeficientes de la diagonal principal. Esta propiedad es muy práctica para resolver de forma rápida determinantes sin tener que hacer Sarrus (antes de operar, es recomendable mirar siempre si la matriz que te dan es triangular).

Si cambio el orden de dos filas o de dos columnas, el determinante cambia de signo. Si hago dos cambios consecutivos el determinante queda igual, ya que $(-1)(-1)=1$.

Si hay una línea de ceros, el determinante vale cero.

Si hay dos filas iguales o dos columnas iguales, el determinante vale cero.

Si hay dos filas proporcionales o dos columnas proporcionales, el determinante vale cero.

Si me dan tres vectores de tres dimensiones para comprobar si son linealmente independientes, puedo colocarlos en forma de determinante (en filas o en columnas) y calcularlo. Si el determinante es distinto de cero son independientes (rango 3) y si el determinante es nulo son dependientes (rango distinto de 3).

Si al operar dentro de un determinante $|A|$ hago trasformaciones del tipo $F_i'=a\cdot F_i+b\cdot F_j$ recuerda que el determinante final se ve afectado: $\frac{1}{a}|A|$.

Si un número k multiplica solo a una fila o a una columna de la matriz A , el resultado final del determinante queda: $k|A|$.

Si el número k multiplica a todas las filas o columnas de la matriz A el determinante final queda $k^n|A|$, donde n es la dimensión de la matriz.

El determinante de A^n cumple: $|A^n|=|A|^n$.

Un caso donde se mezclan estas propiedades con el determinante de la inversa: $|(k\,A)^{-1}|=\frac{1}{|k\,A|}=\frac{1}{k^n|A|}$.

La inversa de una matriz la puedo obtener de la forma $a^{-1}=\frac{(adj(A))^t}{|A|}$.

Donde $(adj(A))^t$ es la traspuesta de la matriz de adjuntos. Esta matriz adjunto tiene en cada coeficiente el adjunto asociado A_{ij} , que debemos ir calculando uno por uno.

Recuerda, no pongas el resultado fina: indica siempre todas las operaciones intermedias.

Ejemplos

14a) Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} m+2 & 0 & 0 \\ -3 & m+1 & 1 \\ 1 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$. Obtener $|A^{10}|$.

14b) Considera las siguientes matrices: $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 0 \end{pmatrix}$.

Calcula el determinante de $B^{-1}(C^t C)B$ (C^t es la traspuesta de C).

14c) Dadas la matrices $A=\begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, obtener razonadamente el valor de los determinantes $|(A+B)^{-1}\cdot A|$ y $|A^{-1}(A+B)|$, escribiendo todos los pasos del razonamiento.

14d) Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ p & q & r \\ u & v & w \end{vmatrix} = 25$, obtener $\begin{vmatrix} 2a & 2b & 2c \\ 2p & 2q & 2r \\ 2u & 2v & 2w \end{vmatrix}$

14e) Si $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5$, obtener $\begin{vmatrix} \frac{a}{3}+2b & 4b & 6c+a \\ \frac{d}{3}+2e & 4e & 6f+d \\ \frac{g}{3}+2h & 4h & 6i+g \end{vmatrix}$

14f) ¿Para qué valores de a no existe A^{-1} ? $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & a & 3 \\ a & 1 & -a \end{pmatrix}$

14g) Sea $A \in M_{4\times4}$. Si $|A| = 2$, obtener $|3A^{-1}|$ y $|(3A)^{-1}|$

14h) Resuelve $\begin{vmatrix} -2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -3x \\ 2x & 6x & 3 \end{vmatrix} = -24$

14i) Calcula sin desarrollar el determinante (aplicando propiedades): $|D| = \begin{vmatrix} 1+b & 1 & b \\ 2+c & 2 & c \\ 3+a & 3 & a \end{vmatrix}$

14j) $\begin{vmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

14k) Hallar el rango de $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 4 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

14l) Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Calcula $|A^{-1}|$, $|(5\mathrm{A})^{-1}|$, $|5\mathrm{A}|$

14m) Sea M una matriz cuadrada que cumple $|M| = -1$ y $|(-2)M| = 8$. ¿Cuál es el orden de la matriz cuadrada? Justifica tu respuesta.

14n) Sea $A = \begin{pmatrix} a & -2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & a \end{pmatrix}$. ¿Para qué valores de a existe la inversa de A ?

14ñ) Obtener inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y de $C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -6 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

15. Teorema de Rouché-Frobenius y su aplicación en sistemas de ecuaciones. Regla de Cramer para SCD

El Teorema de Rouché-Frobenius afirma que un sistema admite solución si el rango de la matriz del sistema coincide con el rango de la matriz ampliada.

Si no coinciden los rangos, el sistema es incompatible: SI.

Si los rangos coinciden y son iguales al número de incógnitas, tenemos solución única: SCD.

Si los rangos coinciden y son menores que el número de incógnitas, tenemos infinitas soluciones: SCI. La diferencia entre el número de incógnitas y el rango nos da el número de parámetros libres.

Podemos obtener el rango o bien por Gauss (número de filas no nulas tras aplicar Gauss) o bien por determinantes (dimensión del mayor menor no nulo). Y luego aplicar el Teorema.

En un sistema 3 ecuaciones x 3 incógnitas el rango máximo de la matriz del sistema es 3, al igual que el rango máximo de la matriz ampliada (ya que será una matriz de 3 filas y 4 columnas).

En un sistema de 3 ecuaciones x 2 incógnitas el rango máximo de la matriz del sistema es 2 (por ser una matriz de 3 filas y 2 columnas), mientras que el rango máximo de la ampliada puede ser 3 (al ser una matriz de 3 filas y 3 columnas).

En un sistema de 2 ecuaciones x 3 incógnitas el rango máximo de la matriz del sistema es 2 (por ser una matriz de 2 filas y 3 columnas), y la matriz ampliada puede tener como máximo rango 3 (al ser una matriz de 2 filas y 4 columnas).

La regla de Cramer solo se puede aplicar a SCD. Para ello obtenemos cada incógnita como un cociente de determinantes. En el denominador aparece el determinante del sistema. Y en el numerador ese miso determinante, pero colocando la columna de términos independientes en la posición de la incógnita que estamos resolviendo (si es la primer incógnita, en la primera columna; si es la segunda incógnita, en la segunda columna).

Si el ejercicio nos pide resolver cuando sea compatible, debemos considerar tanto SCI como SCD.

En los sistemas SCI indicar claramente que incógnita o incógnitas son los parámetros libres.

Si hacemos una incógnita parámatro libre y, al resolver, aparece que toma un número fijo, significa que el parámetro libre lo debemos asociar a otra incógnita.

Si aplico Cramer en SCD y aparece un parámetro en los coeficientes, no doy un valor concreto al parámetro. Resuelvo en función de ese parámetro, ya que las incógnitas tomarán valores en función de ese parámetro.

Ejemplos

15a) Rehacer todos los ejercicios del apartado 11 sobre Gauss y sistemas de ecuaciones, pero aplicando determinantes y Rouché-Frobenius.

16. Puntos, vectores, rectas y planos en tres dimensiones. Ecuaciones. Vector característico del plano.

Un punto se representa por sus tres coordenadas $A(x, y, z)$.

Para una recta necesito un punto de la recta y un vector paralelo a la recta (vector director). Sus ecuaciones son: vectorial, paramétrica, continua y general.

$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+\lambda\cdot(u_x,u_y,u_z) \rightarrow \begin{Bmatrix} x=x_0+\lambda\cdot u_x \\ y=y_0+\lambda\cdot u_y \\ z=z_0+\lambda\cdot u_z \end{Bmatrix} \rightarrow \frac{x-x_0}{u_x}=\frac{y-y_0}{u_y}=\frac{z-z_0}{u_z} \rightarrow$$

$$r:\begin{Bmatrix} A\cdot x+B\cdot y+C\cdot z+D=0 \\ A'\cdot x+B'\cdot y+C'\cdot z+D'=0 \end{Bmatrix}$$

Para pasar de paramétrica a continua despejamos el parámetro libre e igualamos. Recuerda que en continua als incógnitas tienen que estar con signo positivo.

Para pasar de continua a general hacemos dos igualaciones en continua (primera con segunda, primera con tercera, por ejemplo) y llegamos a un sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas.

Para pasar de general a paramétrica resolvemos sistema SCI con un parámetro libre.

Para un plano necesitamos un punto del plano y dos vectores linealmente independientes (comprobar siempre esto, por ejemplo, viendo que el cociente de las primeras coordenadas, el cociente de las segundas coordenadas y el cociente de las terceras coordenadas no coinciden). Sus ecuaciones son vectorial, paramétrica y general.

$$(x,y,z)=(x_0,y_0,z_0)+\alpha(u_x,u_y,u_z)+\beta(v_x,v_y,v_z) \rightarrow \begin{Bmatrix} x=x_0+\alpha\cdot u_x+\beta\cdot v_x \\ y=y_0+\alpha\cdot u_y+\beta\cdot v_y \\ z=z_0+\alpha\cdot u_z+\beta\cdot v_z \end{Bmatrix}$$ → Determinación lineal del plano $$\begin{vmatrix} u_x & v_x & x-x_0 \\ u_y & v_y & y-y_0 \\ u_z & v_z & z-z_0 \end{vmatrix}=0 \rightarrow \Pi: A\,x+B\,y+C\,z+D=0$$

Para pasar de paramétrica a general hacemos el determinante, por Sarrus, de la determinación lineal del plano. Obteniendo así una ecuación con tres incógnitas.

Para pasar de general a paramétrica en un plano resolvemos la ecuación como un SCI con dos parámetros libres. Damos a dos incógnitas los parámetros libres y despejamos la tercera incógnita en función de esos parámetros.

Dado un plano en forma general $\Pi: A\,x+B\,y+C\,z+D=0$ podemos obtener su vector característico (normal) perpendicular al plano → $\vec{u_\Pi}=(A,B,C)$.

Este vector característico es muy práctico para ejercicios de perpendicularidad. De tal forma que con vector perpendicular al plano puedo obtener los coeficientes A,B,C , mientras que el término independiente D lo puedo saber si tengo un punto del plano. Solo debo sustituir las coordenadas del punto en la ecuación general y despejar el término D .

Recuerda que dos vectores son perpendiculares (también llamados ortogonales o normales) si su producto escalar es nulo → $\vec{u}\cdot\vec{v}=0 \rightarrow u_x v_x+u_y v_y+u_z v_z=0$.

Una última ecuación práctica del plano es la ecuación canónica, que nos da los cortes del plano con los ejes de coordenadas: $\Pi:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$, siendo los puntos de corte $(a,0,0)$, $(0,b,0)$ y $(0,0,c)$.

Dados los extremos A y B de un segmento, podemos obtener su punto medio con la semisuma de las componentes. Si deseo dividir el segmento en tres partes iguales, los puntos solución los obtengo razonando de la siguiente forma: $\vec{AC}=\frac{1}{3}\vec{AB}$, $\vec{AD}=\frac{2}{3}\vec{AB}$. Dos vectores son iguales si sus componentes son iguales.

Ejemplos

16a) Sea el triángulo de vértices $A(-1,1,0)$, $B(0,-2,3)$ y $C(2,1,-1)$. Halla la ecuación del plano que contiene al triángulo . Halla la ecuación general de la recta que une el punto medio del segmento $\overline{AB}$ y el punto medio del segmento $\overline{AC}$.

16b) Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta $r: x-2=\frac{y-1}{3}=z+1$ y al punto $A(2,5,1)$. Obtener los puntos de corte del plano $\Pi: x+2y+4z-4=0$ con los ejes cartesianos del espacio tridimensional.

16c) Los puntos $A(1,3,-4)$, $B(2,6,7)$ y $C(5,-1,2)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo. Halla el cuarto vértice D . Halla la ecuación de la recta que pasa por A y C . Halla la ecuación del plano que contiene al paralelogramo.

16d) Sean los puntos $A(1,2,-1)$, $P(0,0,5)$, $Q(1,0,4)$ y $R(0,1,6)$. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto A , es paralela al plano que pasa por los puntos P, Q y R y tal que la primera componente de su vector director es doble de la segunda.

16e) Dados el plano $\Pi: x+y-z-1=0$ y la recta $r:\left\{\begin{matrix} 3x+y+z-6=0 \\ 2x+y-2=0 \end{matrix}\right\}$. Calcula la ecuación general del plano que contiene a la recta r y es perpendicular a Π .

16f) Dada la recta $r:\left\{\begin{matrix} x-2y+z=0 \\ x-z=0 \end{matrix}\right\}$ y los puntos $P(1,-2,0)$ y $Q(0,1,3)$. Hallar la ecuación del plano que contiene a la recta r y es paralelo al vector $\vec{PQ}$. Hallar la ecuación de la recta perpendicular a r , que pasa por Q e intersecta a r en un punto.

16g) Considera el plano Π de ecuación $\Pi: mx+5y+2z=0$ y la recta r dada por $r: \frac{x+1}{3}=\frac{y}{n}=\frac{z-1}{2}$. Calcula m y n en el caso en que la recta r es perpendicular al plano Π .

16h) Sea el punto $P(1,0,-1)$, el plano $\Pi: 2x-y+z+1=0$ y la recta $r:\left\{\begin{matrix} -2x+y-1=0 \\ 3x-z-3=0 \end{matrix}\right\}$. Determinar la ecuación general del plano que pasa por P , es paralelo a la recta r y perpendicular al plano Π .

16i) Sea la recta $r: \frac{x-5}{-1}=y-2=z$ y la recta s que pasa por los puntos $A(1,6,6)$ y $B(4,c,5)$. Si $c=3$ calcula la ecuación general del plano Π que contiene a las dos rectas r y s .

16j) Sea el punto $P(1,0,5)$ y la recta $r:\left\{\begin{matrix} y+2z=0 \\ x=1 \end{matrix}\right\}$. Determinar la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r .

16k) Sean las rectas $r:\left\{\begin{matrix} x=1+2\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1 \end{matrix}\right\}$ y $s:\left\{\begin{matrix} x+2y=-1 \\ z=-1 \end{matrix}\right\}$. Comprueba que ambas rectas son coplanarias y halla la ecuación del plano que las contiene.

16l) Considera el punto $P(1,-1,0)$ y la recta $r:\left\{\begin{matrix} x=1+3t \\ y=-2 \\ z=t \end{matrix}\right\}$. Determinar la ecuación del plano que pasa por P y contiene a r .

16m) Sean los vectores $\vec{u}=(1,0,1)$, $\vec{v}=(0,2,1)$, $\vec{w}=(m,1,n)$. Halla m y n sabiendo que los tres vectores son linealmente dependientes y que $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$.

16n) Sean los puntos $A(1,1,1), B(0,-2,2), C(-1,0,2) y D(2,-1,-2)$. Determina la ecuación de la recta que pasa por D y es perpendicular al plano formado por A, B y C.

16ñ) Obtener el vector característicos del plano $\Pi:\left\{\begin{matrix} x=1+a+b \\ y=a-b \\ z=-b \end{matrix}\right\}$. Expresar el plano en forma general.

16o) Expresar $\Pi: x+y-z-1=0$ en forma paramétrica.

17. Posiciones relativas: recta con plano, dos planos, dos rectas y tres planos

Una recta y un plano se pueden cortar en un punto (secantes), en la propia recta (recta contenida en plano) o no cortarse (recta y plano paralelos). Puedo hacer el estudio de dos formas: usando la recta en forma general o la recta en forma paramétrica.

Si uso la recta en general hago un sistema con el plano, quedando un sistema 3x3. Si es SCD se cortan en un punto, si es SCI con un parámetro libre se cortan en una recta, si es SI son paralelos.

Dos planos se pueden cortar en una recta, o bien ser paralelos o bien coincidentes.

Hago el sistema entre ambas ecuaciones generales del plano, quedando sistema 2x3. Si es SCI con un parámetro libre, se cortan en una recta. Si es SCI con dos parámetros libres, los planos son coincidentes. SI es SI son paralelos

También podemos estudiar la posición relativa entre dos planos $\Pi_1: A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$ y $\Pi_2: A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$ sabiendo que si se cumple $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}=\frac{D_1}{D_2}$ los planos son coincidentes. Si se cumple $\frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}\neq\frac{D_1}{D_2}$ los planos son paralelos. Y en cualquier otro caso, los planos son paralelos.

Especialmente importante es la posición relativa entre dos rectas. Existen dos métodos: si las rectas están en paramétrica o si están en general.

Si las rectas están en paramétricas debemos tomar un punto de cada recta, un vector director de cada recta, y hacer el vector $\vec{AB}$ formado por los puntos obtenidos de las rectas. Y estudiamos el rango de la matriz formada por $(\vec{u}_r, \vec{v}_s, \vec{AB})$. Si el rango de esa matriz es 3, las rectas son cruzadas. Si el rango es 1, las rectas son coincidentes. Si el rango es 2 las rectas pueden ser secantes o paralelas. Para distingue entre estas dos opciones, miramos el rango de los vectores directores $(\vec{u}_r, \vec{v}_s)$. Si el rango es 2 son secantes, si el rango es 1 son paralelas.

Si las rectas están en general, podemos estudiar el sistema 4x3 formado por ambas rectas. Si obtenemos SCD las rectas son secantes. Si es SCI con un parámetro libre, las rectas son coincidentes. Si el rango de la matriz del sistema es 3 y el rango de la ampliada es 4, tenemos SI y las rectas son cruzadas. Y si el rango de la matriz del sistema es 2 y el rango de la ampliada es 3, tenemos nuevamente SI y las rectas son paralelas. No olvides nombrar el Teorema de Rouché-Frobenius al determinar el tipo de solución según el rango de la matriz del sistema y de la matriz ampliada.

Finalmente, si tenemos 3 planos, las opciones más importantes que debemos considerar son: estudiamos el sistema 3x3 formado por las ecuaciones generales de los planos, y si tenemos SCD se cortan en un punto. Si tenemos SCI con un parámetro libre, los tres planos se cortan en un punto. SI tenemos SCI con dos parámetros libres, los tres planos son coincidentes. Y si tenemos SI, no hay puntos en común entre los tres planos.

Ejemplos

17a) Sean las rectas $r:\begin{Bmatrix} x-y+z=2 \\ 2x-2y+z=2 \end{Bmatrix}$ y $s:\begin{Bmatrix} x+y=0 \\ z=1 \end{Bmatrix}$. Determina la posición relativa de ambas rectas. Hallar, si es posible, la ecuación de un plano paralelo a r que contiene a s.

17b) Sean los planos $\Pi_1: 2x+2y+az=1$, $\Pi_2: 2x+ay+2z=-2$ y $\Pi_3: ax+2y+2z=1$. Obtener el valor de a para que los planos tengan una recta en común. Hallar el vector director de dicha recta. Escribir las ecuaciones paramétricas de la recta común a los tres planos.

17c) Sea el punto $P(-1,0,2)$ y las rectas $r:\begin{Bmatrix} x-z=1 \\ y-z=-1 \end{Bmatrix}$, $s:\begin{Bmatrix} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=3 \end{Bmatrix}$. Determina la posición relativa de ambas rectas. Determina la ecuación de la recta que pasa por P y corta a ambas rectas.

17d) Dados el plano $\Pi: x+y-z-1=0$ y la recta $r:\begin{Bmatrix} 3x+y+z-6=0 \\ 2x+y-2=0 \end{Bmatrix}$. Estudia la posición relativa de la recta y el plano.

17e) Considera el plano Π de ecuación $\Pi: mx+5y+2z=0$ y la recta r dada por $r:\frac{x+1}{3}=\frac{y}{n}=\frac{z-1}{2}$. Calcula m y n en el caso en que la recta r está contenida en el plano Π.

17f) Sea la recta $r:\frac{x-5}{-1}=y-2=z$ y la recta s que pasa por los puntos $A(1,6,6)$ y $B(4,c,5)$. Determina el valor del parámetro c para que las rectas r y s se corten en un punto.

18. Haz de planos. Tres puntos alineados por una recta. Cuatro puntos coplanarios

Una recta en forma general $r:\begin{Bmatrix} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{Bmatrix}$ son dos planos que se cortan en dicha recta.

El concepto de haz de planos nos da los infinitos planos que se cortan en esa misma recta:

$$\lambda_1(A_1x+B_1y+C_1z+D_1)+\lambda_2(A_2x+B_2y+C_2z+D_2)=0$$

Donde λ_1 y λ_2 son parámetros libres.

El concepto de haz de planos es especialmente útil cuando nos dan una recta y un punto exterior a la recta, y debemos obtener el plano que contiene a ambos. Para ello, formamos el haz de planos a partir de la ecuación general de la recta. Sustituimos el punto en el haz de planos y obtenemos una relación entre los dos parámetros libres del haz de planos. Llevamos esta relación al haz, sacamos factor común, y el plano resultante es el plano solución.

Dados tres puntos A, B y C, hay varias formas de determina si están alineados por una misma recta. La más sencilla es comprobar si los vectores $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$, dividiendo primera componente entre primera, segunda entre segunda, tercera entre tercera y viendo si las fracciones son iguales. En caso contrario, no están alineados.

Otra forma de hacerlo es estudiando el rango de $\vec{AB}$ y $\vec{AC}$ .Si sale rango 1 significa que solo hay un vector independiente, por lo que los puntos están alineados. Si sale rango 2 significa que hay 2 vectores independientes y no están alienados.

Dados cuatro puntos A, B, C y D hay varias formas de comprobar si pertenecen a un mismo plano. La más sencilla es estudiar el rango de los vectores $\vec{AB}$, $\vec{AC}$ y $\vec{AD}$. Si el rango es distinto de 3 son coplanarios. Y si el rango es 3 significa que hay tres vectores independientes, por lo que no pertenecen al mismo plano.

Otra forma de hacerlo es obtener el plano que pasa por tres puntos A, B, C y comprobar si el punto D pertenece a ese plano (sustituyendo las coordenadas de D en el plano y viendo si satisface la ecuación).

Ejemplos

18a) Sean los puntos $A(0,1,1)$, $B(2,1,3)$, $C(-1,2,0)$ y $D(2,1,m)$. Calcula m par $A, B, C\ y\ D$ estén en un mismo plano.

18b) Obtener el plano que contiene al punto $A(0,1,1)$ y a la recta $r: \frac{x-5}{-1}=y-2=z$.

18c) Obtener k para que $A(k,2,1)$, $B(2,1,3)$ y $C(-1,2,k)$ estén alineados por una misma recta.

18d) Dado el plano $\Pi: mx+5y+2z=0$ y el punto $P(2,-1,1)$, obtener m para que el punto pertenezca al plano.

18e) Para el cuadrado de vértices consecutivos ABCD con $A(2,1,3)$ y $B(1,2,3)$, calcula los vértices C y D sabiendo que C pertenece a los planos $\Pi_1: -2x-3y+6z-5=0$ y $\Pi_2: x-y+z=2$

19. Ángulos y simetrías. Recta perpendicular a otra recta. Recta perpendicular a un plano. Plano perpendicular a otro plano

El ángulo formado por dos vectores se obtiene de la expresión:

Vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ $\rightarrow$ $\cos(\alpha)=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}=\frac{u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y+u_z\cdot v_z}{\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}\cdot\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}$

Si ambos vectores son los directores de sendas rectas, el ángulo formado por ambas rectas es muy parecido a la fórmula anterior, pero aplicando valor absoluto para garantizar que el ángulo esté en el primer cuadrante:

Vectores directores $\vec{u}_r$, $\vec{v}_s$ $\rightarrow$ $\cos(\alpha)=\frac{|\vec{u}_r\cdot\vec{u}_s|}{|\vec{u}_r|\cdot|\vec{u}_s|}=\frac{|u_{r_x}\cdot u_{s_x}+u_{r_y}\cdot u_{s_y}+u_{r_z}\cdot v_{r_z}|}{\sqrt{u_{r_x}^2+u_{r_y}^2+u_{r_z}^2}\cdot\sqrt{u_{s_x}^2+u_{s_y}^2+u_{s_z}^2}}$

Si ambos vectores son los característicos de dos planos, el ángulo formado por ambos planos se obtiene de la misma fórmula de antes:

Vectores característicos $\vec{u}_{\Pi_1}$, $\vec{v}_{\Pi_2}$ $\rightarrow$ $\cos(\alpha)=\frac{|\vec{u}_{\Pi_1}\cdot\vec{v}_{\Pi_2}|}{|\vec{u}_{\Pi_1}|\cdot|\vec{v}_{\Pi_2}|}=\frac{|u_x\cdot v_x+u_y\cdot v_y+u_z\cdot v_z|}{\sqrt{u_x^2+u_y^2+u_z^2}\cdot\sqrt{v_x^2+v_y^2+v_z^2}}$

El ángulo entre recta y plano se calcula con el seno:

Vector director $\vec{u}_r$ y vector característico $\vec{u}_\Pi$ $\rightarrow$ $sen(\alpha)=\frac{|\vec{u}_\pi\cdot\vec{u}_r|}{|\vec{u}_\pi|\cdot|\vec{u}_r|}$

Recuerda que si el producto escalar es nulo, los vectores son perpendiculares.

El coseno de 90º vale 0. El coseno de 0º vale 1. El coseno de 180º vale -1.

El seno de 90º vale 1. El seno de 0º vale 0. El seno de 180º vale 0.

En estos ejercicios de ángulos, el concepto de punto arbitrario de una recta es un método muy potente si hablamos de perpendicularidad.

Por ejemplo, si me dan una recta r y un punto exterior P , y debo trazar una recta perpendicular a la dada y que pase por el punto P , lo resuelvo considerando un punto arbitrario A de la recta y forzando que el vector $\vec{PA}$ sea perpendicular al vector director $\vec{u}_r$ (haciendo producto escalar igual a 0). Recuerda que un punto arbitrario tiene por coordenadas los valores de la ecuación paramétrica de la recta. Y con un punto P y un vector $\vec{PA}$ podré escribir la ecuación de la recta solución.

Si el ejercicio me da un plano y un punto, y debo trazar la recta perpendicular al plano, uso su vector característico. Ese vector será normal al plano y, por lo tanto, paralelo a la recta. Y con ese vector y el punto del enunciado, podré trazar la recta solución.

Otro tipo de ejercicio muy parecido es cuando dan una recta y un punto, y debo obtener un plano perpendicular a la recta y que contenga al punto. El vector director de la recta será perpendicular al plano, por lo que será su vector característico. De ahí ya tendremos los coeficientes A, B y C de la recta. Y el término independiente D lo sacamos de sustituir el punto en la ecuación del plano.

Si dos planos son perpendiculares, recuerda que el vector característico de uno de ello será paralelo al otro plano. En estos tipos de ejercicio, como en todos los de geometría, es muy recomendable hacer al inicio un dibujo aclaratorio de las condiciones del enunciado.

Sea el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ y la recta r . Deseamos encontrar el punto $P'(x_2, y_2, z_2)$ simétrico a P respecto a la recta r . La forma de proceder es la siguiente:

1. Por el punto P debemos trazar una recta s que sea perpendicular a la recta r . El vector director de la recta s será perpendicular al vector director de la recta r , por lo que el producto escalar de ambos se anulará.

2. La intersección de r con s será el punto M . Este punto M se conoce como proyección ortogonal del punto P sobre la recta r .

3. Y este punto M será el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, de donde podremos obtener las coordenadas del punto P' .

Sea el punto $P(x_1, y_1, z_1)$ y el plano Π . Deseamos encontrar el punto $P'(x_2, y_2, z_2)$ simétrico a P respecto al plano Π . La forma de proceder es la siguiente:

1. Obtener ecuación de la recta r que pasa por P y es perpendicular a Π (usando el vector normal del plano).

2. Calcular el punto M como intersección de la recta r con el plano Π . Este punto M se conoce como proyección ortogonal del punto P sobre el plano Π .

3. Y este punto M será el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, de donde podremos obtener las coordenadas del punto P'.

Ejemplos

19a) Sean los puntos $A(0,1,1)$ y $B(2,1,3)$. Determina la ecuación del plano respecto los puntos A y B son simétricos.

19b) Sea el plano $\Pi: 2x+y-z+8=0$. Calcula el punto P', simétrico del punto $P(2,-1,5)$ respecto del plano Π. Calcula la recta r', simétrico de la recta $r: \frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{1}$ respecto del plano Π.

19c) Sea el plano $\Pi: 2x-y+z+1=0$ y la recta $r: \begin{Bmatrix} -2x+y-1=0 \\ 3x-z-3=0 \end{Bmatrix}$. Hallar el ángulo entre r y Π.

19d) Sea la recta $r: \frac{x-5}{-1}=y-2=z$ y la recta s que pasa por los puntos $A(1,6,6)$ y $B(4,c,5)$. Halla el coseno del ángulo que forman las rectas r y s si $c=3$.

19e) Considera el punto $P(1,-1,0)$ y la recta $r: \begin{Bmatrix} x=1+3t \\ y=-2 \\ z=t \end{Bmatrix}$. Halla las coordenadas del punto simétrico de P respecto de r.

19f) Sean los puntos $A(-1,-2,-1)\, y\, B(1,0,1)$. Determina la ecuación del plano respecto el cual ambos puntos son simétricos.

19g) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1,-1,2)$ y corta perpendicularmente a la recta $r: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+3}{4}$.

19h) Sea el plano $\Pi: 2x+y-z+8=0$ y los puntos $A(0,0,8)$ y $B(0,-8,0)$ que pertenecen al plano. Obtener la recta que pasa por ambos puntos. Obtener el plano perpendicular al plano Π y que contenga a la recta calculada anteriormente.

19i) Hallar el ángulo que forma la recta $r: \frac{x+1}{2}=\frac{y-3}{2}=\frac{z+1}{1}$ con el plano $\Pi_1: 2x-y+3z-1=0$.

19j) Hallar el ángulo que forman los dos planos siguientes: $\Pi_1: 2x-3y+z-5=0$ y $\Pi_2: 3x+4y-2z+1=0$

19k) Hallar el punto simétrico del punto $A(5,1,0)$ respecto al plano $\Pi: 3x-2y+z+1=0$.

19l) Hallar el punto simétrico del punto $A(1,2,0)$ respecto la recta $r: \frac{x-1}{2}=\frac{y}{-3}=\frac{z+1}{4}$.

19m) Hallar el plano perpendicular a la recta $r: \frac{x-1}{3}=\frac{y}{-3}=\frac{z+1}{4}$ que pasa por el punto $A(1,-1,2)$.

19n) Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $A(1,-1,2)$ y es perpendicular al plano $\Pi=2x+3y+z+5=0$.

20. Producto vectorial y producto mixto. Distancias. Recta perpendicular a dos rectas cruzadas

El producto vectorial de dos vectores $\vec{u}=(u_x, u_y, u_z)$ y $\vec{v}=(v_x, v_y, v_z)$ da como resultado otro vector. Se denota $\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}$ o bien $\vec{w}=\vec{u}\wedge\vec{v}$. Y se calcula con la regla:

$$\vec{u}=(u_x, u_y, u_z)=u_x\hat{i}+u_y\hat{j}+u_z\hat{k} \quad , \quad \vec{v}=(v_x, v_y, v_z)=v_x\hat{i}+v_y\hat{j}+v_z\hat{k}$$

$$\vec{w}=\vec{u}\times\vec{v}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ u_x & u_y & u_z \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix}$$

El vector resultante es perpendicular al plano que forman $\vec{u}$ y $\vec{v}$. Y su sentido se determina por la regla de la mano derecha.

Si solo deseo obtener el módulo del producto vectorial, puedo hacer uso de la fórmula:

$$|\vec{w}|=|\vec{u}\times\vec{v}|=|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|\cdot sen(\alpha)$$

Por último, decir que el producto vectorial es anticonmutativo. Es decir: $\vec{u}\times\vec{v}=-\vec{v}\times\vec{u}$

¿Cómo utilizar el producto vectorial en problemas de geometría? De varias maneras.

Si me dan un plano en forma paramétrica y debo obtener el vector característico del plano, o bien paso la ecuación a forma general con la determinación lineal del plano, o bien hago el producto vectorial de los dos vectores que aparecen en la forma paramétrica.

Otro tipo de ejercicios donde puedo usar el producto vectorial, por ejemplo, es cuando nos dan una recta en forma general y nos piden un vector director de la recta. Puedo pasar a paramétrica y sacar ese vector, o bien hacer el producto vectorial de los vectores característicos de los planos que forman la ecuación general.

Una tercera aplicación, que genera ejercicios un “pelín” largos, es cuando nos dan dos rectas cruzadas r y s , y debemos obtener la recta perpendicular a ambas y que las corta en un punto. Los pasosa seguir son:

1. Obtener los vectores directores de ambas rectas: $\vec{u}_r$, $\vec{v}_s$.
2. Realizar el producto vectorial de los vectores directores: $\vec{w}_t=\vec{u}_r\times\vec{v}_s$. El vector resultante será paralelo a la recta t que estamos buscando.
3. Con los vectores $\vec{u}_r$ y $\vec{w}_t$, y con un punto de la recta $A\in r$ obtenemos el plano Π .
4. Realizamos la intersección de ese plano Π con la otra recta s . El punto de corte B pertenecerá a la recta t que estamos buscando.
5. Con un punto $B\in t$ y un vector $\vec{w}_t \| t$ podremos obtener la recta solución.

Más aplicaciones. Si tengo dos planos en forma general que se cortan, y deseo obtener un vector perpendicular a ambos planos, puedo hacer el producto vectorial de los vectores característicos de ambos planos.

El producto mixto de tres vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ y $\vec{w}$ se define como el producto escalar del primero por el producto vectorial de los otros dos: $\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})$. El resultado del producto mixto es un número.

Una regla para calcular el producto mixto, sin necesidad de aplicar la definición, es realizar el determinante de la matriz cuadrada que se obtiene al colocar cada vector en forma de fila o en forma de columna.

La distancia de un punto $P(x_{0,} y_{0,} z_0)$ a una recta r es la distancia del punto P al punto de corte M de la recta perpendicular a r que pasa por P . Este punto M es la proyección ortogonal del punto P sobre la recta r . ¿Cómo obtenemos este punto M ?

1. Ponemos la recta r en paramétricas y expresamos un punto genérico $M \in r$ en función del parámetro.

2. Obtenemos el vector $\vec{PM}$ que también dependerá del parámetro. Este vector es perpendicular al vector director de la recta r . Y el producto escalar de dos vectores perpendiculares es nulo: $\vec{PM} \cdot \vec{u}_r = 0$

3. De esta condición sacamos el valor concreto del parámetro que nos dará las coordenadas del punto M .

4. La distancia buscada será el módulo del vector $|\vec{PM}|$.

Otra forma para obtener la distancia de un punto a una recta es usar la fórmula $d(P,r) = \frac{|\vec{AP} \times \vec{u}_r|}{|\vec{u}_r|}$, donde P es el punto externo a la recta, $\vec{u}_r$ es el vector director de la recta y A es un punto de la recta.

La distancia entre dos rectas paralelas $r \| s$ es la distancia de un punto de una de las rectas a la otra recta. Es decir, reducimos el problema al caso estudiado en el apartado anterior.

La distancia de un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ a un plano $\Pi: Ax + By + Cz + D = 0$ es la distancia del punto P a su proyección ortogonal sobre el plano, que llamaremos punto M . Los pasos a dar son:

1. Obtener vector característico del plano

2. Este vector característico y el punto del enunciado, trazamos la recta perpendicular al plano que pasa por P .

3. Obtenemos el punto de corte de la recta con el plano, lo cual nos dará el punto M .

4. La distancia del punto al plano será igual a la distancia entre los puntos P y M .

También hay fórmula para sacar la distancia de del punto al plano:

$$d(P,\Pi) = d(P,M) = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

La distancia entre dos planos paralelos consiste en tomar un punto cualquiera de uno de los planos y obtener la distancia de ese punto al otro plano. Es decir, reducimos el estudio a un caso del apartado anterior (distancia de un punto a un plano).

Si escribimos los dos planos paralelos con los mismos coeficientes A, B y C podemos sacar la distancia entre planos paralelos con la fórmula:

$$d(\Pi_{1,} \Pi_2) = \frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

Para terminar este extenso apartado. Dadas dos rectas cruzadas podemos sacar la distancia de separación obteniendo la recta perpendicular a ambas, sacar los puntos de corte, y calcular la distancia de separación entre ambos puntos. Es un procedimiento largo, por lo que podemos recurrir a una nueva fórmula:

$$d(r,s)=\frac{|\vec{AB}\cdot(\vec{u}_r\times\vec{u}_s)|}{|\vec{u}_r\times\vec{u}_s|}$$

Donde A es un punto de la recta r , $\vec{u}_r$ es el vector director de r , B es un punto de la recta s , $\vec{v}_s$ es el vector director de s .

Ejemplos

20a) Sean las rectas cruzadas $r:\begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x-2y+z=2 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x+y=0 \\ z=1 \end{cases}$. Obtener la mínima distancia entre ambas rectas.

20b) Sean los puntos $A(1,2,-1)$, $P(0,0,5)$, $Q(1,0,4)$ y $R(0,1,6)$. Hallar la distancia del punto A al plano que pasa por $P, Q\ y\ R$.

20c) Dados el plano $\Pi: x+y-z-1=0$ paralelo a la recta $r:\begin{cases} 3x+y+z-6=0 \\ 2x+y-2=0 \end{cases}$, calcula la distancia de la recta al plano.

20d) Sea la recta definida por $r:\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=\lambda-2 \end{cases}$ y paralela a la recta definida por $s:\begin{cases} x-y=1 \\ z=-1 \end{cases}$ **.** Calcula la distancia entre r y s .

20e) Sea el punto $P(1,0,5)$ y la recta $r:\begin{cases} y+2z=0 \\ x=1 \end{cases}$. Calcula la distancia de P a la recta r y el punto simétrico de P respecto a r .

20f) Sean los puntos $A(-1,-2,-1)\, y\, B(1,0,1)$. Calcula la distancia del punto $P(-1,0,1)$ a la recta que pasa por los puntos A y B.

20g) Hallar la ecuación de un plano que pase por el punto $A(-1,4,0)$ y sea perpendicular, respectivamente, a los planos:

$$\Pi_1: x+4y-z+8=0 \quad , \quad \Pi_2: -x+y+z-1=0$$

20h) Obtener una recta que corte de forma perpendicular a las dos siguientes rectas cruzadas:

$$r:\frac{x-1}{2}=\frac{y+2}{-3}=\frac{z}{5} \quad , \quad s:\frac{x+3}{1}=\frac{y-5}{4}=\frac{z-3}{2}$$

20i) Sea el punto $P(1,2,-1)$ y el plano dado en paramétricas $\Pi:\begin{cases} x=\alpha-\beta \\ y=1+\alpha-\beta \\ z=3-\alpha+2\beta \end{cases}$. Obtener una recta perpendicular al plano que pase por el punto P .

20j) Sean las rectas $r:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=1+\lambda \\ z=\lambda \end{cases}$, $s:\frac{x-1}{-2}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-2}$. Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a ambas rectas. Calcula la distancia entre ambas rectas.

20k) Sean las rectas $r:\begin{cases} x-z=1 \\ y-z=-1 \end{cases}$, $s:\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=\lambda \\ z=3 \end{cases}$. Determina la ecuación de la recta perpendicular común a ambas rectas.

20l) Sea la recta definida por $r:\begin{cases} x=1 \\ y=1 \\ z=\lambda-2 \end{cases}$ y la recta definida por $s:\begin{cases} x-y=1 \\ z=-1 \end{cases}$. Halla la ecuación de la recta que corta perpendicularmente a las rectas dadas. Calcula la distancia entre r y s .

20m) Obtener la distancia entres los planos paralelos $\Pi_1: 2x+y-z-2=0$ y $\Pi_2: 2x+y-z-9=0$.

20n) Hallar la distancia del punto $P(3,2,1)$ al plano $\Pi: 2x+y-z-2=0$.

20ñ) Obtener la distancia entre las siguientes rectas paralelas:

$$r: \frac{x}{1}=\frac{y-1}{2}=\frac{z+3}{2} \quad , \quad s: \frac{x+2}{2}=\frac{y-4}{4}=\frac{z-4}{4}$$

20o) Obtener la distancia del punto $P(2,-1,2)$ a la recta $r:\begin{cases} x=-1+2t \\ y=-2t \\ z=1+t \end{cases}$.

21. Áreas y volúmenes

El módulo del producto vectorial de dos vectores coincide con el área del paralelogramo definido al situar ambos vectores con un origen común y proyectar por los extremos líneas paralelas a cada vector, respectivamente.

$$|\vec{u}\times\vec{v}| \equiv \acute{A}rea \quad paralelogramo$$

La mitad del módulo del producto vectorial de dos vectores coincide con el área del triángulo definido al situar ambos vectores con un origen común y unir los extremos de ambos vectores.

$$\acute{A}rea \quad tri\acute{a}ngulo=\frac{1}{2}(\acute{A}rea \quad paralelogramo)=\frac{1}{2}|\vec{u}\times\vec{v}|$$

El valor absoluto del producto mixto de estos tres vectores coincide con el volumen del paralelepípedo formado al colocar los tres vectores con un origen común.

$$V_{paralelep\acute{\imath}pedo}=|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$$

El volumen del tetraedro es un sexto del módulo del producto mixto.

$$V_{tetraedro}=\frac{1}{6}|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$$

Ejemplos

22a) Sean los puntos $A(0,1,1)$, $B(2,1,3)$, $C(-1,2,0)$. Calcula el área del triángulo de vértices $A, B \quad y \quad C$.

22b) Sean las rectas $r:\begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1 \end{cases}$ y $s:\begin{cases} x+2y=-1 \\ z=-1 \end{cases}$. Son coplanarias. Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en ambas rectas, calcula su área.

22c) Sean los vectores $\vec{u}=(1,0,1)$, $\vec{v}=(0,2,1)$, $\vec{w}=(m,1,n)$. Para n=1, halla los valores de m para que el tetraedro determinado por los tres vectores tenga volumen 10 unidades cúbicas.

22d) Sean los puntos $A(1,1,1), B(0,-2,2), C(-1,0,2)\, y\, D(2,-1,-2)$. Calcula el volumen del tetraedro de vértices A, B, C y D.

22e) Calcula el volumen del paralelepípedo formado por los vectores $\vec{u}=(1,3,3)$, $\vec{v}=(-2,3,1)$ y $\vec{w}=(-1,2,1)$.

22f) Calcula el volumen del tetraedro de vértices $A(1,2,3)$, $B(-1,0,1)$, $C(2,1,3)$ y $D(3,4,-1)$.

22g) Dado los planos $\Pi_1: 4x+6y-12z+1=0$, $\Pi_2: -2x-3y+6z-5=0$ calcular el volumen de un cubo que tenga dos de sus caras en dichos planos.