Problemas resueltos de límites, continuidad, derivabilidad y estudio de funciones - repaso Bachillerato

Dificultad: ♣ *(fácil)* ♣♣ *(medio)* ♣♣♣ *(difícil)*

Índice de contenido

Índice temático

Ejercicios de límites

■ *Límites 1* ♣♣

Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\frac{a x^2+b x+1-\cos(x)}{sen(x^2)}$ **es finito e igual a uno, calcula los valores de** a **y** b **.**

Frente a un límite siempre debemos, **en primer lugar, evaluar**. Es decir, sustituir la variable x por el valor al que tiende.

Si al evaluar obtenemos un resultado finito o infinito, ya hemos terminado. Si aparece una indeterminación, debemos **indicar el tipo de indeterminación y resolverla**.

$$\lim_{x\to 0}\frac{a x^2+b x+1-\cos(x)}{sen(x^2)}=\frac{0+0+1-1}{sen(0)}=\frac{0}{0}\equiv indeterminación$$

En las indeterminaciones $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ podemos aplicar la **regla de L'Hôpital** siempre que se cumplan las siguientes condiciones (y siempre debemos **nombrar estas condiciones** a la hora de resolver un problema por L'Hôpital):

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en un entorno cerrado arbitrario alrededor de x_0 , es decir $[x_0-\delta, x_0+\delta]$ con $\delta>0$. Sean además las dos funciones derivables en $\{(x_0-\delta, x_0+\delta)-\{x_0\}\}$, tales que $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=0$ ó $\lim_{x\to x_0} f(x)=\lim_{x\to x_0} g(x)=\infty$.

Sea $g'(x)\neq 0,\ \forall x\in\{(a,b)-\{x_0\}\}$.

Entonces, si existe $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ también existe $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ y los límites son iguales. Es decir:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

El resultado final del límite puede ser un valor $L\in\mathbb{R}$ o infinito. Y el valor x_0 puede ser un valor finito o infinito.

Estas condiciones se cumplen en nuestro ejercicio, por lo tanto:

$$\lim_{x\to 0}\frac{a x^2+b x+1-\cos(x)}{sen(x^2)} \rightarrow \text{L'Hôpital} \rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{2 a x+b+sen(x)}{2 x\cos(x^2)}=\frac{b}{0}$$

Para que el límite sea finito, necesitamos que el numerador también tienda a 0 . En caso contario, **un cociente con numerador no nulo dividido por** 0 **se dispararía a infinito**. Por lo tanto, anulamos el numerador → $b=0$

Una vez obtenido el valor $b=0$ sustituimos en el límite y evaluamos nuevamente.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2ax+sen(x)}{2x\cos(x^2)}=\frac{0}{0}\equiv indeterminación \quad \to \text{L'Hôpital} \to$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2a+\cos(x)}{2[\cos(x^2)+x\cdot(-2\cdot x\cdot sen(x^2))]}=\frac{2a+1}{2[1+0]}=\frac{2a+1}{2}$$

Según el enunciado el límite debe converger a 1 . Por lo tanto:

$$\frac{2a+1}{2}=1 \quad \to \quad 2a+1=2 \quad \to \quad a=\frac{1}{2}$$

■ *Límites 2* ♣

Resolver:

a) $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1}$ **b)** $\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2+5}{4x^2-x+1}$ **c)** $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x^2-x+2}{x^2+1}$

Recuerda que un polinomio, en el infinito, siempre tiende a infinito. Y el signo $\pm\infty$ o $-\infty$ vendrá determinado por el grado del polinomio y por el coeficiente que acompaña al termino de mayor grado.

Por ejemplo, si $x\to\infty$ el polinomio $4x^2-x+1$ irá a $+\infty$. Y el binomio $-3x+5$ irá a $-\infty$.

Si $x\to-\infty$ el polinomio $4x^2-x+1$ irá a $+\infty$. Y el binomio $-3x+5$ irá a $+\infty$.

a) Evaluamos en el límite → $\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = \frac{\infty}{\infty} \equiv indeterminación$

Podemos resolver esta indeterminación por L'Hôpital, o bien **dividiendo todos los términos por el mayor grado** x^n **que aparezca en el cociente**. En este ejemplo, dividiríamos todo por x^2 .

Al dividir por el mayor grado, siempre se cumple la siguiente regla (que podemos indicar en nuestro examen para resolver el ejercicio): en un cociente de polinomios, cuando $x\to\infty$ o $x\to-\infty$, si el grado del numerador es menor que el grado del denominador, el límite tiende a 0 .

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x}{x^2+1} = 0$$

b) Evaluamos en el límite → $\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2+5}{4x^2-x+1} = \frac{-\infty}{\infty} \equiv indeterminación$

Podemos resolver por L'Hôpital, o bien aplicar la regla general fruto de dividir todos los términos por el mayor grado x^n que aparezca en el cociente (en el ejemplo, x^2): en un cociente de polinomios, cuando $x\to\infty$ o $x\to-\infty$, si el grado del numerador es igual que el grado del denominador, el límite tiende al cociente de los coeficientes que acompañan a los términos de mayor grado x^n .

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2+5}{4x^2-x+1} = \frac{-3}{4}$$

c) Evaluamos en el límite → $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x^2-x+2}{x^2+1} = \frac{-\infty}{\infty} \equiv indeterminación$

Para resolver límites en $-\infty$ hacemos lo siguiente. Cambiamos x por $-x$ y resolvemos límite en $+\infty$. Es decir:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{-x^3+x^2+x+2}{x^2+1}=\frac{-\infty}{\infty}$$ → Dividimos todo por x^3

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{-x^3}{x^3}+\frac{x^2}{x^3}+\frac{x}{x^3}+\frac{2}{x^3}}{\frac{x^2}{x^3}+\frac{1}{x^3}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-1+0+0+0}{0+0}=-\infty$$

■ *Límites 3* ♣♣

Obtener el valor de k **que satisface** $\lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2}-\sqrt{4x^2+kx-1}=4$

Evaluamos en el límite. Recuerda que la raíz cuadrada de infinito también vale infinito. Por lo tanto:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2}-\sqrt{4x^2+kx-1}=\infty-\infty\equiv indeterminación$$

Este tipo de indeterminaciones vamos a resolverlas **multiplicando y dividiendo por el conjugado de la expresión con radicales** (siempre que aparezcan raíces, ya sea restando o en un cociente, es buena idea aplicar esta técnica del conjugado).

Aparecerá suma por diferencia de un bonomio, que se resuelve como diferencia de cuadrados.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\sqrt{4x^2}-\sqrt{4x^2+kx-1})\cdot(\sqrt{4x^2}+\sqrt{4x^2+kx-1})}{\sqrt{4x^2}+\sqrt{4x^2+kx-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-4x^2-kx+1}{\sqrt{4x^2}+\sqrt{4x^2+kx-1}}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-kx+1}{\sqrt{4x^2}+\sqrt{4x^2+kx-1}}$$

En el numerador tenemos un polinomio de grado 1. Y en el denominador tenemos polinomios de grado 2 dentro de raíces cuadradas, por lo que su comportamiento en el infinito es similar al de un polinomio de grado 1. Es decir, podemos reducir nuestro estudio al cociente de polinomios del mismo grado. El límite final será el cociente de los coeficientes que acompañan a los términos de mayor grado x^n.

En el numerador $-k$ acompaña a x, y el denominador 4 acompaña a x^2, por lo que al estar dentro de una raíz sale como $\sqrt{4}=2$. Es decir:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-kx+1}{\sqrt{4x^2}+\sqrt{4x^2+kx-1}}=\frac{-k}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=\frac{-k}{2+2}=\frac{-k}{4}$$

El enunciado afirma que el límite es igual a 4 → $\frac{-k}{4}=4$ → $k=-16$

■ *Límites 4 ♣♣*

Resolver $\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x)$

Evaluamos → $\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x)=0\cdot(-\infty)\equiv indeterminación$

Recuerda que la gráfica del logaritmo tiene una asíntota vertical a la derecha de 0 .

Este tipo de indeterminaciones se resuelven **dando la vuelta a uno de los término del producto, para buscar una indeterminación donde podamos aplicar L'Hôpital**. Es común dar la vuelta al término más sencillo de los dos, en este caso $x=\frac{1}{\frac{1}{x}}$.

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}=\frac{-\infty}{\infty}$$

Enunciaríamos las condiciones de la regla de L'Hôpital (no lo vayas a olvidar) y resolveríamos derivando numerador y denominador por separado.

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \to \text{L'Hôpital} \to \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$$

Donde hemos simplificado antes de evaluar finalmente. **No olvides simplificar, si es posible**, tras haber aplicado L'Hôpital.

■ *Límites 5* ♣♣

Resolver $\lim_{x \to 0^+} x^x$

Evaluamos → $\lim_{x \to 0^+} x^x = 0^0 \equiv indeterminación$

Este tipo de indeterminaciones, y en las tipo ∞^0 y 1^∞ , pueden resolverse **aplicando primero función logaritmo y luego función exponencial, que es la inversa del logaritmo**. Es decir:

$$\lim_{x \to 0^+} \ln\left(x^x\right) = \lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln\left(x\right) = 0 \cdot \left(-\infty\right) \equiv indeterminación$$

Donde hemos aplicado la propiedad del logaritmo de una potencia, donde el exponente pasa a multiplicar al logaritmo de la base de la potencia.

Hemos llegado al mismo límite del ejemplo anterior. Repetiríamos todos los pasos allí indicados y resolveríamos.

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln\left(x\right) = 0$$

Este resultado es el logaritmo del límite de partida, por lo que aplicamos exponencial para que cancele con logaritmo. Así obtenendremos el límite de partida.

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = e^0 = 1$$

■ *Límites 6* ♣

Resolver $\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2-x-2}$

Evaluamos → $\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2-x-2}=\frac{0}{0}\equiv indeterminación$

¿Cómo resolver? **Factorizando** numerador y denominador, **simplificando** y **evaluando** nuevamente.

$$\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{x^2-x-2}=\lim_{x\to -1} \frac{x+1}{(x+1)\cdot(x-2)}=\lim_{x\to -1} \frac{1}{(x-2)}=\frac{-1}{3}$$

■ *Límites 7* ♣♣

Resolver $\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln(x)}-\frac{2}{x^2-1}\right)$

$$\lim_{x\to 1^+}\left(\frac{1}{\ln(x)}-\frac{2}{x^2-1}\right)=\infty-\infty \;\to \text{m.c.m.} \to\; \lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1-2\ln(x)}{(x^2-1)\ln(x)}=\frac{0}{0} \;\to \text{L'Hôpital} \to$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{2x-2\cdot\frac{1}{x}}{2x\cdot\ln(x)+(x^2-1)\cdot\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1^+}\frac{2x^2-2}{2x^2\cdot\ln(x)+(x^2-1)}=\frac{0}{0} \;\to \text{L'Hôpital} \to$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{4x}{4x\cdot\ln(x)+2x^2\frac{1}{x}+(2x)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{4x}{4x\cdot\ln(x)+2x+(2x)}=\lim_{x\to 1^+}\frac{4x}{4x\cdot\ln(x)+4x}=\frac{4}{0+4}=1$$

■ *Límites 8* ♣♣

Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-a\,sen(x)+x\cos(3x)}{x^2}$ **es finito, calcula** a **y el valor del límite.**

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)-a\,sen(x)+x\cos(3x)}{x^2}=\frac{0}{0}$$ → L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-a\cos(x)+\cos(3x)+x(-sen(3x)3)}{2x}=\frac{1-a+1+0}{0}=\frac{2-a}{0}$$

Para que el límite sea finito, necesitamos que el numerador sea nulo. En caso contrario, el límite se dispararía a infinito.

$$2-a=0 \quad\rightarrow\quad a=2$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{1}{x+1}-2\cos(x)+\cos(3x)-3x\,sen(3x)}{2x}=\frac{0}{0}$$ → L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{-1}{(x+1)^2}-2(-sen(x))-sen(3x)3-3\,sen(3x)-3x\cos(3x)3}{2}=\frac{-1+0-0-0-0}{2}=\frac{-1}{2}$$

■ *Límites 9 ♣♣♣*

Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+|x|)}{x}$

Primero rompemos el valor absoluto que hay en la función sobre la que deseamos aplicar el límite.

Como el valor absoluto es $|x|$, tendremos una función a la izquierda de 0 y otra a la dercha de 0.

Por tanto, obtendremos dos límites laterales (a la izquierda y a la derecha de cero) → $\left\{\begin{array}{l} \lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1-x)}{x} \\ \lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1+x)}{x} \end{array}\right\}$

$\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{0}{0}$ → L'Hôpital → $\lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{-1}{1-x}}{1} = -1$

$\lim_{x\to 0^+} \frac{\ln(1-x)}{x} = \frac{0}{0}$ → L'Hôpital → $\lim_{x\to 0^-} \frac{\frac{1}{1-x}}{1} = 1$

Como los límites laterales son distintos, no existe el límite de la función cuando x tiende a 0.

■ *Límites 10* ♣♣

Obtener a **para que se cumpla** $\lim_{x\to 0}(\frac{sen(3x)}{x^2}+\frac{a}{x}+3x)=0$

$$\lim_{x\to 0}(\frac{sen(3x)}{x^2}+\frac{a}{x}+3x)=\frac{0}{0}+\frac{a}{0}+0$$ → m.c.m. → $$\lim_{x\to 0}\frac{sen(3x)+a\,x+3x^3}{x^2}=\frac{0}{0}$$ → L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(3x)3+a+9x^2}{2x}=\frac{3+a}{0}$$

El numerador debe ser nulo, para evitar que el límite se vaya a infinito → $3+a=0$ → $a=-3$

$$\lim_{x\to 0}\frac{3\cos(3x)-3+9x^2}{2x}=\frac{0}{0}$$ → L'Hôpital → $$\lim_{x\to 0}\frac{3(-sen(3x)3)+18x}{2}=\frac{0}{2}=0$$

■ *Límites 11* ♣♣

Obtener a **para que el siguiente límite exista y sea finito** $\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} + a x}{x - sen(x)}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} + a x}{x - sen(x)} = \frac{1 - 1 + 0}{0 - 0} = \frac{0}{0}$$ → L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} + a}{1 - \cos(x)} = \frac{2 + a}{0}$$

El numerador debe ser nulo, para que el límite sea finito → $2 + a = 0$ → $a = -2$

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{1 - \cos(x)} = \frac{0}{0}$$ → L'Hôpital → $$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x}}{sen(x)} = \frac{0}{0}$$ → L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos(x)} = \frac{2}{1} = 2$$

■ *Límites 12* ♣♣

Obtener a **para que se cumpla** $\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos(ax)}=8$

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos(ax)}=\frac{0}{1-1}=\frac{0}{0}$$ → L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+x\cdot\frac{1}{1+x}}{sen(ax)a}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)\ln(1+x)+x}{(1+x)sen(ax)a}=\frac{0}{0}$$ → L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)+(1+x)\cdot\frac{1}{1+x}+1}{sen(ax)a+(1+x)\cos(ax)a^2}=\frac{0}{0}=\frac{0+1+1}{0+a^2}=\frac{2}{a^2}$$ → Según el enunciado, el límite vale 8

$$\frac{2}{a^2}=8 \quad\rightarrow\quad a=\frac{\pm 1}{2}$$

■ *Límites 13* ♣♣

Calcula $\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{1+sen(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}$

$\lim_{x\to 0}\left(\frac{x+1}{1+sen(x)}\right)^{\frac{1}{x^2}}=1^{\infty}$ → indeterminación

Si $f(x)=\frac{x+1}{1+sen(x)}$, $g(x)=\frac{1}{x^2}$ → $L=e^{\lim_{x\to 0} g(x)[f(x)-1]}$ → $L=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left[\frac{x+1}{1+sen(x)}-1\right]}$

$L=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left[\frac{x-sen(x)}{1+sen(x)}\right]}=e^{\lim_{x\to 0}\frac{x-sen(x)}{x^2+x^2 sen(x)}}=e^{\frac{0}{0}}$ → indeterminación en exponente → L'Hôpital

$L=e^{\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{2x+2x\,sen(x)+x^2\cos(x)}}=e^{\frac{0}{0}}$ → indeterminación en exponente → L'Hôpital

$L=e^{\lim_{x\to 0}\frac{sen(x)}{2+2sen(x)+2x\cos(x)+2x\cos(x)-x^2 sen(x)}}=e^{\frac{0}{2}}=e^0=1$

■ *Límites 14* ♣

Calcula $\lim_{x \to 0} \frac{x \ln(x+1)}{2-2\cos(x)}$

$\lim_{x \to 0} \frac{x \ln(x+1)}{2-2\cos(x)} = \frac{0}{0}$ → indeterminación → L'Hôpital

$\lim_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)+\frac{x}{x+1}}{2\,sen(x)} = \frac{0}{0}$ → indeterminación → L'Hôpital → $\lim_{x \to 0} \frac{\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}}{2\cos(x)} = \frac{2}{2} = 1$

■ *Límites 15* ♣♣

Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{sen(2x)+(1-x)^2-1}{\ln(\cos(x))}$

$$\lim_{x\to 0} \frac{sen(2x)+(1-x)^2-1}{\ln(\cos(x))}=\frac{0}{0}$$ → indeterminación → L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(2x)2+2(1-x)(-1)}{\frac{-sen(x)}{\cos(x)}}=\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(2x)\cos(x)-2\cos(x)+2x\cos(x)}{-sen(x)}=\frac{2-2}{0}=\frac{0}{0}$$ →

indeterminación → L'Hôpital

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(-sen(2x)2)\cos(x)+2\cos(2x)(-sen(x))+2\,sen(x)+2\cos(x)+2x(-sen(x))}{-\cos(x)}=\frac{2}{-1}=-2$$

■ *Límites 16* ♣

Calcula $\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{4}{x-4}\right)$

$\lim_{x\to 4}\left(\frac{1}{\sqrt{x}-2}-\frac{4}{x-4}\right)=\infty-\infty$ → indeterminación → m.c.m. sabiendo que $x-4=(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)$

$$\lim_{x\to 4}\left(\frac{\sqrt{x}+2-4}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}\right)=\lim_{x\to 4}\frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=\lim_{x\to 4}\frac{1}{\sqrt{x}+2}=\frac{1}{4}$$

■ *Límites 17* ♣♣

Calcula $\lim_{x\to 0} \frac{sen^2(x)-3x^2}{e^{x^2}-\cos(2x)}$

$\lim_{x\to 0} \frac{sen^2(x)-3x^2}{e^{x^2}-\cos(2x)}=\frac{0}{0}$ → indeterminación → L'Hôpital → $\lim_{x\to 0} \frac{2\,sen(x)\cos(x)-6x}{e^{x^2}2x+sen(2x)2}=\frac{0}{0}$

→ indeterminación → L'Hôpital → $\lim_{x\to 0} \frac{2\cos(x)\cos(x)+2\,sen(x)(-sen(x))-6}{e^{x^2}2x2x+e^{x^2}2+\cos(2x)4}=\frac{2-6}{2+4}=\frac{-2}{3}$

■ *Límites 18* ♣♣

Calcula $\lim_{x\to 1}[\cos(\pi x)+2^x]^{\frac{1}{\ln(x)}}$

Evaluamos el límite y obtenemos indeterminación 1^{∞} .

Aplicamos logaritmo, resolvemos el nuevo límite y, al final, aplicamos exponencial.

$$\lim_{x\to 1}\ln[\cos(\pi x)+2^x]^{\frac{1}{\ln(x)}}=\lim_{x\to 1}\frac{\ln[\cos(\pi x)+2^x]}{\ln(x)}=\frac{0}{0}$$ → indeterminación → L'Hôpital

$$\lim_{x\to 1}\frac{\frac{-sen(\pi x)\cdot\pi+2^x\ln(2)}{\cos(\pi x)+2^x}}{\frac{1}{x}}=\lim_{x\to 1}\frac{-x\,sen(\pi x)\pi+x\,2^x\ln(2)}{\cos(\pi x)+2^x}=\frac{0+2\ln(2)}{1}=2\ln(2)$$

Aplicamos exponencial.

$$L=e^{2\ln(2)}=e^{\ln(2^2)}=4$$

Ejercicios de asíntotas

■ *Asíntotas 1* ♣

Estudia las asíntotas de $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$

Una función puede tener asíntotas verticales (A.V.), asíntotas horizontales (A.H.) y/o asíntotas oblicuas (A.O.).

Los puntos candidatos a A.V. son los puntos que no pertenecen al dominio, o los puntos frontera de los intervalos donde no está definida la función. En el caso de un cociente de polinomios, basta con ver los puntos que anulan al denominador.

$$x^2-1=0 \rightarrow x=\pm 1 \rightarrow \lim_{x\to 1}\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{0}=\infty \quad , \quad \lim_{x\to -1}\frac{x}{x^2-1}=\frac{-1}{0}=\infty$$

Siempre, siempre, **siempre que aparezca infinito en un límite de A.V. debemos estudiar los límites laterales**, para determinar si la función tiende a $+\infty$ o a $-\infty$.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{0^-}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty \rightarrow \text{A.V. en } x=1$$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x}{x^2-1}=\frac{-1}{0^+}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to -1^+}\frac{x}{x^2-1}=\frac{-1}{0^-}=+\infty \rightarrow \text{A.V. en } x=-1$$

Las A.H. aparecen cuanto estudiamos el comportamiento de la función en el infinito. Por lo que debemos estudiar los siguientes límites.

$$\lim_{x\to \infty}\frac{x}{x^2-1}=0$$ → Donde el grado del numerador es mayor que el grado del denominador

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{x^2-1}=0$$ → Donde el grado del numerador es mayor que el grado del denominador

Existe A.H. en la recta horizontal $y=0$. Por norma general, en cociente de polinomios, es suficiente que estudiemos el límite en $+\infty$. Pero ojo, si aparecen exponenciales, logaritmos, raíces, valores absolutos y/o funciones a trozos debemos estudiar el límite tanto en $+\infty$ como en $-\infty$, ya que las A.H. pueden aparecer solo en un lado de la función.

Para estudiar el límite en $-\infty$, lo más práctica es hacer un cambio de x por $-x$ y estudiar el límite en $+\infty$.

Por último, como regla general, **si existen A.H. no tendremos A.O**. No olvidemos indicar este dato: debemos escribir explícitamente que no existen A.O. porque tenemos A.H.

■ *Asíntotas 2* ♣

Estudia las asíntotas oblicuas de $f(x)=\dfrac{x^2}{2x-1}$

Una asíntota oblicua es una recta con pendiente no nula, de forma general $y=mx+n$, donde m es la pendiente de la recta y n el valor de la ordenada en el origen.

Si tenemos un cociente de polinomios, donde el grado del numerador supera en una unidad al grado del denominador, tendremos A.O.

Cada parámetro de la recta de la A.O. se calcula con un límite asociado.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \quad\rightarrow\quad m=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2-x} \quad\rightarrow\quad m=\frac{1}{2}$$

Donde hemos usado que el valor del límite, al ser cociente de polinomios del mismo grado en el infinito, es igual al cociente de los coeficientes que acompañan al mayor grado x^2 .

Si $m=0$ significa que o bien nos hemos equivocado en las operaciones, o bien que no existe A.O (una recta con pendiente nula es una recta horizontal, por lo que determinaría una A.H.).

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx) \quad\rightarrow\quad n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x-1}-\frac{1}{2}x\right) \quad\rightarrow\quad n=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-2x^2+x}{4x-2}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{4x-2} \quad\rightarrow\quad n=\frac{1}{4}$$

Donde nuevamente usamos que el valor del límite es igual al cociente de los coeficientes que acompañan al mayor grado x .

La A.O. resulta → $y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{4}$

■ *Asíntotas 3* ♣

Estudia las asíntotas de $f(x)=\dfrac{x^3}{x^2-1}$

Dominio de la función → $\mathbb{R}\pm\{-1,1\}$

$\lim\limits_{x\to 1^-}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\dfrac{1}{0^-}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to 1^+}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\dfrac{1}{0^+}=+\infty$ → A.V. en $x=1$

$\lim\limits_{x\to -1^-}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\dfrac{-1}{0^+}=-\infty$, $\lim\limits_{x\to -1^+}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\dfrac{-1}{0^-}=+\infty$ → A.V. en $x=-1$

A.H. → $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^2-1}=\infty$ → Por ser grado del numerador mayor que el grado del denominador.

Al ser un cociente de polinomios, si no hay A.H. en $+\infty$ tampoco lo habrá en $-\infty$.

A.O. → $y=mx+n$

$m=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^3}{x^3-x}=1$ → Grado numerador = Grado denominador → El límite coincide con el cociente de los coeficientes de la máxima potencia.

$n=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3}{x^2-1}-x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x^3-x^3+x}{x^2-1}\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x}{x^2-1}\right)=0$ → Por serel grado del numerador inferior al grado del denominador.

A.O. → $y=x$

Esta A.O. aparece tanto en $+\infty$ como en $-\infty$, por ser cociente de polinomios.

■ *Asíntotas 4* ♣♣

Determinar, si existen, las asíntotas horizontales de $f(x)=\frac{|x|}{\sqrt{x^2+9}}$

Primero rompemos el valor absoluto → $f(x)=\left\{\begin{matrix} \frac{-x}{\sqrt{x^2+9}} & si\ x<0 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} & si\ x\geq 0 \end{matrix}\right\}$

Por lo tanto, tendremos que estudiar una función en $+\infty$ y otra función en $-\infty$.

$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{\infty}{\infty}$ -->Recuerda que en fracciones de polinomio de grado uno con raíz de un polinomio de grado dos, al aplicar L'Hôpital de manera consecutiva dos veces, regresamos al límite de partida. Por lo que debemos buscar otra alternativa para resolver la indeterminación: dividir por la máxima potencia:

$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{9}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+0}}=1$ → A.H. y=1 si $x\to+\infty$ (recuerda que la A.H. es una recta horizontal)

Estudiamos ahora en el otro tramo de la función.

$\lim_{x\to-\infty}\frac{-x}{\sqrt{x^2+9}}=\frac{\infty}{\infty}$ → $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2+9}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{9}{x^2}}}=\frac{1}{\sqrt{1+0}}=1$ → A.H. $y=1$ si $x\to-\infty$

■ *Asíntotas 5* ♣♣

Estudiar las asíntotas de $f(x)=\frac{|x|}{x+1}$

Rompemos el valor absoluto → $f(x)=\left\{\begin{matrix} \frac{-x}{x+1} \ si \ x<0 \\ \frac{x}{x+1} \ si \ x\geq 0 \end{matrix}\right\}$

Las dos funciones que aparecen, anulan su denominador para $x=-1$. Este es nuestro candidato a A.V.

$\lim_{x\to -1^-}\frac{-x}{x+1}=\frac{1}{0^-}=-\infty$, $\lim_{x\to -1^+}\frac{-x}{x+1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$ -->A.V. en $x=-1$

Para las A.H. tendremos que estudiar dos límites, en + y en – infinito.

$\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{x+1}=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación → L'Hôpital → $\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{1}=1$ → A.H. $y=1$ si $x\to +\infty$

$\lim_{x\to -\infty}\frac{-x}{x+1}=\frac{\infty}{-\infty}$ → Indeterminación → cambiamos x por $-x$ y hacemos límite en $x\to +\infty$ →

$\lim_{x\to +\infty}\frac{x}{-x+1}=\frac{\infty}{-\infty}$ → Indeterminación → L'Hôpital → $\lim_{x\to +\infty}\frac{1}{-1}=-1$ → A.H. $y=1$ si $x\to -\infty$

Si hay A.H. no hay A.O.

■ *Asíntotas 6* ♣♣♣

Estudiar asíntotas de $f(x)=\sqrt{x^2-x}+x$

Los candidatos A.V. son los puntos que no pertenecen al dominio o los puntos frontera de los intervalos que no pertenecen al dominio.

En nuestra función, para obtener el dominio devemos imponer la condición de discriminante no nulo:

$x^2-x\geq 0 \quad \rightarrow \quad x(x-1)\geq 0$ → Raíces $x=0$, $x=1$

Obtenemos el signo de $x(x-1)$ en los intervalos formados por las raíces:

$(-\infty,0)$ → por ejemplo $x=-5 \rightarrow -5(-5-1)>0$ → pertenece al dominio

$(0,1)$ → por ejemplo $x=\frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2}(\frac{1}{2}-1)<0$ → no pertenece al dominio

$(1,+\infty)$ → por ejemplo $x=10 \rightarrow 10(10-1)>0$ → pertenece al dominio.

El dominio de la función es $(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$.

$\lim_{x\to 0}(\sqrt{x^2-x}+x)=0$, $\lim_{x\to 1}(\sqrt{x^2-x}+x)=1$ → Los límites son finitos, por lo tanto no hay A.V.

Estudiamos A.H. tanto en + infinito como en – infinito.

$\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x}+x)=\infty+\infty=\infty$ → No hay A.H. si $x\to+\infty$

$\lim_{x\to-\infty}(\sqrt{x^2-x}+x)=\infty-\infty$ → Indeterminación → cambiamos x por $-x$ y hacemos límite en $x\to+\infty \rightarrow \lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)=\infty-\infty$ → multiplicamos y dividimos por conjugado →

$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x}-x)\cdot\frac{(\sqrt{x^2+x}+x)}{(\sqrt{x^2+x}+x)} \rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{x^2+x-x^2}{(\sqrt{x^2+x}+x)}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{(\sqrt{x^2+x}+x)}=\frac{\infty}{\infty}$ → Dividimos todo por $x \rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{\frac{x}{x}}{(\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{x}{x^2}}+\frac{x}{x})}=\frac{1}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{1}{2}$ → Hay A.H. en $y=\frac{1}{2}$ si $x\to-\infty$

¿Cómo estudiar las A.O.?

En $x\to-\infty$ hay A.H., por lo tanto seguro que no habrá A.O.

Pero en $x\to+\infty$ no hay A.H., por lo que sí puede haber A.O.

$m=\lim_{x\to+\infty}\frac{(\sqrt{x^2-x}+x)}{x}=\frac{\infty}{\infty}$ → El mayor grado del numerador es 1, igual que el mayor grado del denominador, por lo que $m=\frac{1+1}{1}=2$ → Donde recordamos que un polinomio de grado dos dentro de una raíz, se comporta como un polinomio de grado uno en el infinito.

$n=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x}+x-2x)=\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2-x}-x)=\infty-\infty$ → Multiplicar y dividir por conjugado →

$\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2-x}-x) \cdot \frac{(\sqrt{x^2-x}+x)}{(\sqrt{x^2-x}+x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(x^2-x-x^2)}{(\sqrt{x^2-x}+x)} = \lim_{x \to +\infty} \frac{(-x)}{(\sqrt{x^2-x}+x)} = \frac{-1}{2}$ → Donde nuevamente hemos aplicado que el grado del numerador y el grado del denominador coinciden, por lo que hacemos el cociente de coeficientes que acompañan a la máxima potencia → $y=2x-\frac{1}{2}$ es A.O. si $x \to +\infty$.

¡Un ejercicio muy completito!

■ *Asíntotas 7* ♣♣

Indicar la posición relativa de $f(x)=\frac{x^2-3x+3}{x^2-4}$ respecto a su horizontal. ¿Corta la función en algún momento a la A.H.? En caso afirmativo, encontrar el punto de corte.

La posición relativa nos pide estudiar si la función queda, en el infinito, por encima o por debajo de su A.H. o de su A.O.

En este caso, nos piden el estudio respecto la A.H.

$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2-3x+3}{x^2-4}=\frac{\infty}{\infty}=1$ → Donde hemos aplicado el cociente de coeficientes que acompañan a la máxima potencia → $y=1$ es A.H. en $x\to+\infty$. Y como es un cociente de polinomios, también lo será en $x\to-\infty$.

El dominio de la función es $\mathbb{R}-\{-2,2\}$, ya que el denominador solo se anula en -2 y en 2.

El corte de la función con su A.H. se obtiene igualando la función a la A.H.

$$\frac{x^2-3x+3}{x^2-4}=1 \quad\to\quad x^2-3x+3=x^2-4 \quad\to\quad x=\frac{7}{3}$$

Por lo tanto, debemos comparar la A.H. con imagen de la función en un punto del intervalo $(-\infty,-2)$ y del intervalo $(\frac{7}{3},\infty)$ para conocer su posición relativa.

$f(-10)=\frac{100+30+3}{100-4}=\frac{133}{96}>1$ → la función está por encima de la A.H. cuando $x\to-\infty$

$f(10)=\frac{100-30+3}{100-4}=\frac{73}{96}<1$ →→ la función está por debajo de la A.H. cuando $x\to+\infty$

■ *Asíntotas 8* ♣♣

Sea $f(x)=\frac{1}{x^2-k}$ **, con** $k\neq 0$ **. Calcula el dominio y las asíntotas según el valor del parámetro** k **.**

Si $k<0 \rightarrow x^2-k=0 \rightarrow x^2=k<0$ → El denominador no se anula nunca, por lo que no habrá A.V.

Al estudiar la A.H. podemos hacerlo en $x\to+\infty$, ya que al ser un cociente de polinomios el resultado será igual que para $x\to-\infty \rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2-k}=0 \rightarrow y=0$ es A.H. en $x\to\pm\infty$

Si hay A.H. no habrá A.O.

Si $k>0 \rightarrow x^2-k=0 \rightarrow x^2=k>0 \rightarrow x=\pm\sqrt{k}$ → Tendremos dos candidatos a A.V., al anularse el denominador. Estudiamos sus límites laterales.

$$\lim_{x\to(-\sqrt{k})^-}\frac{1}{x^2-k}=\frac{1}{0^+}=+\infty \quad , \quad \lim_{x\to(-\sqrt{k})^+}\frac{1}{x^2-k}=\frac{1}{0^-}=-\infty \quad \rightarrow \quad x=-\sqrt{k} \text{ es A.V.}$$

$$\lim_{x\to(\sqrt{k})^-}\frac{1}{x^2-k}=\frac{1}{0^-}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to(\sqrt{k})^+}\frac{1}{x^2-k}=\frac{1}{0^+}=+\infty \quad \rightarrow \quad x=\sqrt{k} \text{ es A.V.}$$

Nuevamente, al estudiar la A.H. podemos hacerlo en $x\to+\infty$, ya que al ser un cociente de polinomios el resultado será igual que para $x\to-\infty \rightarrow \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2-k}=0 \rightarrow y=0$ es A.H. en $x\to\pm\infty$

Si hay A.H. no habrá A.O.

■ *Asíntotas 9* ♣♣

Sea la función $f(x)=(8-x^2)^{\frac{1}{3}}$ **. Determinar el dominio, la continuidad y las asíntotas.**

Tenemos una raíz cúbica de un polinomio, por lo que no existen restricciones para su dominio. Su dominio es toda la recta real, y la función es continua en su dominio.

Al ser continua en toda la recta real, no aparecen A.V.

Para la A.H. → $\lim_{x\to+\infty}(8-x^2)^{\frac{1}{3}}=-\infty$, e igualmente $\lim_{x\to-\infty}(8-x^2)^{\frac{1}{3}}=-\infty$ → No hay A.H.

Para la A.O. → $\lim_{x\to+\infty}\frac{(8-x^2)^{\frac{1}{3}}}{x}=\frac{-\infty}{\infty}$ → Dividimos por la máxima potencia → $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\frac{8}{x^3}-\frac{x^2}{x^3})^{\frac{1}{3}}}{\frac{x}{x}}=\frac{0}{1}=0$ → No hay A.O. si $x\to\infty$ al resultar la pendiente nula.

Igualmente → $\lim_{x\to-\infty}\frac{(8-x^2)^{\frac{1}{3}}}{x}=\frac{-\infty}{-\infty}$ → Estudiamos en $x\to\infty$ e intercambiamos el signo de la variable x dentro de la función → $\lim_{x\to-\infty}\frac{(8-x^2)^{\frac{1}{3}}}{x}=\frac{-\infty}{-\infty}$ → Dividimos por la máxima potencia → $\lim_{x\to+\infty}\frac{(\frac{8}{x^3}-\frac{x^2}{x^3})^{\frac{1}{3}}}{\frac{-x}{x}}=\frac{0}{-1}=0$ → No hay A.O. si $x\to-\infty$

Ejercicios de dominio y continuidad

■ *Continuidad 1* ♣

Obtener el dominio de definición de $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x^2-5x+6}}$

Necesitamos que el **argumento de la raíz sea positivo o cero**. Igualmente, debemos **desestimar los valores que anulan al denominador del cociente**.

Planteamos la siguiente inecuación. Recuerda que **la solución de una inecuación es un intervalo o la unión de varios intervalos**.

$$\frac{x}{x^2-5x+6}\geq 0$$

En una inecuación con cociente, debemos obtener las raíces del numerador y del denominador. Al tener la inecuación el signo igual, las raíces del numerador pueden formar parte del intervalo solución final. Las raíces del denominador nunca formarán parte de la solución final, ya que no podemos dividir por cero.

$$x=0$$

$$x^2-5x+6=0 \;\rightarrow\; x=2 \;,\; x=3$$

Evaluamos el signo del cociente en los distintos intervalos formados por las raíces.

$si\;\; x<0 \;\rightarrow\; x=-10 \;\rightarrow\; \dfrac{-10}{(-10)^2-5(-10)+6}<0$ → No cumple la desigualdad de partida

$si\;\; 0<x<2 \;\rightarrow\; x=1 \;\rightarrow\; \dfrac{1}{(1)^2-5(1)+6}>0$ → Sí cumple la desigualdad de partida

$si\;\; 2<x<3 \;\rightarrow\; x=\dfrac{5}{2} \;\rightarrow\; \dfrac{\frac{5}{2}}{(\frac{5}{2})^2-5(\frac{5}{2})+6}<0$ → No cumple la desigualdad de partida

$si\;\; x>3 \;\rightarrow\; x=10 \;\rightarrow\; \dfrac{10}{(10)^2-5(10)+6}>0$ → Sí cumple la desigualdad de partida

El dominio de la función es → $Dom(f)=[0,2)\cup(3,+\infty)$

■ *Continuidad 2* ♣♣

Estudiar el dominio de:

a) $f(x)=\frac{x^3}{x^2-1}$ **b)** $f(x)=\ln(\frac{x}{x-1})$

c) $f(x)=\sqrt{x^2+2x-3}$ **d)** $f(x)=\frac{x}{\ln(x)}$

a) En un cociente de poliniomios, el dominio son todos los reales menos los valores que anulan al denominador. Por lo tanto:

$Dom(f)=\mathbb{R}-\{-1,1\}$

b) En el dominio del logaritmo de una función, debemos exigir que el argumento del logaritmo sea estrictamente positivo. Por lo tanto:

$\frac{x}{x-1}>0$

Obtenemos una inecuación, donde debemos trabajar con las raíces del numerador y del denomiador.

Raíces del numerador: $x=0$

Raíces del denominador: $x=1$

Evaluamos el signo de la inecuación en los siguientes intervalos:

$(-\infty,0)\rightarrow x=-2\rightarrow\frac{-2}{-2-1}>0$ → Sí pertenece al dominio

$(0,1)\rightarrow x=\frac{1}{2}\rightarrow\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}<0$ → No pertenece al dominio

$(1,\infty)\rightarrow x=2\rightarrow\frac{2}{2-1}>0$ → Sí pertenece al dominio

Solución final: $Dom(f)=(-\infty,0)\cup(1,\infty)$

c) En el dominio de la raíz cuadrada de una función, debemos imponer que el discriminante sea mayor o igual que cero. Por lo tanto:

$x^2+2x-3\geq 0$

Obtenemos las raíces del polinomio → $x=1, x=-3$

Evaluamos el signo de la inecuación en los siguientes intervalos.

$(-\infty,-3)\rightarrow x=-10\rightarrow(-10)^2+2(-10)-3>0$ → Sí pertenece al dominio

$(-3,1)\rightarrow x=0\rightarrow(0)^2+2(0)-3<0$ → No pertenece al dominio

$(1,\infty) \rightarrow x=10 \rightarrow (10)^2+2(10)-3<0$ → Sí pertenece al dominio

En la solución final, además de los intervalos que cumplen la inecuación, debemos incluir las raíces que anulan al polinomio:

$$Dom(f)=(-\infty,-3]\cup[1,\infty)$$

d) En el cociente de dos funciones, debemos obtener el domino del numerador y del denominador. Hacer la intersección de ambos dominios y eliminar los puntos que anulan al denominador.

$$f(x)=\frac{x}{\ln(x)}$$

El dominio del numerador son todos los reales, por ser un polinomio.

El dominio del logaritmo es $(0,+\infty)$.

Hacemos la intersección: $\mathbb{R}\cap(0,+\infty)=(0,\infty)$

Y sobre esta intersección, quitamos los valores que anulan al denominador: $\ln(x)=0 \rightarrow x=1$

Solución final: $(0,\infty)-\{1\}$

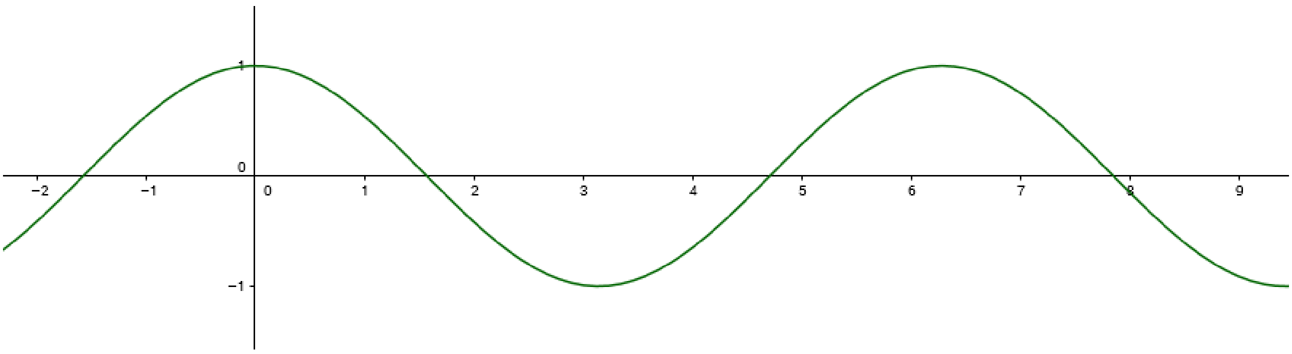
■ *Continuidad 3* ♣♣

Obtener el dominio de $f(x)=\ln(\cos(x))$ **en el intervalo** $[0,2\pi]$ **.**

La **función logaritmo** está correctamente definida siempre que su **argumento sea positivo**. Por lo que planteamos la siguiente desigualdad estrica (que no incluye al signo igual).

$$\cos(x)>0$$

Recordando la gráfica de la función coseno es muy fácil determinar los intervalos donde la función es positiva dentro de $[0,2\pi]$.



Viendo la gráfica concluimos:

$$Dom(f)=[0,\pi/2)\cup(3\pi/2,2\pi]$$

¿Qué gráfica de funciones elementales es bueno tener siempre en mente? **Logaritmo, exponencial, seno, coseno, tangente, rectas crecientes/decrecientes, parábolas cóncavas/convexas, raíz cuadrada y** x^3 .

Recordando que si a una función le sumamos una cantidad $k>0$ lo que hacemos es desplazar su gráfica k unidades hacia arriba. SI le restamos una cantidad $k>0$ lo que hacemos es desplazar su gráfica k unidades hacia abajo.

De la misma forma $f(x-k)$ desplaza la gráfica $f(x)$ un total de k unidades hacia la derecha.Y $f(x+k)$ desplaza la gráfica $f(x)$ un total de k unidades hacia la izquierda.

■ *Continuidad 4* ♣♣

Estudia la continuidad y discontinuidad de $f(x)=\begin{cases} \dfrac{sen(x)}{x} & si \ \ -3<x<0 \\ x^2+1 & si \ \ 0\le x\le 1 \\ \dfrac{e^{(x-1)}-1}{x^2-1} & si \ \ 1<x\le 5 \end{cases}$ **en su dominio.**

Estudiamos la continuidad primero en los **intervalos abiertos de cada trozo de la función**, y luego en los **puntos frontera que separan cada intervalo**.

$si \ \ -3<x<0 \ \rightarrow \ f(x)=\dfrac{sen(x)}{x}$ → cociente de funciones continuas en toda la recta real. El denominador se anula en $x=0$, que no pertenece al intervalo $-3<x<0$, por lo que $f(x)$ es continua.

$si \ \ -0\le x\le 1 \ \rightarrow \ f(x)=x^2+1$ → función continua por ser polinómica.

$si \ \ 1<x\le 5 \ \rightarrow \ \dfrac{e^{(x-1)}-1}{x^2-1}$ → cociente de funciones continuas en toda la recta real. El denominador se anula en $x=\pm 1$, que no pertenece al intervalo $1<x<5$, por lo que $f(x)$ es continua.

Estudiamos los puntos frontera. **Una función es continua en un punto si está definida la función en ese punto, si coinciden los límites laterales y si el valor del límite es igual a la imagen del punto en la función**.

El punto $x=-3$ no lo estudiamos porque la función no está definida en ese punto.

$x=0$

$f(0)=1$

$L^-=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{sen(x)}{x}=\dfrac{0}{0}\equiv indeterminación$ → L'Hôpital (recuerda enunciar siempre la regla, con sus condiciones, antes de aplicarla) → $L^-=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{\cos(x)}{1}=1$

$L^+=\lim_{x\to 0^+}(x^2+1)=1$

$L^-=L^+=1 \ \rightarrow \ L=1$

$f(0)=L \ \rightarrow \ 1=1 \ \rightarrow \ f(x)$ es continua en $x=0$

$x=1$

$f(1)=2$

$L^{-}=\lim_{x\to 1^{-}}(x^2+1)=2$

$L^{+}=\lim_{x\to 1^{+}}\frac{e^{(x-1)}-1}{x^2-1}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}\equiv indeterminación$ → L'Hôpital → $L^{+}=\lim_{x\to 1^{+}}\frac{e^{(x-1)}}{2x}=\frac{1}{2}$

$L^{-}\neq L^{+}$ → $2\neq\frac{1}{2}$ → Al no coincidir los límites laterales $f(x)$ no es continua en $x=1$ → discontinuidad no evitable de primera especie de salto finito. El valor del salto resulta $\left|2-\frac{1}{2}\right|=\frac{3}{2}$

$x=5$

$f(5)=\frac{e^4-1}{24}$

$L^{-}=\lim_{x\to 5^{-}}\frac{e^{(x-1)}-1}{x^2-1}=\frac{e^4-1}{24}$ → La función no está definida a la derecha de $x=5$, por lo que no tiene sentido preguntarnos por el límite derecho L^{+} → En este caso el límite de la función en $x=5$ coincide con el valor del límite izquierdo → $L^{-}=L=\frac{e^4-1}{24}$

$f(5)=L$ → $\frac{e^4-1}{24}=\frac{e^4-1}{24}$ → $f(x)$ es continua en $x=5$

Llegados a este punto, como me sobra un espacio en blanco la mar de mono, voy a poner **un chistecillo para amenizar** la lectura y comprensión de estos gloriosos ejercicios.

Esto es un gato y un gallo que tienen un golpe con sus coches. Y dice el gato:

“¡Miauto, miauto, miauto!”

A lo que responde el gallo:

“¡Ki ki ki kiere ke le haga!”.

■ *Continuidad 5* ♣♣

Obtener valor de m **para que la función** $f(x)=\begin{cases} \dfrac{\ln(1+mx)}{sen(2x)} & si \quad x\neq 0 \\ 3 \quad si \quad x=0 \end{cases}$ **sea continua en** $x=0$ **.**

$\exists f(0)=3$

$L^{-}=L^{+}=L$

$L^{-}=\lim_{x\to 0^{-}} \dfrac{\ln(1+mx)}{sen(2x)}=\dfrac{0}{0}$ → indeterminación → L'Hôpital → $L^{-}=\lim_{x\to 0^{-}} \dfrac{\dfrac{m}{1+mx}}{\cos(2x)2}=\dfrac{m}{2}$

$L^{+}=L^{-}=\dfrac{m}{2}$ → Los límites coinciden porque se aplican a la misma función, definida si $x\neq 0$

$f(0)=L \quad \to \quad \dfrac{m}{2}=3 \quad \to \quad m=6$

■ *Continuidad 6* ♣♣

Obtener a **y** b **para que la función** $f(x)=\left\{\begin{matrix} \dfrac{a x^2+b x+1-e^{2x}}{sen(x^2)} & si \quad x\neq 0 \\ 1 \quad si \quad x=0 \end{matrix}\right\}$ **sea continua en** $x=0$ **.**

$\exists f(0)=1$

$L^{-}=L^{+}=L$

$L^{-}=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{a x^2+b x+1-e^{2x}}{sen(x^2)}=\dfrac{0}{0}$ → indeterminación → L'Hôpital → $L^{-}=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{2 a x+b-e^{2x}2}{\cos(x^2)2x}=\dfrac{b-2}{0}$

Si el numerador no se anula, el cociente iría a infinito y la función no sería continua en el punto frontera. Por lo tanto, imponemos la condición $b-2=0 \quad \to \quad b=2$

$L^{-}=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{2 a x+2-e^{2x}2}{\cos(x^2)2x}=\dfrac{0}{0}$ → indeterminación → L'Hôpital →

$L^{-}=\lim_{x\to 0^-}\dfrac{2a-e^{2x}4}{-sen(x^2)2x\,2x+\cos(x^2)2}=\dfrac{2a-4}{2}=a-2$

$L^{+}=L^{-}=a-2$ → Los límites coinciden porque se aplican a la misma función, definida si $x\neq 0$

$f(0)=L \quad \to \quad a-2=1 \quad \to \quad a=3$

■ *Continuidad 7* ♣♣

Haz un esbozo de la gráfica de la función $f(x)=\begin{Bmatrix} \frac{x+1}{x} & si \quad x<0 \\ 2x^3-15x^2+36x+3 & si \quad x\geq 0 \end{Bmatrix}$ **en un entorno alrededor de** $x=0$ **.**

Solo nos piden centrarnos en un intervalo cercano a $x=0$. Estudiamos la continuidad del punto frontera.

$$\exists f(0)=3$$

$$L^{-}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x+1}{x}=\frac{1}{0^-}=-\infty$$ → A.V. a la izquierda de $x=0$

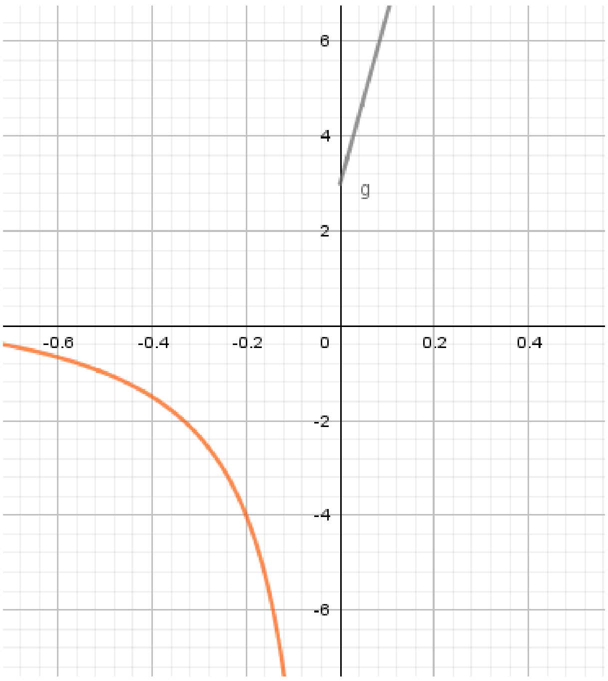
$$L^{+}=\lim_{x\to 0^-}(2x^3-15x^2+36x+3)=3$$

Encontamos una discontinuidad no evitable de primera especie de salto infinito.

A la izquierda de $x=0$ sabemos que la función se dispara hacia menos infinito. Para completar el esbozo, solo nos falta determinar si la función crece o decrece a la derecha de $x=0$.

Si $x>0$ → $f'(x)=6x^2-30x+36$, $f'(x)=0$ → $x=2$, $x=3$ son puntos críticos.

Condición suficiente → $f''(x)=12x-30$ → $f''(2)<0$ → $x=2$ es máximo relativo, por lo que la función crece a la derecha de $x=0$.



Ejercicios de derivabilidad, interpretación geométrica de la derivada y condiciones de contorno

■ *Derivadas 1* ♣♣

Estudia la derivabilidad de $f(x)=\left\{\begin{matrix} \sqrt{x} & si & 0\leq x\leq 1 \\ x^2 & si & x>1 \end{matrix}\right\}$ **en** $x_0=1$ **usando la definición formal de derivada.**

Para que **una función sea derivable en un punto debe ser continua en ese punto y coincidir las derivadas laterales en ese punto**.

Además, al derivar, el problema nos pide usar la definición formal de derivada $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ y no usar directamente las reglas de las tablas de derivación.

Comenzamos estudiando la continuidad en $x_0=1$. No estudio la continuidad en los intervalos abiertos donde la función está definida, ya que no me lo pide el enunciado.

Una función es continua en un punto si se cumplen las siguientes tres condiciones:

1. Debe existir imagen de x_0 $\rightarrow$ $f(x_0)$ $\rightarrow$ $f(1)=\sqrt{1}=1$

2. Deben coincidir los límites laterales en x_0 . Es decir:

$$L^-=\lim_{x\to x_0^-} f(x) \rightarrow L^-=\lim_{x\to 1^-}\sqrt{x}=1$$

$$L^+=\lim_{x\to x_0^+} f(x) \rightarrow L^+=\lim_{x\to 1^+}(x^2)=1$$

$L^-=L^+=1 \rightarrow L=1$ → El límite vale 1

3. Deben coincidir la imagen del punto y el límite → $f(x_0)=L \rightarrow 1=1$

Por lo tanto, la función es continua en $x_0=1$.

Continuamos calculando la derivada de la función, pero a partir de la definición formal de derivada.

$$\frac{d[\sqrt{x}]}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{d[x^2]}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+h^2+2hx-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2hx}{h}=\lim_{h\to 0} h+2x=2x$$

Ya podemos escribir la función derivada de la función a trozos de partida (recuerda **dejar los intervalos abiertos, sin el signo igual, ya que aún no hemos demostrado que sea derivable en el punto frontera que separa los intervalos**).

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & si \quad 0<x<1 \\ 2x & si \quad x>1 \end{cases}$$

Estudiamos las derivadas laterales a izquierda y derecha de $x_0=1$. Recuerda que **una derivada lateral es hacer el límite correspondiente a la función derivada**. Es decir.

$$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2} \quad , \quad f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+}2x=2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}\neq 2$$

Las derivadas laterales no coinciden. La función no es derivable en $x_0=1$.

Insisto una vez más. Al obtener las derivadas laterales tenemos que hacer un límite. Si al evaluar obtenemos un valor finito o infinito, ya tenemos el valor del límite lateral. Y si aparece una indeterminación, aplicamos las reglas conocidas de resolución de indeterminaciones.

■ *Derivadas 2* ♣

Obtener la recta tangente y normal a $f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{1}{x+1}$ **en** $x=0$ **.**

La **interpretación geométrica de la derivada** afirma que la derivada de la función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

Y con la pendiente m y un punto de la recta (x_0,y_0) , podemos obtener la recta tangente a la función en ese punto.

Primero derivamos.

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x+1+1}{(x+1)^2}=\frac{x+2}{(x+1)^2} \rightarrow f'(0)=2 \rightarrow m=2$$

En segundo lugar obtenemos la imagen en la función del valor $x=0 \rightarrow f(0)=-1$

$$(x_0,y_0)=(0,-1)$$

Recuerda, **la pendiente se obtiene evaluando en la derivada** y **la imagen evaluando en la función de partida**. No te líes.

Podemos usar la ecuación punto-pendiente de la recta.

$$m=\frac{y-y_0}{x-x_0} \rightarrow 2=\frac{y+1}{x-0} \rightarrow y=2x-1$$

También podemos llegar al mismo resultado usando directamente la ecuación explícita de la recta.

$$y=mx+n \rightarrow y=2x+n \rightarrow -1=2\cdot 0+n \rightarrow -1=n \rightarrow y=2x-1$$

Esta es la recta tangente a la función en $x=0$.

¿Qué relación hay entre la recta tangente y la recta normal? Ambas son perpendiculas. Y el producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares es igual a -1 .

$$m_t\cdot m_n=-1 \rightarrow 2\cdot m_n=-1 \rightarrow m_n=\frac{-1}{2}$$

Con la pendiente de la recta normal y el punto ya conocido $(x_0,y_0)=(0,-1)$ podemos obtener la ecuación de la recta normal.

$$m_n=\frac{y-y_0}{x-x_0} \quad \rightarrow \quad \frac{-1}{2}=\frac{y+1}{x-0} \quad \rightarrow \quad y=\frac{-1}{2}x-1$$

■ *Derivadas 3* ♣♣

Obtener la recta tangente a $f(x)=arcotg(x)$ **paralela a la recta que pasa por los puntos** $A(1,3)$ **y** $B(-2,0)$ **.**

Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente m . Por lo que debemos obtener la pendiente de la recta que pasa por los dos puntos dados.

Esa recta viene dada por la expresión:

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{x-x_1} \rightarrow \frac{0-3}{-2-1}=\frac{y-3}{x-1} \rightarrow 1=\frac{y-3}{x-1} \rightarrow m=1$$

Según la interpretación geométrica de la derivada, debemos obtener el punto de la función cuya derivada coincida con el valor de la pendiente $m=1$.

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2} \rightarrow \frac{1}{1+x^2}=1 \rightarrow 1=1+x^2 \rightarrow x=0$$

Calculamos la imagen del punto $x=0 \rightarrow f(0)=arcotg(0)=0 \rightarrow (x_0, y_0)=(0,0)$

Y con la pendiente y un punto, podemos escribir la ecuación de la recta tangente a la función en ese punto.

$$m=\frac{y-y_0}{x-x_0} \rightarrow 1=\frac{y}{x} \rightarrow y=x$$

■ *Derivadas 4* ♣♣

Obtener a **y** b **para que** $f(x)=\begin{cases} a\cdot\cos(x)+2x & si \quad x\leq 0 \\ a^2\cdot\ln(x+1)+\dfrac{b}{x+1} & si \quad x>0 \end{cases}$ **sea derivable en** $x=0$ **.**

En estos problemas de determinar dos parámetros en una función definida en dos trozos, **suele aparecer una condición al estudiar la continuidad y otra condición a estudiar la derivabilidad**. Con esas condiciones, podremos formar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que resolveremos.

Primero estudiamos la continuidad en $x=0$.

$$f(0)=a\cdot\cos(0)+2\cdot 0=a$$

$$L^-=\lim_{x\to 0^-}(a\cdot\cos(x)+2x)=a \quad , \quad L^+=\lim_{x\to 0^+}(a^2\cdot\ln(x+1)+\frac{b}{x+1})=b \;\rightarrow\; L^-=L^+ \;\rightarrow\; a=b$$

$f(0)=L \;\rightarrow\; a=b \;\rightarrow\; f(x)$ es continua en $x=0$ siempre que se cumpla $a=b$

Derivamos la función a trozos. Recuerda quitar el signo igual en el punto frontera, ya que eso es precisamente lo que queremos demostrar ahora: saber si es derivable en el punto frontera $x=0$.

$$f'(x)=\begin{cases} -a\cdot sen(x)+2 & si \quad x<0 \\ \dfrac{a^2}{x+1}-\dfrac{b}{(x+1)^2} & si \quad x>0 \end{cases}$$

La función será derivable en $x=0$ si coinciden las derivadas laterales.

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}(-a\cdot sen(x)+2)=2 \quad , \quad f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}(\frac{a^2}{x+1}-\frac{b}{(x+1)^2})=a^2-b \;\rightarrow\; 2=a^2-b$$

$f(x)$ es derivable en $x=0$ si se cumple la condición $2=a^2-b$

Llegamos al siguiente sistema.

$\begin{cases} a=b \\ a^2-b=2 \end{cases}$ → Sustituimos la primera ecuación en la segunda → $a^2-a-2=0$

Resolvemos → $a=-1$, $a=2$ → Las soluciones que garantizan la derivabilidad en $x=0$ son: $a=-1$, $b=-1$ y $a=2$, $b=2$

■ *Derivadas 5* ♣♣♣

Demuestra que la función $f(x)=x-\sqrt{x}$ **tiene una única solución para** $x>\frac{1}{4}$ **.**

En primer lugar demostremos, por el **Teorema de Bolzano**, que la función $f(x)=x-\sqrt{x}$ tiene al menos una solución real para $x>\frac{1}{4}$. Para ello buscamos un intervalo cerrado donde la función sea continua y cambie de signo al ser evaluada en los extremos del intervalo.

$$Si \quad f(x) \quad continua \quad en \quad [a,b] \quad y \quad f(a)\cdot f(b)<0 \quad \rightarrow \quad \exists c\in(a,b)/f(c)=0$$

El dominio de la función son todos los números reales positivos más el 0 , por lo que podemos considerar el siguiente intervalo:

$$[\frac{1}{4},10] \quad \rightarrow \quad f(\frac{1}{4})<0 \quad , \quad f(10)>0 \quad \rightarrow \quad \exists c\in(\frac{1}{4},10)/f(c)=0$$

Una vez demostrada la existencia de al menos una solución real para $x>\frac{1}{4}$, demostremos que es única por reducción al absurdo y aplicando el **Teorema de Rolle**.

Nuestra hipótesis de partida es que existen dos soluciones $x=c_1>\frac{1}{4}$, $x=c_2>\frac{1}{4}$ tal que $f(c_1)=f(c_2)=0$. Como la función es continua en $\mathbb{R}^+ +\{0\}$, será continua en $[c_1,c_2]$ por ser positivos ambos extremos del intervalo. Además nuestra función es derivable en el intervalo $(0,+\infty)$, por lo que también es derivable en (c_1,c_2) . Así estamos en condiciones de aplicar el Teorema de Rolle.

$$Si \quad f(x) \quad continua \quad en \quad [c_1,c_2] \quad ,derivable \quad en \quad (c_1,c_2) \quad y \quad f(c_1)=f(c_2) \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad \exists \varphi\in(c_1,c_2)/f'(\varphi)=0$$

Derivamos la función e igualamos a cero.

$$f(x)=x-\sqrt{x} \quad \rightarrow \quad f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}} \quad , \quad f'(\varphi)=0 \quad \rightarrow \quad \varphi=\frac{1}{4}$$

Y llegamos a un absurdo, ya que hemos supuesto que c_1 y c_2 son mayores que $\frac{1}{4}$, por lo que nuestra hipótesis de partida es falsa. Solo existe una única solución para $x>\frac{1}{4}$.

■ *Derivadas 6* ♣♣

Sea $f(x)=a+bx+cx^2$ **, cuya gráfica pasa por** $P(0,1)$ **y** $Q(2,0)$ **. La recta tangente a la función en el punto** P **es paralela al eje OX. Calcula** a,b,c **.**

$f(0)=1 \;\rightarrow\; a=1$

$f(2)=0 \;\rightarrow\; 1+2b+4c=0$

$f'(0)=0 \;\rightarrow\; f'(x)=b+2cx \;\rightarrow\; b=0 \;\rightarrow\; c=\frac{-1}{4}$

■ *Derivadas 7* ♣

Calcular la recta tangente a $f(x)=4e^{x-1}$ **en el punto** $(1, f(1))$

$f'(x)=4e^{x-1}$ → $f'(1)=4$ → pendiente $m=4$

Imagen → $f(1)=4$ → recta tangente → $4=\dfrac{y-4}{x-1}$ → $y=4x$

■ *Derivadas 8* ♣♣

Sea $f(x)=\left\{\begin{array}{l} \frac{x^2}{6}-\frac{3}{2} \quad si \quad x<3 \\ \ln(x-2)x \quad si \quad x\geq 3 \end{array}\right\}$ **. Calcular los puntos de la gráfica en que la función es paralela a la recta** $x+3y=0$ **.**

$$f'(x)=\left\{\begin{array}{l} \frac{x}{3} \quad si \quad x<3 \\ \frac{1}{x-2} \quad si \quad x\geq 3 \end{array}\right\}$$

La función es derivable en el primer tramo por ser polinómica, y en el segundo tramo porque el denominador de la función derivada no se anula en el intervalo $[3,\infty)$.

Además, la función es derivable en $x=3$ por coincidir las derivadas laterales: $f'(3^-)=f'(3^-)=1$

La recta tiene pendiente igual a $\frac{-1}{3}$. Recordamos que la pendiente de la recta tangente coincide con el valor de la derivada en el puntos (interpretación geométrica de la derivada). Y dos rectas paralelas tienen la misma pendiente. Por lo tanto:

$\frac{x}{3}=\frac{-1}{3} \rightarrow x=-1 \rightarrow \left(-1,-\frac{4}{3}\right)$ para $x<3$

$\frac{1}{x-2}=\frac{-1}{3} \rightarrow x=-1\notin[3,\infty)$

■ *Derivadas 9* ♣

Sea $P(x)$ un polinomio de grado tres, con extremo relativo en $(1,1)$ y punto de inflexión en $(0,5)$. Determinar el polinomio.

$P(x)=a x^3+b x^2+c x+d$, $P'(x)=3 a x^2+2 b x+c$, $P''(x)=6 a x+2 b$

$P(1)=1 \rightarrow a+b+c+d=1$

$P(0)=5 \rightarrow d=5$

$P'(1)=0 \rightarrow 3a+2b+c=0$

$P''(0)=0 \rightarrow b=0$

Sustituyendo y resolviendo el sistema → $a=2$, $c=-6$

■ *Derivadas 10* ♣♣

Dadas las funciones $f(x)=x^2-ax-4$ y $g(x)=\frac{x^2}{2}+b$, halla los valores de a y b de manera que las gráficas de $f(x)$ y $g(x)$ tengan la misma recta tangente en el punto $x=3$. Halla la ecuación de la recta.

Si dos funciones comparten la misma recta tangente en $x=3$, significa que la derivada de las funciones evaluadas en $x=3$ coinciden → $f'(3)=g'(3)$ → Recordamos que la derivada evaluada en punto coincide con la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

$f'(x)=2x-a$, $g'(x)=x$ → $f'(3)=g'(3)$ → $6-a=3$ → $a=3$

También hemos obtenido que la pendiente es $m=f'(3)=g'(3)=3$

Además, las dos funciones deben cortarse en el punto $x=3$, ya que comparten la misma recta tangente en ese punto → $f(3)=g(3)$ → $9-a\cdot 3-4=\frac{9}{2}+b$ → Como $a=3$ → $b=\frac{-17}{2}$

Solo falta obtener la recta tangente. Tenemos el punto $x=3$ y la pendiente $m=3$. Solo nos falta la imagen del punto para poder aplicar la ecuación punto-pendiente de la recta. La imagen del punto lo podemos sacar de cualquier función, ya que en $x=3$ coinciden la recta tangente y las dos funciones.

$f(3)=9-9-4=-4$

Y la recta será → $m=\frac{y-f(x_0)}{x-x_0}$ → $3=\frac{y+4}{x-3}$ → $y=3x-13$

■ *Derivadas 11* ♣♣

Halla los coeficientes a, b y c sabiendo que la función $f(x): \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^3 + a x^2 + b x + c$ tiene en $x = 1$ un punto de derivada nula que no es extremo relativo y que la gráfica pasa por el punto $(1,1)$.

Necesitamos calcular tres parámetros, por lo que debemos buscar tres condiciones.

La primera: la función tiene derivada nula en $x = 1 \rightarrow f'(1) = 0 \rightarrow f'(x) = 3x^2 + 2ax + b \rightarrow$ $3 + 2a + b = 0$

La segunda: si en $x = 1$ no hay extremo relativo, significa que la segunda derivada en ese punto no es ni positiva (mínimo) ni negativa (máximo). Por lo tanto, la segunda derivada es nula (condición necesaria de punto de inflexión) → $f''(1) = 0 \rightarrow f''(x) = 6x + 2a \rightarrow 6 + 2a = 0 \rightarrow a = -3$

La tercera: si la función pasa por el punto $(1,1) \rightarrow f(1) = 1 \rightarrow 1 + a + b + c = 1 \rightarrow b + c = 3$

Si $a = -3$ de la primera condición podemos deducir → $3 - 6 + b = 0 \rightarrow b = 3$

Y si $b = 3$ de la tercera condición resulta → $3 + c = 3 \rightarrow c = 0$

La función solución resulta $f(x) = x^3 - 3x^2 + 3x$

■ *Derivadas 12 ♣♣*

Sea la función $f(x)=\frac{x}{e^x}$ definida en toda la recta real. Determina el punto de la gráfica en el que la pendiente de la recta tangente es mínima (ayuda: recuerda la relación que hay entre pendiente y derivada a través de la interpretación geométrica de la derivada).

La pendiente de la recta tangente coincide con el valor de la derivada. Por lo tanto, si me preguntan cuando la pendiente es mínima es lo mismo que calcular cuándo la función derivada es mínima.

¿Y qué significa minimizar una función? Derivarla e igualarla a cero, ¿verdad?

¿Y si debo minimizar la función derivada? Pues derivo la función derivada e igualo a cero. Es decir, hacemos la segunda derivada igual a cero. Moraleja: minimizar o maximizar la pendiente de la recta tangente, es aplicar la condición necesaria de punto de inflexión.

$f(x)=\frac{x}{e^x} \rightarrow f'(x)=\frac{e^x-xe^x}{(e^x)^2}=\frac{1-x}{e^x}$ → Para evitar liarnos con tantas primas ' de la derivada, vamos a llamar a la primera derivada $f'(x)=g(x)=\frac{1-x}{e^x}$ → Y ahora simplemente obtenemos el mínimo relativo de $g(x)$. Un problema que hemos resuelto miles de veces.

$g'(x)=0 \rightarrow g'(x)=\frac{-e^x-(1-x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{-1-(1-x)}{e^x}=\frac{-2+x}{e^x} \rightarrow -2+x=0 \rightarrow x=2 \rightarrow$ punto crítico de la función $g(x)$.

Aplicamos la condición suficiente de la segunda derivada para ver si es un mínimo relativo.

$g''(x)=\frac{e^x-(-2+x)e^x}{(e^x)^2}=\frac{1-(-2+x)}{e^x}=\frac{3-x}{e^x} \rightarrow g''(2)=\frac{3-2}{e^2}>0 \rightarrow x=2$ es un mínimo relativo.

Obtenemos su imagen en la función de partida → $f(2)=\frac{2}{e^2} \rightarrow (2,\frac{2}{e^2})$ minimiza la pendiente de la recta tangente a la función.

■ *Derivadas 13* ♣♣

Obtener el valor de x **de la función** $f(x)=\ln(\sqrt{x}-1)$ **donde la pendiente de la recta tangente a** $f(x)$ **sea igual a** 2 **. Obtener también el valor de la ordenada para** x **.**

La pendiente de la recta tangente a una función en un punto coincide con el valor de la derivada a la función en ese punto. Es lo que se conoce como interpretación geométrica de la derivada.

$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-1}$ → igualamos la derivada a 2 → $f'(x)=2$ → $\dfrac{\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\sqrt{x}-1}=2$

$\dfrac{1}{2x-2\sqrt{x}}=2$ → $1=4x-4\sqrt{x}$ → $1-4x=-4\sqrt{x}$ → elevamos al cuadrado → $1+16x^2-8x=16x$

$16x^2-24x+1=0$ → resolvemos → $x=\dfrac{24\pm\sqrt{576-64}}{32}=\dfrac{24\pm16\sqrt{2}}{32}$ → $x_1=0{,}04$, $x_2=1{,}46$

No olvides que, en ecuaciones con raíces donde se eleva al cuadrado, hay que comprobar que las soluciones no hacen negativo al discriminante e la raíz. En este caso, dos valores obtenidos hacen positivo el discriminante de $\sqrt{x}$.

Falta obtener sus imágenes:

$x_1=0{,}04$ → $f(0{,}04)=\ln(\sqrt{0{,}04}-1)=\nexists$ → El valor $x_1=0{,}04$ no pertenece al dominio de la función

$x_2=1{,}46$ → $f(1{,}46)=\ln(\sqrt{1{,}46}-1)=-1{,}57$ → Punto solución: $(1{,}46\,,-1{,}57)$

■ *Derivadas 14* ♣♣

Determina $k\neq 0$ **sabiendo que la función** $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **definida por** $f(x)=\begin{Bmatrix} 3-kx^2 & si & x\leq 1 \\ \dfrac{2}{kx} & si & x>1 \end{Bmatrix}$ **es derivable.**

Una función es derivable en un punto si se cumplen las siguientes dos condiciones:
- Continuidad de la función en el punto.
- Igualdad de las derivadas laterales en el punto.

Para que una función sea continua en un punto, a su vez, se cumplen tres condiciones:

1. $\exists f(1)=3-k$
2. $L^{-}=\lim_{x\to 1^{-}}(3-kx^2)=3-k$

   $L^{+}=\lim_{x\to 1^{+}}\dfrac{2}{k}x=\dfrac{2}{k}$

Igualdad de límites laterales → $L^{-}=L^{+}=L \;\rightarrow\; 3-k=\dfrac{2}{k} \;\rightarrow\; -k^2+3k-2=0 \;\rightarrow\; k=1, k=2$

3. $f(1)=L$ → Llegamos a la misma condición $-k^2+3k-2=0$

Derivamos la función en cada tramo, sin incluir el signo igual en el punto frontera ya que eso es lo que queremos demostrar.

$$f'(x)=\begin{Bmatrix} -2kx & si & x<1 \\ \dfrac{-2}{kx^2} & si & x>1 \end{Bmatrix}$$

E igualamos las derivadas laterales.

$$f'(1^{-})=-2k \quad , \quad f'(1^{+})=\frac{-2}{k} \;\rightarrow\; -2k=\frac{-2}{k} \;\rightarrow\; k^2=1 \;\rightarrow\; k=-1, k=1$$

Solo el valor $k=1$ garantiza ambas condiciones, por lo que la función es derivable en $x=1$ solo si $k=1$.

■ *Derivadas 15* ♣♣

Halla los valores $a, b \ y \ c$ **sabiendo que la gráfica de la función** $f(x)=\frac{a x^2+b}{x+c}$ **tiene una asíntota vertical en** $x=1$ **, una asíntota oblicua de pendiente** 2 **, y un extremo local en el punto de abscisa** $x=3$

Si existe A.V. en $x=1$ el denominador debe anularse en ese valor → $1+c=0 \ \rightarrow \ c=-1$

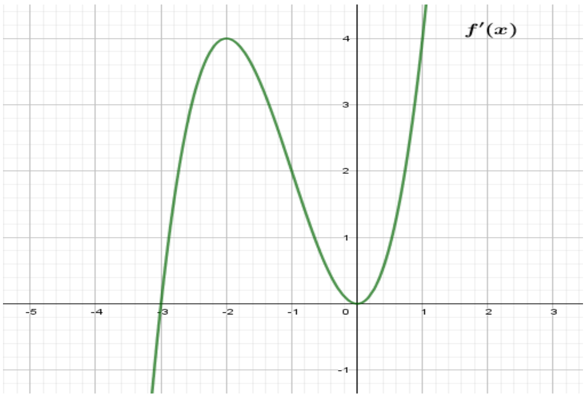
Si hay A.O. con pendiente igual a 2, por la definición → $2=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{a x^2+b}{x^2+x}=\frac{\infty}{\infty}$ → indeterminación → Dividimos todo por la máxima potencia → $2=\frac{a}{1} \ \rightarrow \ a=2$

Si existe extremo relativo en $x=3 \ \rightarrow \ f'(3)=0 \ \rightarrow \ f'(x)=\frac{4x(x-1)-(2x^2+b)}{(x-1)^2}$ →

$$f'(x)=\frac{4x^2-4x-2x^2-b}{(x-1)^2}=\frac{2x^2-4x-b}{(x-1)^2} \ \rightarrow \ f'(3)=\frac{6-b}{4}=0 \ \rightarrow \ b=6$$

■ *Derivadas 16 ♣♣*

A partir de la gráfica (ver imagen) de la función derivada $f'(x)$ obtener los intervalos de crecimiento, los extremos relativos y los puntos de inflexión de la función original $f(x)$.



$(-\infty,-3)$ → la función es estrictamente decreciente porque a derivada es negativa.

$(-3,0)$ → la función es estrictamente ceciente porque la derivada es positiva.

$(0,+\infty)$ → la función es estrictamente creciente porque la derivada es positiva.

$x=-3$ → mínimo relativo porque la derivada se anula en ese valor, y a la izquierda es negativa y a la derecha positiva.

$x=-2$ → punto de inflexión, por ser extremo relativo de la función derivada (y cumplirse así $f''(x)=0$) y por no cambiar de signo la derivada a su izquierda ni a su derecha.

$x=0$ → punto de inflexión, por ser extremo relativo de la función derivada (y cumplirse así $f''(x)=0$) y por no cambiar de signo la derivada a su izquierda ni a su derecha. Es un ejemplo de punto crítico que no es extremo relativo.

Y aquí tengo otro huequecillo para un **chiste**.

Estos son dos tomates que cruzan la carretera. Y de pronto dice uno al otro:

“¡Cuidado con el camión, sshhooff!”

Y responde el otro tomate:

“¿Qué?, ¡sshhooff!”

■ *Derivadas 17* ♣

Sea $f(x)=-x^2+a^2$ **. Obtener la ecuación explícita de recta tangente a la función en** $x=-a$ **.**

La pendiente de la recta tangente a la función en un punto coincide con el valor de la derivada evaluada en ese punto.

$$f'(x)=-2x \;\;\rightarrow\;\; m=f'(-a)=2a$$

Usamos la ecuación pendiente de la recta, para lo cual necesitamos la imagen de la función en el punto $x=-a$.

$$f(-a)=-a^2+a^2=0$$

$$m=\frac{y-f(-a)}{x-(-a)} \;\;\rightarrow\;\; 2a=\frac{y-0}{x+a} \;\;\rightarrow\;\; y=2ax+2a^2$$

■ *Derivadas 18* ♣♣

Considere las curvas $f(x)=3-x^2$ **y** $g(x)=\frac{-x^2}{4}$ **. Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de** $f(x)$ **en el punto de abscisa** $x=1$ **y comprueba que también es tangente a la gráfica de** $g(x)$ **. Determina el punto de tangencia con la gráfica de** $g(x)$ **.**

Obtenemos la recta tangente a $f(x)=3-x^2$ en $x=1$.

$$f'(x)=-2x \rightarrow f'(1)=-2$$

$$f(1)=3-1=2$$

$$-2=\frac{y-2}{x-1} \rightarrow y=-2x+4$$

Esta recta será tangente a la función $g(x)=\frac{-x^2}{4}$ si en el punto de tangencia, coincide la pendiente de la recta con la derivada de la función en ese punto. Para ello, primero calculamos el punto de tangencia igualando la recta a la función $g(x)$.

$$y=g(x) \rightarrow -\frac{x^2}{4}=-2x+4 \rightarrow -x^2+8x-16=0 \rightarrow x=4$$

El punto de tangencia resulta $(4,g(4))=(4,4)$

Nos falta comprobar que en $x=4$ el valor de la derivada de $g(x)=\frac{-x^2}{4}$ coincide con al pendiente de la recta tangente $y=-2x+4$ .Es decir, debemos comprobar si $g'(4)=-2$.

$$g'(x)=\frac{-2x}{4}=\frac{-x}{2} \rightarrow g'(4)=-2$$

■ *Derivadas 19* ♣♣

Obtener los puntos de la función $f(x)=x^2+2x+4$ cuya recta tangente a la función pase por el $(0,0)$.

El haz de rectas es el conjunto de infinitas rectas que pasan por un punto. En nuestro caso:

$$m=\frac{y-0}{x-0} \quad \rightarrow \quad y=mx$$

La incógnita es la pendiente. Debemos obtener esa pendiente sabiendo que la recta debe ser tangente a la función. Por lo tanto, la tangente debe coincidir con la derivada de la función.

$$f'(x)=2x+2 \quad \rightarrow \quad m=2x+2$$

Sustituimos este valor de la pendiente en la ecuación de la recta:

$$y=(2x+2)x$$

Además, en el punto de tangencia, la recta y la función coinciden. Por lo que sus imágenes en ese punto deben ser iguales. Por lo tanto, sustituimos la imagen de la recta y por la imagen de la función $f(x)$.

$$x^2+2x+4=(2x+2)x$$

Resolvemos.

$$x^2+2x+4=2x^2+2x \rightarrow -x^2+4=0 \rightarrow x=\pm 2$$

Tenemos dos puntos que cumplen la condición. Obtenemos sus imágenes.

$$x=2 \rightarrow f(2)=12 \rightarrow (2,12)$$

$$x=-2 \rightarrow f(-2)=4 \rightarrow (-2,4)$$

Ejercicios de optimización

■ *Optimización 1* ♣♣

Obtener las dimensiones del rectángulo inscrito en la circunferencia de radio unidad y centrada en el origen de coordenadas, con mayor área posible. Obtener el valor de dicha área máxima.

Para resolver los problemas de optimización puede ser útil seguir el **siguiente esquema de trabajo**:

1. Hacer un dibujo ilustrativo (si es posible).

2. Indicar claramente cuál es la magnitud que debemos optimizar (perímetro, área, volumen, distancia, coste económico, tiempo, etc.). Para este tipo de problemas es bueno tener claro las fórmulas del perímetro, área y volumen de las siguientes figuras geométricas: **triángulo, rectángulo, círcunferencia, círculo, esfera, cilindro, cono y paralelepípedo**.

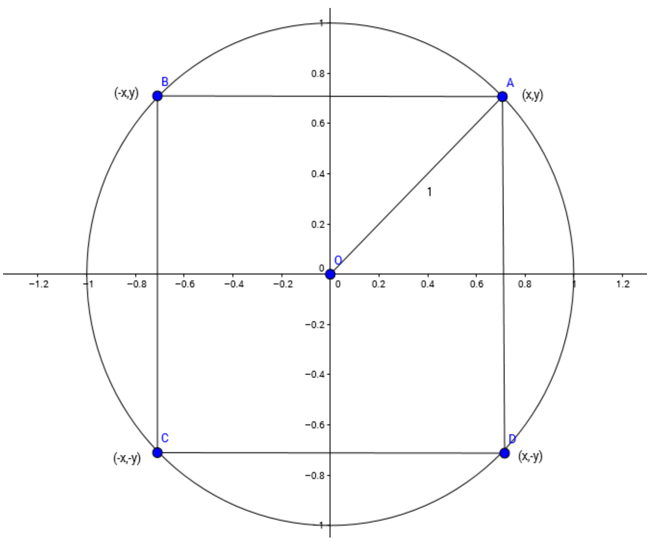
3. Escribir la ecuación de la función a optimizar. Si esta función depende de varias variables, usar los datos del enunciado para dejar la función dependiente de una única variable.

4. Imponer la condición necesaria de extremo relativo: primera derivada igual a cero. Los puntos que cumplan esa igualdad serán los puntos críticos, candidatos a extremos relativos.

5. Demostrar si estamos ante un máximo o mínimo relativo. Tenemos dos formas de demostrarlo. Evaluando el signo de la primera derivada a ambos lados del punto crítico (y comprobando que cambia de signo), o bien evaluando el punto crítico en la segunda derivada (si la segunda derivada es positiva, estaremos ante un mínimo; si la segunda derivada es negativa, estaremos ante un máximo). En el primer método, al evaluar a ambos lados de los puntos críticos, debemos estar atentos a los puntos donde la función a optimizar no está definida.

6. Si el enunciado nos pide obtener la imagen del punto crítico, debemos obtener el valor del punto crítico en la función de partida.

En nuestro problema podemos representar la siguiente gráfica. El rectángulo inscrito tiene un vértice en cada uno de los cuadrantes, siendo (x, y) las coordenadas del vértice del primer cuadrante.



El área del rectángulo es la magnitud a maximizar, siendo su fórmula:

$$A=base\cdot altura=2x\cdot 2y=4xy$$

Esta función depende de dos variables. Vamos a relacionarlas con la ecuación de la circunferencia de radio unidad centrada en el origen.

$$x^2+y^2=1 \quad\rightarrow\quad y=\sqrt{1-x^2}$$

Por lo que el área queda como una función dependiente de una única variable.

$$A=4x\cdot\sqrt{1-x^2}=4\sqrt{x^2-x^4}$$

El dominio de la función área resulta → $D(A)=[-1,1]$

Derivamos e igualamos a cero, por ser la condición necesaria de extremo relativo.

$$A'=4\cdot\frac{2x-4x^3}{2\sqrt{x^2-x^4}}=4\cdot\frac{x-2x^3}{\sqrt{x^2-x^4}}$$

$$A'=0 \quad\rightarrow\quad x-2x^3=0 \quad\rightarrow\quad x(1-2x^2)=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}$$

Al ser (x,y) un punto del primer cuadrante, debemos tomar como punto crítico a máximo relativo el valor positivo $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Evaluamos la primera derivada a izquierda y derecha de $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, sin olvidar el punto crítico $x=0$ y el valor que marca el final del dominio de definición $x=1$.

$$si \;\; 0<x<\frac{\sqrt{2}}{2} \quad\rightarrow\quad x=0{,}1 \quad\rightarrow\quad A'(0{,}1)>0$$

$$si \;\; \frac{\sqrt{2}}{2}<x<1 \quad\rightarrow\quad x=0{,}9 \quad\rightarrow\quad A'(0{,}1)<0$$

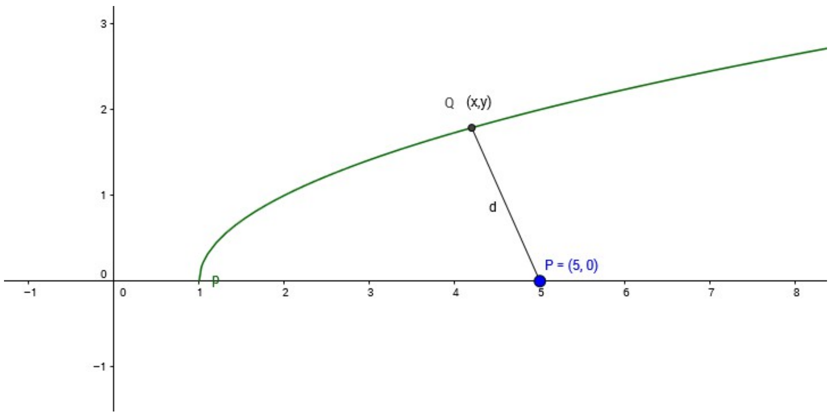
La derivada cambia de signo → $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ es un máximo relativo.

Por lo tanto el rectángulo resultante es de base $2x=\sqrt{2}\ \ u$ y de altura $2y=\sqrt{2}\ \ u$. El área máxima resulta $A_{máx}=2\ \ u^2$

■ *Optimización 2* ♣♣

Obtener el punto de la gráfica de la función $f(x)=\sqrt{x-1}$ a menor distancia del punto $P(5,0)$. Obtener dicha distancia mínima.

Un punto arbitrario de la función será $Q(x,y)=Q(x,\sqrt{x-1})$.



La distancia del punto Q al punto P será la función a minimizar.

$$d(Q,P)=\sqrt{(5-x)^2+(0-\sqrt{x-1})^2}=\sqrt{(5-x)^2+x-1}=\sqrt{25+x^2-10x+x-1}=\sqrt{x^2-9x+24}$$

El discriminante de la raíz siempre es positivo, por lo que el dominio de la función $d(Q,P)$ son todos los número reales.

Derivamos e igualamos a cero, por ser la condición necesaria de extremo relativo.

$$d'=\frac{2x-9}{2\sqrt{x^2-9x+24}}$$

$$d'=0 \rightarrow 2x-9=0 \rightarrow x=\frac{9}{2}$$

Tenemos el punto crítico $x=\frac{9}{2}$, candidato a extremo relativo. Evaluamos la primera derivada a ambos lados del punto crítico (recordando que el dominio de la función a optimizar son todos los reales).

$$si \quad x<\frac{9}{2} \rightarrow x=1 \rightarrow d'(1)<0$$

$$si \quad x>\frac{9}{2} \quad \rightarrow \quad x=10 \quad \rightarrow \quad d'(10)>0$$

La derivada cambia de signo → $x=\frac{9}{2}$ es un mínimo relativo.

Las coordenadas del punto son → $\left(\frac{9}{2}, f\left(\frac{9}{2}\right)\right)=\left(\frac{9}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}}\right)$

La distancia mínima resulta:

$$d_{mín}=\sqrt{\left(\frac{9}{2}\right)^2-9\cdot\left(\frac{9}{2}\right)+24}=\sqrt{\frac{81}{4}-\frac{81}{2}+24}=\sqrt{\frac{-81}{4}+24}=\sqrt{\frac{15}{4}}=\frac{\sqrt{15}}{2} \quad u^2$$

■ *Optimización 3* ♣♣

Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para 13,5 metros cúbicos. Para ello se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcula las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea al mínimo posible.

La función que debemos optimizar es la cantidad de chapa utilizada, que será suma de la chapa empleada para la base cuadrada más la chapa empleada en las cuatro paredes verticales. En cada caso, la cantidad de chapa será igual al volumen de chapa necesaria para construir cada parte.

Si la base es cuadrada supondremos x el valor del lado. Las paredes serán rectangulares, de base x y de altura y .

El grosor de la chapa, que es uniforme (es decir, constante), lo llamaremos d .

$$Volumen \ \ chapa \ \ base \ = x\cdot x\cdot d = x^2\cdot d$$
$$Volumen \ \ chapa \ \ paredes \ = 4\cdot x\cdot y\cdot d$$
$$Volumen \ \ total \ \ chapa \ = x^2\cdot d+4\cdot x\cdot y\cdot d = d\left(x^2+4\cdot x\cdot y\right) \ \rightarrow \ V = d\left(x^2+4\cdot x\cdot y\right)$$

Donde recordamos que el grosor d es un valor constante. En la práctica, al ser el grosor uniforme, lo que buscamos optimizar es la superficie total de chapa empleada.

La función V obtenida depende de dos variables: x, y . Con el dato del volumen del enunciado podemos relacionar ambas variables.

$$13{,}5 \ \ m^3 = x\cdot x\cdot y \ \rightarrow \ 13{,}5 = x^2\cdot y \ \rightarrow \ y = \frac{13{,}5}{x^2}$$

Llevamos este valor a la función $V \ \rightarrow \ V = d\left(x^2+4\cdot x\cdot y\right) = d\left(x^2+4\cdot x\cdot \frac{13{,}5}{x^2}\right) = d\left(x^2+\frac{54}{x}\right)$

El dominio de esta función es $Dom(V) = \mathbb{R}-\{0\}$. Solo tienen sentido físico distancias positivas, por lo que exigiremos valores positivos de la variable x .

El gasto mínimo de chapa se produce para aquel valor de la variable que minimiza la función $V(x)$. Por lo tanto, deberemos derivarla, igualarla a cero y obtener los puntos críticos. Finalmente demostraremos que el punto crítico es un mínimo relativo.

$$V = d\left(x^2+\frac{54}{x}\right) \ \rightarrow \ d \ \text{ es una constante} \rightarrow \ V' = d\left(2x-\frac{54}{x^2}\right) \ \rightarrow \ V' = d\left(\frac{2x^3-54}{x^2}\right)$$

$$V' = 0 \ \rightarrow \ d\left(\frac{2x^3-54}{x^2}\right) = 0 \ \rightarrow \ \frac{2x^3-54}{x^2} = 0 \ \rightarrow \ 2x^3-54 = 0 \ \rightarrow \ x^3 = 27 \ \rightarrow \ x = 3$$

Vamos a determinar si el punto crítico $x=3$ es un mínimo relativo. Para ello evaluamos el signo de la primera derivada en los siguientes intervalos.

$(0,3) \rightarrow V'(1)<0 \rightarrow V(x)$ decreciente

$(3,+\infty) \rightarrow V'(10)>0 \rightarrow V(x)$ creciente

Por lo tanto, en $x=3$ encontramos un mínimo relativo.

Si $x=3 \rightarrow y=\frac{13,5}{x^2}=\frac{13,5}{9}=\frac{3}{2}$

Las dimensiones solicitadas son: una base cuadrado de lado $x=3 \ m$ y paredes verticales de base $x=3 \ m$ y altura $y=\frac{3}{2} \ m$.

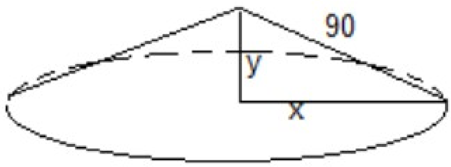
El volumen de chapa mínimo es igual a $V(3)=d(x^2+\frac{54}{x})=27\cdot d \ m^3$, que lógicamente resulta en función del grosor desconocido d .

■ *Optimización 4* ♣♣

Sea un triángulo rectángulo de hipotenusa $90\,cm$. Haciéndolo girar alrededor de uno de sus catetos genera un cono. Obtener las dimensiones de los catetos para que el volumen del cono engendrado sea máximo. Ayuda: volumen de un cono $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

La función a maximizar es el volumen. Depende de dos variables, el radio y la altura, por lo que buscaremos una relación entre ambas variables.

Imagen tomada de http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/



Según el dibujo la altura del cono coincide con el cateto de longitud y . El radio de la base coincide con el cateto de longitud x . Por lo que el volumen resulta:

$$V=\frac{1}{3}\pi x^2 y$$

Por Pitágoras → $90^2=x^2+y^2 \rightarrow x^2=8100-y^2 \rightarrow V=\frac{1}{3}\pi(8100-y^2)y=\frac{1}{3}\pi(8100y-y^3)$

Ya tenemos la función a optimizr dependiendo de una sola variable. Derivamos e igualamos a cero para aplicar la condición necesaria de extremo relativo.

$$V'=\frac{1}{3}\pi(8100-3y^2) \quad , \quad V'=0 \rightarrow 8100-3y^2=0 \rightarrow y^2=2700 \rightarrow y=\pm 30\sqrt{3}$$

Donde tomaremos la solución positiva ya que las distancias tienen sentido físico positivas.

Para demostrar si estamos ante un máximo de la función volumen, evaluamos el punto crítico en la segunda derivada.

$V''=\frac{1}{3}\pi(-6y)=-2\pi y \rightarrow V''(30\sqrt{3})<0 \rightarrow y=30\sqrt{3}$ es un máximo relativo

Dimensiones de los catetos: $y=30\sqrt{3}\ cm \rightarrow x=30\sqrt{6}\ cm$

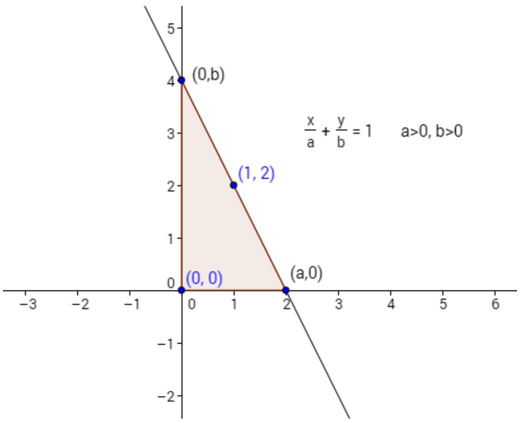
■ *Optimización 5 ♣♣♣*

Encontrar, de entre todas las rectas que pasan por el punto $(1,2)$, aquella que forma con la partes positivas de los ejes de coordenadas un triángulo de área mínima. Obtener dicha área mínima.

La **ecuación canónica de la recta** nos permite expresar la recta a partir de los **puntos de corte de la recta con los ejes de coordenadas**.

$$r: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad \rightarrow \quad (a,0),(0,b)\in r$$

Con $a>0, b>0$ para nuestro problema, ya que la recta pasa por el punto $(1,2)$ y corta a los semiejes positivos de coordenadas formando un triángulo. Por lo que la pendiente de la recta será negativa (ver imagen).



El área del triángulo rectángulo formado por la recta y los ejes cartesianos es:

$$A=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b$$

Y esta es la función que debemos optimizar para buscar su máximo relativo.

La función depende de dos variables. ¿Cómo podemos relacionar ambas variables, para dejar A en función de una sola variable?

Con ayuda de la ecuación de la recta, que pasa por el punto $(1,2)$.

$$r: \frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad , \quad (1,2)\in r \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a}=1-\frac{2}{b} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a}=\frac{b-2}{b} \quad \rightarrow \quad a=\frac{b}{b-2}$$

Llevamos esta relación a la ecuación del área del triángulo.

$$A=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b \;\rightarrow\; A=\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{b-2}\cdot b \;\rightarrow\; A=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{b-2}$$

El dominio de la función área es $Dom(A)=\mathbb{R}-\{2\}$. Y según la condiciones de nuestro enunciado, solo tienen sentido valores positivos de b , ya que la recta solo corta al eje OY en su semieje positivo.

Derivamos e igualamos a cero la función, como condición necesaria de extremo relativo.

$$A'=\frac{1}{2}\cdot\frac{2b(b-2)-b^2}{(b-2)^2} \;\rightarrow\; A'=\frac{1}{2}\cdot\frac{2b^2-4b-b^2}{(b-2)^2} \;\rightarrow\; A'=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2-4b}{(b-2)^2}$$

$$A'=0 \;\rightarrow\; b^2-4b=0 \;\rightarrow\; b=0 \;,\; b=4$$

Tenemos dos puntos candidatos a extremos relativos. Vamos a evaluar la derivada en los siguientes intervalos, para decidir si son máximos o mínimos.

$$(-\infty,0) \;\rightarrow\; A'(-10)>0$$
$$(0,2) \;\rightarrow\; A'(1)<0$$
$$(2,4) \;\rightarrow\; A'(3)<0$$
$$(4,+\infty) \;\rightarrow\; A'(5)>0$$

En $b=0$ la función presenta un máximo relativo (aunque este valor no lo contemplamos realmente, según las condiciones de nuestro enunciado), y en $b=4$ aparece un mínimo relativo (que también es absoluto si nos cernimos a valores positivos de b , que son lo que tienen sentido en nuestro problema).

Por lo tanto, si $b=4 \;\rightarrow\; a=2 \;\rightarrow\; A=4\;u^2$

La ecuación de la recta resulta:

$$r:\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1 \;\rightarrow\; r: y=-2x+4$$

■ *Optimización 6* ♣♣

Con una chapa metálica de 8×5 metros se desea construir, cortando cuadrados en las esquinas, un cajón sin tapa de volumen máximo. Halla razonadamente las dimensiones de dicho cajón.

El volumen a optimizar será el área de la base dela caja por la altura. Según el dibujo:

$$V=(8-2x)(5-2x)x$$

$$V=4x^3-26x^2+40x$$

Derivamos e igualamos a cero para obtener los extremos relativos.

$$V'=12x^2-52x+40 \rightarrow 12x^2-52x+40=0 \rightarrow x=\frac{10}{3} \ , \ x=1$$

La solución $x=\frac{10}{3}$ no tiene sentido físico, porque la altura de la chapa, como máximo, es de 5 metros.

Por lo que si eliminamos dos trozos de $\frac{10}{3}$ tendremos $\frac{20}{3}>5$.

Nos quedamos con el punto crítico $x=1$.

Aplicamos condición suficiente de la segunda derivada para comprobar si maximizamos el volumen.

$V''=24x-52 \rightarrow V''(1)<0 \rightarrow x=1$ es máximo relativo.

Las dimensiones de la caja son 6 m, 3 m y 1 m.

■ *Optimización 7* ♣♣♣

Sea un cono de $120\,cm^3$ de volumen, de altura h, radio de la base x y arista a.

a) Comprobar que $a^2=\frac{360}{\pi}\cdot\frac{1}{h}+h^2$

b) Calcular la altura del cono que tiene la arista de longitud mínima.

a) Aplicando Pitágoras:

$$a^2=x^2+h^2$$

Comparando con la expresión a demostrar, debemos concluir que $x^2=\frac{360}{\pi}\cdot\frac{1}{h}$

Para ello usamos el dato del volumen, que coincide con un tercio del volumen del cilindro recto de misma base y misma altura que el cono.

$120=\frac{1}{3}\pi x^2 h$ → Despejamos → $x^2=\frac{360}{\pi}\cdot\frac{1}{h}$ → c.q.d.

b) Debemos optimizar la arista → $a=\sqrt{\frac{360}{\pi}\cdot\frac{1}{h}+h^2}=\sqrt{\frac{360+\pi h^3}{\pi h}}$ → $a'=0$

$$a'=\frac{\frac{(3\pi h^2)(\pi h)-(360+\pi h^3)\pi}{(\pi h)^2}}{2\sqrt{\frac{360+\pi h^3}{\pi h}}} \rightarrow 3\pi^2 h^3-360\pi-\pi^2 h^3=0 \rightarrow 2\pi^2 h^3-360\pi=0 \rightarrow$$

$2\pi(\pi h^3-180)=0 \rightarrow h=\sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}$ → punto crítico

Aplicamos la condición suficiente de evaluar el signo de la derivada a izquierda y derecha del punto crítico.

Como la altura h es una distancia, no tiene sentido valores negativos. Y viendo la forma dela función arista $a=\sqrt{\frac{360+\pi h^3}{\pi h}}$, tampoco podemos dividir por una altura igual a 0.

Por lo tanto, evalamos la derivada en los siguientes intervalos.

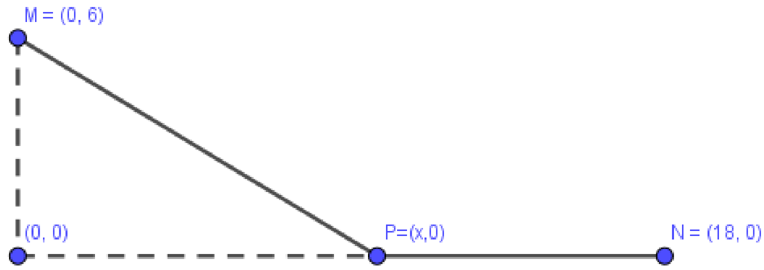
$(0,\sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}) \rightarrow h=1 \rightarrow a'(1)<0$ → función arista decreciente

$(\sqrt[3]{\frac{180}{\pi}},+\infty) \rightarrow h=10 \rightarrow a'(10)>0$ → función arista creciente

En $h=\sqrt[3]{\frac{180}{\pi}}$ tenemos un mínimo relativo de la función arista.

■ *Optimización 8* ♣♣♣

Se desea unir un punto M situado en un lado de una calle, de 6 m de anchura, conel punto N situado en el otro lado de la calle, 18 m más abajo, mediante dos cables rectos, uno desde M hasta un punto P, situado al otro lado de la calle, y otro desde el punto P hasta el punto N.



Se representó la calle en un sistema cartesiano y resultó que M=(0, 6), P=(x, 0) y N=(18, 0).

El cable MP tiene que ser más grueso, debido a que cruza la calla sin apoyos intermedios, siendo su precio de 10€/m. El precio del cable PN es de 5€/m.

a) Obtener el coste C de los dos cables en función de la abscisa x, del puento P, cuando $0 \leq x \leq 18$.

b) Obtener el valor de x, con $0 \leq x \leq 18$, para que el coste total C sea mínimo.

c) Calcular dicho coste mínimo.

a) La función coste resulta de multiplicar la longitud de cada cable por el precio que cuesta cada metro.

$$(\overline{MP})^2 = x^2 + 36 \quad \rightarrow \quad \overline{MP} = \sqrt{x^2+36}$$

$$\overline{PN} = 18 - x$$

$$C = 10\sqrt{x^2+36} + 5(18-x)$$

b) Minimizamos la función coste derivando e igulando a cero.

$$C' = 10\frac{2x}{2\sqrt{x^2+36}} - 5 = \frac{10x - 5\sqrt{x^2+36}}{\sqrt{x^2+36}} \quad \rightarrow \quad C' = 0 \quad \rightarrow \quad 10x - 5\sqrt{x^2+36} = 0 \quad \rightarrow$$

$\rightarrow \quad 4x^2 = x^2 + 36 \quad \rightarrow \quad x = \pm 2\sqrt{3}$ $\rightarrow$ solo tiene sentido físico el valor positivo.

Como la función coste está definida en el intervalo $0 \leq x \leq 18$, evaluamos la derivada en los intervalos:

$(0, 2\sqrt{3}) \quad \rightarrow \quad x = 1 \quad \rightarrow \quad C'(1) < 0$ $\rightarrow$ función estrictamente decreciente.

$(2\sqrt{3}, 18) \quad \rightarrow \quad x = 10 \quad \rightarrow \quad C'(10) > 0$ $\rightarrow$ función estrictamente creciente.

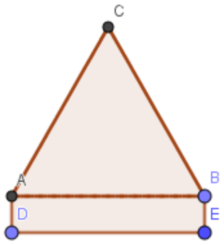
El valor $x = +2\sqrt{3}$ minimiza la función coste.

c) El valor del coste mínimo es la imagen del mínimo relativo en la funcion.

$$C = 10\sqrt{x^2+36} + 5(18-x) \quad \rightarrow \quad C(2\sqrt{3}) = 141{,}96\,€$$

■ *Optimización 9* ♣♣

Tenemos que diseñar una ventana como la de la figura. Es decir, el polígono ACBED, de 30 m de perímetro exterior. Es un rectángulo con un triángulo equilátero en su parte superior. Calcula las dimensiones del rectángulo para que el área de la ventana sea máxima.



Llamamos x a la longitud de cada lado del triángulo equilátero.

Llamamos h a la altura del triángulo.

Llamos y a la altura del rectángulo.

Así, el área será la suma del área del triánguo y el área del rectángulo.

$A=\frac{1}{2}xh+xy$ → función a maximizar

Por Pitágoras, se cumple → $x^2=h^2+\left(\frac{x}{2}\right)^2 \rightarrow h=\frac{\sqrt{3}}{2}x$

Del perímetro exterior de la ventana sacamos la relación → $30=3x+2y \rightarrow y=15-\frac{3}{2}x$

Sustituimos estas dos expresiones en la función a maximizar:

$$A=\frac{1}{2}xh+xy \rightarrow A=\frac{1}{2}x\frac{\sqrt{3}}{2}x+x\left(15-\frac{3}{2}x\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}x^2+15x-\frac{3}{2}x^2=\frac{\sqrt{3}-6}{4}x^2+15x$$

Derivamos a igualamos a cero.

$$A'=\frac{\sqrt{3}-6}{2}x+15 \rightarrow A'=0 \rightarrow x=\frac{-30}{\sqrt{3}-6}\simeq 7{,}03\,m$$

Aplicamos condición suficiente de segunda derivada:

$A'=\frac{\sqrt{3}-6}{2}$ → función siempre negativa → $x\simeq 7{,}03\ m$ es un máximo relativo de la función área.

Y la altura del rectángulo resulta → $y=15-\frac{3}{2}x \rightarrow y=4{,}46\,m$

■ *Optimización 10* ♣♣

La produción mensual de una fábrica de bombillas viene dada por $P=2LK^2$ (en millones de unidades). Donde L es el coste de la mano de obra y K es el coste del equipamento (en millones de euros).

La fábrica pretende producir 8 millones de unidades al mes. ¿Qué valores de L y K minimizarían el coste total L+K?

Si se desean fabricar 8 millones de bombillas → $8=2LK^2 \rightarrow 4=LK^2 \rightarrow L=\frac{4}{K^2}$

Buscamos optimizar L + K → $f=L+K$ → sustituyendo → $f=\frac{4}{K^2}+K \rightarrow f=\frac{4+K^3}{K^2}$

Esta es la función de una variable a optimizar.

$$f'=0 \rightarrow f'=\frac{3K^2K^2-(4+K^3)2K}{K^4}=\frac{3K^3-(4+K^3)2}{K^3}=\frac{K^3-8}{K^3} \rightarrow K^3-8=0$$

$K=2$ → punto crítico.

Evaluamos la primera derivada a la izquierda y derecha del punto crítico, sabiendo que la función original $f=\frac{4+K^3}{K^2}$ es continua en toda la recta real menos en $K=0$, y que no tiene sentido un valor negativo de K . Por lo tanto, evaluamos en:

$(0,2) \rightarrow K=1 \rightarrow f'(1)<0$ → función estrictamente decreciente.

$(2,+\infty) \rightarrow K=10 \rightarrow f'(10)>0$ → función estrictamente creciente.

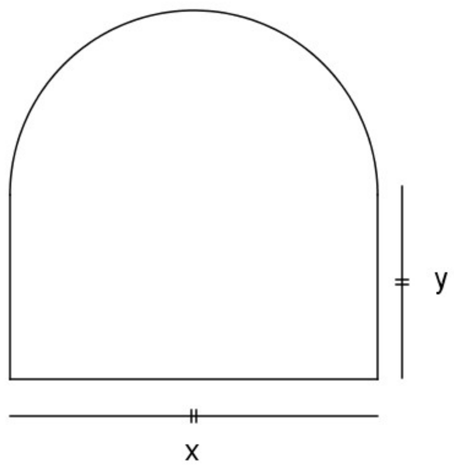
$K=2$ es un mínimo relativo de la función coste → $L=\frac{4}{K^2} \rightarrow L=1$

Para minimizar costes se necesitan 2 millones de euro en equipamento y 1 millón de euros en mano de obra.

■ *Optimización 11* ♣♣

Sea una ventana cuya parte inferior es un rectángulo y la superior un semicírculo. Si el perímetro de la ventana es de $6m$, calcula las dimensiones de la ventana para que entre la cantidad de luz máxima.

Un dibujo ayuda mucho en los problemas de optimización.



La luz que entra será máxima si maximizamos el área de la ventana.

$x=2r \rightarrow r$ es el radio de la semicircunferencia

$A_{rectángulo}=(2r)\cdot y$

$A_{semicircunferencia}=\pi\cdot r^2$

$A_{total}=A_{rectángulo}+A_{semicircunferencia}=2ry+\pi r^2$

Con los datos del enunciado sobre el perímetro buscamos una relación entre las variables r, y.

$$P=6 \quad , \quad P=2r+2y+\pi r \rightarrow 6=(\pi+2)r+2y \rightarrow \frac{6-(\pi+2)r}{2}=y$$

Llevamos este resultado a la función área.

$$A=2r\frac{6-(\pi+2)r}{2}+\pi r^2 \rightarrow A=6r-(\pi+2)r^2+\pi r^2 \rightarrow A=6r-2r^2$$

La condición necesaria de extremo relativo es primera derivada igual a cero.

$A'=0 \rightarrow 6-4r=0 \rightarrow r=\frac{3}{2}$ → punto crítico

Comprobamos si es un máximo evaluando la segunda derivada en el punto crítico.

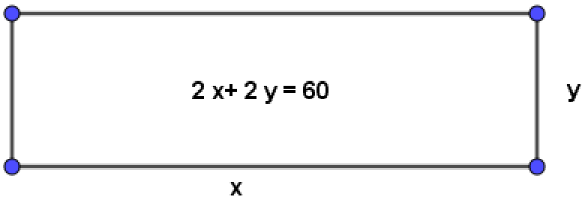
$A''=-4<0 \ \forall r \in Dom(A) \rightarrow r=\frac{3}{2}$ es un máximo de la función área.

$x=2r \rightarrow x=3 \ m$

$\frac{6-(\pi+2)r}{2}=y \rightarrow \frac{6-(\pi+2)\frac{3}{2}}{2}=y \rightarrow y=\frac{6-3\pi}{4} \ m$

■ *Optimización 12* ♣♣

Con un hilo de 60 cm de longitud, forma un rectángulo que al girar alrededor de uno de sus lados, engendre un cilindro de área lateral máxima. Obtener dimensiones del rectángulo y el valor del área lateral máxima.



Si hacemos girar el rectángulo de la figura alrededor del lado vertical y obtendremos un cilindro de altura radio de la base x , altura y .

El área de la cara lateral del cilindro será el perímetro de la base por la altura del cilindro.

Es decir:

$$A_L = 2\pi x y$$

Del enunciado sabemos que los cuatro lados del rectángulo deben sumar 60 cm → $2x+2y=60$ → $y=30-x$

Llevamos esta relación a la fórmula del área lateral.

$A_L = 2\pi x(30-x) = 2\pi(30x-x^2)$ → Esta es la función a optimizar.

Aplicamos la condición necesaria de extremo relativo: $A'_L = 0$

$A'_L = 2\pi(30-2x)$ → $30-2x=0$ → $x=15$ → Punto crítico

Comprobamos si es extremo relativo con la condición suficiente de la segunda derivada.

$A''_L = 2\pi(-2) = -4\pi < 0$ → La segunda derivada siempre es negativa → El punto crítico es un máximo relativo.

Obtenemos la segunda dimensión del rectángulo:

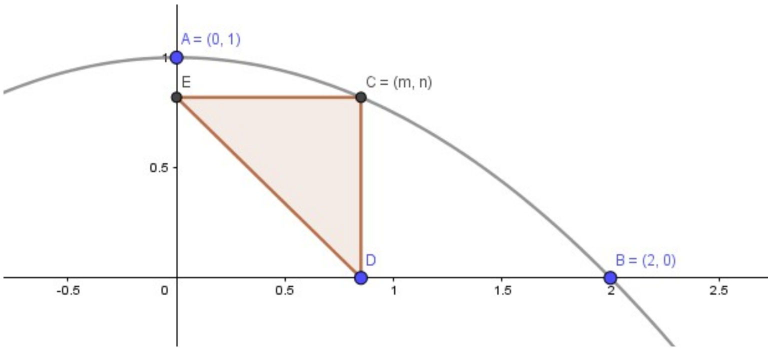
$y=30-x$ → $y=15$

Y terminamos obteniendo el área máxima, que no es más que la imagen del extremo relativo $x=15$ en la función que hemos optimizado:

$A_L = 2\pi(30x-x^2)$ → $A_L(15) = 2\pi(30\cdot 15-15^2) = 450\pi\, cm^2$

■ *Optimización 13 ♣♣*

Sea $f(x)=1-\frac{1}{4}x^2$ y $C(m,n)$ un punto perteneciente a la gráfica en el primer cuadrante. Determinar los valores (m,n) para que el área del triángulo rectángulo CDE sea máxima.



El área del triángulo será un medio de base por altura:

$$A=\frac{1}{2}m\cdot n$$

Donde la base coincide con la coordenada m y la altura con la coordenada n .

Relacionamos ambas variables con el dato de que el punto $C(m,n)$ pertenece a la gráfica.

Si $x=m \rightarrow f(m)=n \rightarrow 1-\frac{1}{4}m^2=n$

Sustituimos este valor en la fórmula del área.

$$A=\frac{1}{2}m\cdot(1-\frac{1}{4}m^2)=\frac{1}{2}m-\frac{1}{8}m^3$$

Esta es la función, de una variable, a optimizar.

La condición necesaria de extremos relativo es primera derivada igual a cero.

$$A'=0 \rightarrow A'=\frac{1}{2}-\frac{3}{8}m^2 \rightarrow \frac{1}{2}-\frac{3}{8}m^2=0 \rightarrow m=\frac{\pm 2\sqrt{3}}{3}$$

Nos quedamos con el valor positivo porque el punto $C(m,n)$ pertenece al primer cuadrante.

Aplicamos condición suficiente dela segunda derivada para comprobar que le punto es un máximo relativo.

$A''=\frac{-3}{4}m \rightarrow A''(2\frac{\sqrt{3}}{3})<0 \rightarrow m=\frac{2\sqrt{3}}{3}$ es un máximo relativo.

Las coordenadas del punto son $C(\frac{2\sqrt{3}}{3},\frac{2}{3})$

Valor absoluto

■ *Valor absoluto 1 ♣♣♣*

Estudiar la derivabilidad de $f(x)=x-|\frac{x^2-1}{x}|$ **en su dominio de definición.**

Siempre que nos encontremos con valor absoluto debemos **romper la función en trozos antes de operar**. Para ello, obtenemos las raíces tanto del numerador como del denominador que aparecen dentro del valor absoluto (si fuese un polinomio, y no un cociente, siemplemente obtendríamos las raíces del polinomio).

$$x^2-1=0 \quad \rightarrow \quad x=\pm 1$$

$$x=0$$

Representamos en la recta real las raíces obtenidas, recordando que las raíces del denominador no pertenecen al dominio de la función ya que no podemos dividir por cero. Y evaluamos el signo del argumento del valor absoluto en cada uno de los intervalos obtenidos.

$$si \quad x<-1 \quad \rightarrow \text{por ejemplo} \quad x=-10 \quad \rightarrow \quad \frac{(-10)^2-1}{-10}<0$$

$$si \quad -1<x<0 \quad \rightarrow \text{por ejemplo} \quad x=\frac{-1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{(\frac{-1}{2})^2-1}{\frac{-1}{2}}>0$$

$$si \quad 0<x<1 \quad \rightarrow \text{por ejemplo} \quad x=\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad \frac{(\frac{1}{2})^2-1}{\frac{1}{2}}<0$$

$$si \quad x>1 \quad \rightarrow \text{por ejemplo} \quad x=10 \quad \rightarrow \quad \frac{(10)^2-1}{10}>0$$

En los intervalos donde el argumento del valor absoluto sea positivo, podemos quitar las barras de valor absoluto sin más. Donde el argumento ea negativo, debemos colocar un signo negativo al eliminar las barras. De esta forma, tendremos los siguientes intervalos (fíjate que en uno de los tramos incluimos el signo igual para $x=-1$ y $x=1$, pero no para $x=0$).

$$f(x)=\begin{cases} x+\dfrac{x^2-1}{x} & si \quad x\le -1 \\ x-\dfrac{x^2-1}{x} & si \quad -1<x<0 \\ x+\dfrac{x^2-1}{x} & si \quad 0<x\le 1 \\ x-\dfrac{x^2-1}{x} & si \quad x>1 \end{cases} \rightarrow \text{operamos} \rightarrow \quad f(x)=\begin{cases} \dfrac{2x^2-1}{x} & si \quad x\le -1 \\ \dfrac{1}{x} & si \quad -1<x<0 \\ \dfrac{2x^2-1}{x} & si \quad 0<x\le 1 \\ \dfrac{1}{x} & si \quad x>1 \end{cases}$$

Recuerda: el 0 no pertenece al dominio de la función y por eso no aparece el signo igual en ninguno de los intervalos a la izquierda o a la derecha de 0 .

El dominio de definición de la función a trozos es $\mathbb{R}-\{0\}$.

Una función es derivable en su dominio si es continua y si está definida la función derivada en ese dominio.

La continuidad se estudia primero en los intervalos abiertos y luego en los puntos frontera que dividen los intervalos.

$x<-1 \quad \rightarrow \quad f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x}$ → Continua en el intervalo abierto por ser cociente de polinomios y no incluir a 0 , valor que anula al denominador.

$-1<x<0 \quad \rightarrow \quad f(x)=\dfrac{1}{x}$ → Continua en el intervalo abierto por ser cociente de polinomios y no incluir a 0 , valor que anula al denominador.

$0<x<1 \quad \rightarrow \quad f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x}$ → Continua en el intervalo abierto por ser cociente de polinomios y no incluir a 0 , valor que anula al denominador.

$x>1 \quad \rightarrow \quad f(x)=\dfrac{1}{x}$ → Continua en el intervalo abierto por ser cociente de polinomios y no incluir a 0 , valor que anula al denominador.

Para estudiar la continuidad en los puntos frontera aplicamos las tres condiciones de continuidad en un punto.

$x=-1$

$f(-1)=-1$

$L^-=\lim_{x\to -1^-} \dfrac{2x^2-1}{x}=-1 \quad , \quad L^+=\lim_{x\to -1^+} \dfrac{1}{x}=-1 \quad \rightarrow \quad L^-=L^+=-1 \quad \rightarrow \quad L=-1$

$f(-1)=L \quad \rightarrow \quad -1=-1 \quad \rightarrow \quad f(x)$ es continua en $x=-1$

$x=0$

$\nexists f(0) \rightarrow f(x)$ no es continua en $x=0 \rightarrow f(x)$ no es derivable en $x=0$

$x=1$

$f(1)=1$

$L^{-}=\lim_{x\to 1^{-}} \frac{2x^2-1}{x}=1$, $L^{+}=\lim_{x\to 1^{+}} \frac{1}{x}=1 \rightarrow L^{-}=L^{+}=1 \rightarrow L=1$

$f(1)=L \rightarrow 1=1 \rightarrow f(x)$ es continua en $x=1$

Estudiamos la derivabilidad, en primer lugar, en los intervalos abiertos.

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{2x^2+1}{x^2} & si \quad x<-1 \\ \frac{-1}{x^2} & si \quad -1<x<0 \\ \frac{2x^2+1}{x^2} & si \quad 0<x<1 \\ \frac{-1}{x^2} & si \quad x>1 \end{cases}$$

En todos los intervalos abiertos la función derivada está bien definida, ya que ninguno de los intervalos incluye el valor $x=0$ que anula los distintos denominadores. Por lo tanto $f(x)$ es derivable en $x<-1$, $-1<x<0$, $0<x<1$, $x>1$.

Estudiamos la derivabilidad en los puntos frontera donde la función era continua. Recuerda que la función será derivable en esos puntos frontera si coinciden sus derivadas laterales (recuerda que una derivada lateral no es más que el límite por la derecha o por la izquierda en la función derivada correspondiente).

$x=-1$

$f'(-1^{-})=\lim_{x\to -1^{-}} \frac{2x^2+1}{x^2}=-3$, $f'(-1^{+})=\lim_{x\to -1^{+}} \frac{-1}{x^2}=-1 \rightarrow -3\neq -1$

$f(x)$ no es derivable en $x=-1$

$x=1$

$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-} \frac{2x^2+1}{x^2}=3$, $f'(1^+)=\lim_{x\to -1^+} \frac{1}{x^2}=-1$ $\rightarrow$ $3\neq -1$

$f(x)$ no es derivable en $x=1$

■ *Valor absoluto 2* ♣♣

Sea la función $f(x)=x^2-|x|$ **. Estudiar su derivabilidad, monotonía y extremos relativos.**

Rompemos a trozos, antes de nada, el valor absoluto.

$$x=0$$

El argumento del valor absoluto es negativo a la izquierda de cero y positivo a la derecha de cero.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x & si \quad x\leq 0 \\ x^2-x & si \quad x>0 \end{cases}$$

Para que la función sera derivable, primer debe ser continua. En los intervalos abiertos $x<0$, $x>0$ la función es continua por ser polinómica.

En el punto frontera $x=0$ aplicamos las condiciones de continuidad.

$$f(0)=0$$
$$L^-=\lim_{x\to 0^-}(x^2+x)=0 \quad , \quad L^+=\lim_{x\to 0^+}(x^2-x)=0 \quad \rightarrow \quad L^-=L^+=0 \quad \rightarrow \quad L=0$$
$f(0)=L \quad \rightarrow \quad 0=0 \quad \rightarrow \quad f(x)$ es continua en $x=0$

Estudiamos la función derivada en los intervalos abiertos.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & si \quad x<0 \\ 2x-1 & si \quad x>0 \end{cases}$$

En los intervalos abiertos $x<0$, $x>0$ la función derivada es continua por ser polinómica. Por lo tanto, $f(x)$ es derivable en los intervalos abiertos.

Estudiamos la derivabilidad en el punto frontera, calculando si coinciden las derivadas laterales.

$$x=0$$
$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}(2x+1)=1 \quad , \quad f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}(2x-1)=-1 \quad \rightarrow \quad 1\neq -1$$
$f(x)$ no es derivable en $x=0$

Anulamos la primera derivada en cada intervalo para determinar la existencia de puntos críticos.

$$si \quad x<0 \quad \rightarrow \quad f'(x)=0 \quad \rightarrow \quad 2x+1=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-1}{2}$$

$$si \quad x>0 \quad \rightarrow \quad f'(x)=0 \quad \rightarrow \quad 2x-1=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{1}{2}$$

Ambos puntos críticos pertenecen a los intervalos donde están definidos cada tramo. De no haber sido así, no los consideraríamos. Determinamos los extremos con el valor de la segunda derivada en el punto crítico.

$si \quad x<0 \quad \rightarrow \quad f''(x)=2>0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{-1}{2}$ es un mínimo relativo

$si \quad x>0 \quad \rightarrow \quad f''(x)=2>0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{1}{2}$ es un mínimo relativo

El estudio de la monotonía resulta:

$si \quad x<\frac{-1}{2} \quad \rightarrow \quad f(x)$ es decreciente

$\frac{-1}{2}<x<0 \quad \rightarrow \quad f(x)$ es creciente

$0<x<\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad f(x)$ es decreciente

$\frac{1}{2}<x \quad \rightarrow \quad f(x)$ es creciente

¡Ojo, una trampa final! Los mínimos que hemos obtenido son lo que anulan la primera derivada. Pero al trabajar con intervalos debemos tener en cuenta a todos los puntos frontera de los intervalos.

En $x=0$ la función es continua pero no derivable, por lo tanto nunca podrá ocurrir que $f'(0)=0$. Pero sí ocurre que si la función a la izquierda $x=0$ es creciente, y a la derecha de $x=0$ es decreciente, tenemos un máximo relativo (es un punto anguloso, al no ser suave el trazo de la función en ese punto).

■ *Valor absoluto 3 ♣♣*

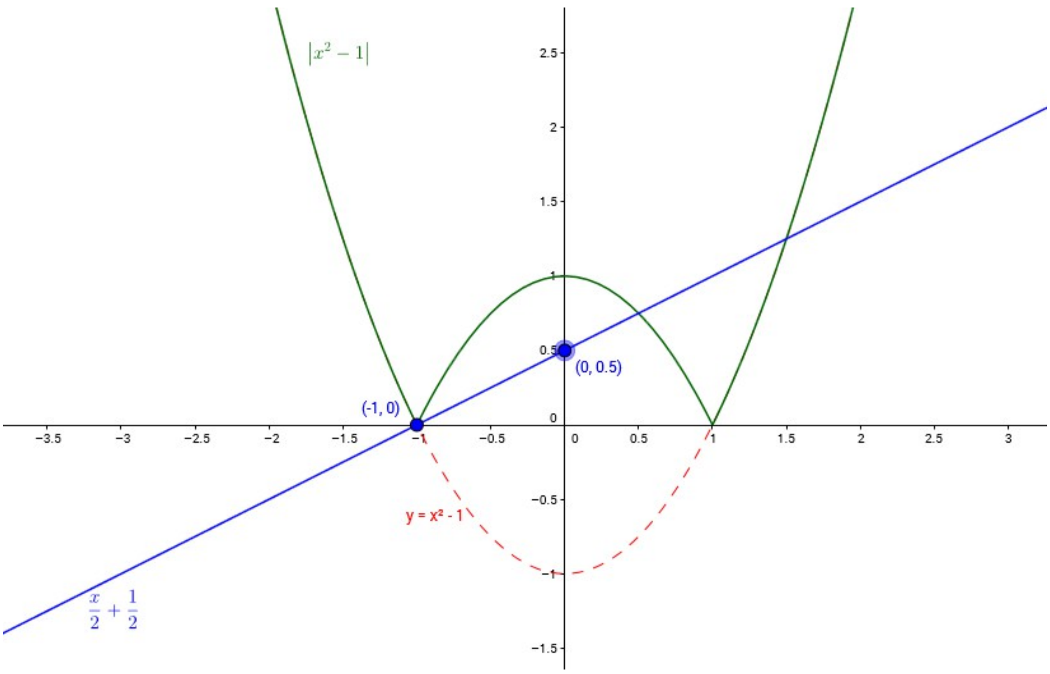
Representar sobre una misma gráfica las funciones $f(x)=|x^2-1|$ **y** $g(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ **. Obtener puntos de corte de ambas gráficas.**

Si la función que tenemos dentro del valor absoluto es sencilla de representar (una parábola cóncava hacia arriba, en este ejercicio), la mejor forma de obtener un boceto rápido de su gráfica es pintar la función sin valor absoluto y luego pasar la parte negativa de la función a positiva.

La parábola $y=x^2-1$ tiene extremo relativo en $y'=0 \rightarrow 2x=0 \rightarrow x=0 \rightarrow (0,-1)$ es un mínimo absoluto de la parábola, ya que al ser positivo el coeficiente que acompaña a x^2 genera una parábola cóncava.

Los puntos de corte con el eje horizontal son → $y=0 \rightarrow x=\pm 1 \rightarrow (-1,0)$, $(1,0)$

La recta $g(x)=\frac{x}{2}+2$ tiene pendiente $m=\frac{1}{2}$ (coeficiente que acompaña a x en la forma explícita de la recta) y pasa por el punto $(0,\frac{1}{2})$ (ordenada en el origen) y por el punto $(-1,0)$.



Para estudiar los puntos de corte entre ambas gráficas, debemos en primer lugar romper el valor absoluto en trozos. Recuerda: no operes con funciones con valor absoluto sin haberlas roto previamente en trozos.

Para ello igualamos el argumento contenido en el valor absoluto a cero, y obtenemos las raíces.

$$x^2-1=0 \rightarrow x=\pm 1$$

$$si \quad x<-1 \rightarrow x=-10 \rightarrow (-10)^2-1>0$$

$$si \quad -1<x<1 \quad \rightarrow \quad x=0 \quad \rightarrow \quad (0)^2-1<0$$
$$si \quad x>1 \quad \rightarrow \quad x=10 \quad \rightarrow \quad (10)^2-1>0$$

Donde el argumento sea negativo, deberemos colocar un signo menos al quitar el valor absoluto.

$$f(x)=\left\{\begin{array}{c} x^2-1 \quad si \quad x<-1 \\ 1-x^2 \quad si \quad -1\leq x\leq 1 \\ x^2-1 \quad si \quad x>1 \end{array}\right\}$$

Fíjate que ponemos el signo igual en uno (y solo uno) de los tramos de cada punto frontera, para garantizar la continuidad de la función.

Ahora ya podemos estudiar los punto de corte, igualando la fórmula de las gráficas en cada intervalo.

$si \quad x<-1 \quad \rightarrow \quad x^2-1=\frac{x}{2}+\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad x^2-\frac{x}{2}-\frac{3}{2}=0$ → No hay solución dentro del intervalo

$$si \quad -1\leq x\leq 1 \quad \rightarrow \quad 1-x^2=\frac{x}{2}+\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad x^2+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=0 \quad \rightarrow \quad x=-1 \quad , \quad x=\frac{1}{2}$$

$$si \quad x>1 \quad \rightarrow \quad x^2-1=\frac{x}{2}+\frac{1}{2} \quad \rightarrow \quad x^2-\frac{x}{2}-\frac{3}{2}=0 \quad \rightarrow \quad x=\frac{3}{2}$$

Los tres puntos de corte son $(-1,0)$, $\left(\frac{1}{2},\frac{3}{4}\right)$ y $\left(\frac{3}{2},\frac{5}{4}\right)$.

Estudio y representación de funciones

■ *Estudiar funciones 1 ♣♣*

Sea la función $f:(0,+\infty)$ **y definida por** $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$ **. Halla los extremos absolutos de** $f(x)$ **(abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan) en el intervalo** $[\frac{1}{e},e]$ **.**

Un extremo relativo puede ser o no ser extremo absoluto. La condición de extremo relativo, o extremo suave, es primera derivada nula. Y la condición de extremos absoluto es que su imagen sea la má grande o la más pequeña de todas.

Cuando nos pregunten por extremos absolutos **en un intervalo cerrado, debemos evaluar la función en los extremos del intervalo y obtener la imagen de los posibles extremos relativos**. Comparando las imágenes podremos determinar si hay extremos absolutos.

$$x=\frac{1}{e} \rightarrow f(\frac{1}{e})=e+\ln(\frac{1}{e})=e+\ln(1)-\ln(e)=e-1 \rightarrow (\frac{1}{e},e-1)=(\frac{1}{e},1{,}71)$$

$$x=e \rightarrow f(e)=\frac{1}{e}+\ln(e)=\frac{1}{e}+1 \rightarrow (e,\frac{1}{e}+1)=(e,1{,}37)$$

Derivamos e igualamos a cero, como condición necesaria de extremo relativo.

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{-1+x}{x^2}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow -1+x=0 \rightarrow x=1$$

Decidimos si en $x=1$ tenemos un mínimo o un máximo relativo evaluando la segunda derivada.

$$f''(x)=\frac{-x^2+2x}{x^4}=\frac{-x+2}{x^3} \rightarrow f''(1)=1>0 \rightarrow x=1 \text{ es un mínimo relativo}$$

$$x=1 \rightarrow f(1)=1+\ln(1)=1 \rightarrow (1,1)$$

Comparando el valor de las imágenes de los tres puntos obtenidos, concluimos:

$(\frac{1}{e},e-1)=(\frac{1}{e},1{,}71)$ máximo absoluto en el intervalo $[\frac{1}{e},e]$

$(1,1)$ mínimo absoluto en el intervalo $[\frac{1}{e},e]$

■ *Estudiar funciones 2* ♣♣

Sea la función definida por $f(x)=\dfrac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$ **. Estudia el dominio, los puntos de corte con los ejes, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos.**

En un cociente de polinomios el dominio son todos los reales menos los valores que anulan el denominador. Por lo tanto $D(f)=\mathbb{R}-\{-1,2\}$.

Los puntos de corte con el eje horizontal implica $f(x)=0 \rightarrow (0,0)$

El punto de corte con el eje vertical implica $x=0 \rightarrow (0,0)$

Para estudiar el crecimiento y los extremos relativos, obtenemos la primera derivada e igualamos a cero para calcular los puntos críticos.

$$f'(x)=\frac{-2x^2-8x}{(x^2-x-2)^2}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow -2x^2-8x=0 \rightarrow x=-4 \ , \ x=0$$

Para evaluar el signo de la derivada a los lados de los puntos críticos debemos tener en cuenta los puntos que no pertenecen al dominio de la función.

$si \ x<-4 \rightarrow f'(-10)<0 \rightarrow f(x)$ estrictamente decreciente

$si \ -4<x<-1 \rightarrow f'(-2)>0 \rightarrow f(x)$ estrictamente creciente

$si \ -1<x<0 \rightarrow f'(\frac{-1}{2})>0 \rightarrow f(x)$ estrictamente creciente

$si \ 0<x<2 \rightarrow f'(1)<0 \rightarrow f(x)$ estrictamente decreciente

$si \ 2<x \rightarrow f'(10)<0 \rightarrow f(x)$ estrictamente decreciente

Encontramos un mínimo relativo en $x=-4$ y un máximo relativo en $x=0$.

Si nos hubiesen pedido obtener las imágenes d ellos extremos, hubiéramos calculado $f(-4)$ y $f(0)$. En este ejercicio no nos lo han pedido, por lo que ya hemos terminado nuestro estudio.

■ *Estudiar funciones 3* ♣♣

Determinar a, b, c, d **para que** $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ **posea un extremo relativo en** $x=0$ **, un punto de inflexión en** $(1,0)$ **y para que la pendiente de la recta tangente en el punto de inflexión sea igual a** -3 **.**

Nos piden cuatro parámetros, por lo que del enunciado deberemos obtener cuatro condiciones para formar un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas.

De la condición necesaria de extremo relativo → $f'(x)=0$ → $c=0$

Si la función pasa por $(1,0)$ → $f(1)=0$ → $a+b+c+d=0$

De la condición necesaria de punto de inflexión → $f''(x)=0$ → $6a+2b=0$

Y de la interpretación geométrica de la derivada podemos deducir que el valor de la derivada de la función en $x=1$ es -3 → $f'(1)=-3$ → $3a+2b+c=-3$

Con estas cuatro condiciones formamos un sistema, de solución general → $a=1, b=-3, c=0, d=2$

■ *Estudiar funciones 4* ♣♣

Sea la función $f(x)=\frac{1}{2x}+\ln(x)$ **definida para** $x>0$ **. Determina el punto de la gráfica en el que la pendiente de la recta tangente es máxima.**

Decir que la pendiente de la **recta tangente sea máxima es lo mismo decir que el valor de la primera derivada sera máxima**. Es decir, debemos estudiar los **extremos relativos de la función derivada**.

Si para $f(x)$ la condición necesaria de extremo relativo es $f'(x)=0$, ahora para $f'(x)$ la condición necesaria será $f''(x)=0$.

Es decir, lo que nos están preguntando ni más ni menos es que calculemos la existencia de **puntos de inflexión en la función de partida**.

$$f'(x)=\frac{-1}{2x^2}+\frac{1}{x} \quad \rightarrow \quad f''(x)=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}=\frac{1-x}{x^3}$$

$$f''(x)=0 \quad \rightarrow \quad 1-x=0 \quad \rightarrow \quad x=1$$

Para decidir si estamos ante un punto de inflexión, evaluamos la tercera derivada en $x=1$.

Si $f'''(1)\neq 0$ tendremos un punto de inflexión.

$$f'''(x)=\frac{-1\cdot x^3-(1-x)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{-x^3-3x^2+3x^3}{x^6}=\frac{2x-3}{x^4}$$

$$f'''(1)=\frac{2-3}{1}=-1\neq 0$$

En $x=1$ tendremos un punto de inflexión.

¿Cómo saber si es un máximo o un mínimo de la primera derivada? Muy sencillo. **La tercera derivada es la segunda derivada de la primera derivada**... parece un trabalenguas jajaja.

Por lo tanto: tercera derivada negativa significa que la segunda derivada de la primera derivada es negativa. Es decir, tenemos un máximo de la primera derivada. Como queríamos demostrar: un máximo de la pendiente.

■ *Estudiar funciones 5* ♣♣♣

Estudia y representa $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$

El **dominio** de la función son todos los reales positivos, ya que el denominador se anula en $x=0$ y el logaritmo se define para argumentos positivos → $Dom(f(x))=(0,+\infty)$. Los **puntos de corte con los ejes** cartesianos resultan:

$$corte\ \ con\ \ eje\ \ OX \ \rightarrow\ y=0 \ \rightarrow\ \ln(x)=0 \ \rightarrow\ (1,0)$$

$corte\ \ con\ \ eje\ \ OY \ \rightarrow\ x=0$ → La función no está definida en $x=0$

La función no presenta periodicidad. La función **no es par ni impar**. Estudiamos la **asíntota vertical** que aparece en $x=0$. Calculamos los límites laterales.

$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(x)}{x}=\nexists$ → La función no está definida en los reales negativos

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{x}=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$$

El logaritmo a la derecha de 0 se dispara a $-\infty$ y x es un número positivo; pequeño, pero positivo. Por lo tanto, el cociente va a $-\infty$. Tenemos una asíntota vertical a la derecha de $x=0$.

Estudiamos el límite en el infinito de la función para determinar la existencia de **asíntota horizontal**. Y recordamos que el logaritmo tiende a infinito si x tiende a ∞ .

$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\frac{+\infty}{+\infty}$ → Indeterminación → L'Hôpital → $\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$

Tenemos una asíntota horizontal en $y=0$. En consecuencia, no habrá **asíntota oblicua**. Estudiamos los **extremos relativos y los intervalos de crecimiento con la primera derivada**.

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{x} \ \rightarrow\ f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln(x)\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2} \ ,\ f'(x)=0 \ \rightarrow\ \ln(x)=1 \ \rightarrow\ x=e$$

La primera derivada se anula para el punto $(e,f(e))=(e,\frac{1}{e})$. Por lo tanto hay un **punto crítico**. Debemos determinar si, efectivamente, es **extremo relativo**.

$(0,e) \rightarrow x=1 \rightarrow f'(1)>0 \rightarrow f(x)$ creciente
$(e,+\infty) \rightarrow x=10 \rightarrow f'(10)<0 \rightarrow f(x)$ decreciente

Se confirma la existencia de máximo relativo en el punto $(e,\frac{1}{e})$. Estudiamos la **curvatura con la segunda derivada**.

$$f'(x)=\frac{1-\ln(x)}{x^2} \rightarrow f''(x)=\frac{\frac{-1}{x}\cdot x^2-(1-\ln(x)\cdot 2x)}{x^4}=\frac{\frac{-1}{x}\cdot x-(1-\ln(x)\cdot 2)}{x^3}$$

$$f''(x)=\frac{-1-(1-\ln(x)\cdot 2)}{x^3}=\frac{-3+2\ln(x)}{x^3} \rightarrow f''(x)=0 \rightarrow \ln(x)=\frac{3}{2}$$

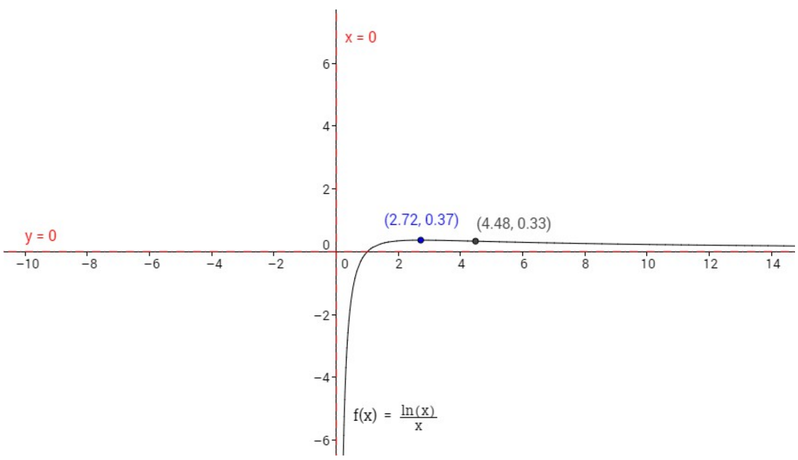
Resolvemos esta igualdad aplicando exponencial.

$$\ln(x)=\frac{3}{2} \rightarrow e^{\ln(x)}=e^{\frac{3}{2}} \rightarrow x=e^{\frac{3}{2}} \rightarrow x\simeq 4{,}48$$

Candidato a punto de inflexión: $(4{,}48\,,f(4{,}48))=(4{,}48\,,0{,}33)$. Estudiamos la curvatura en los siguientes intervalos.

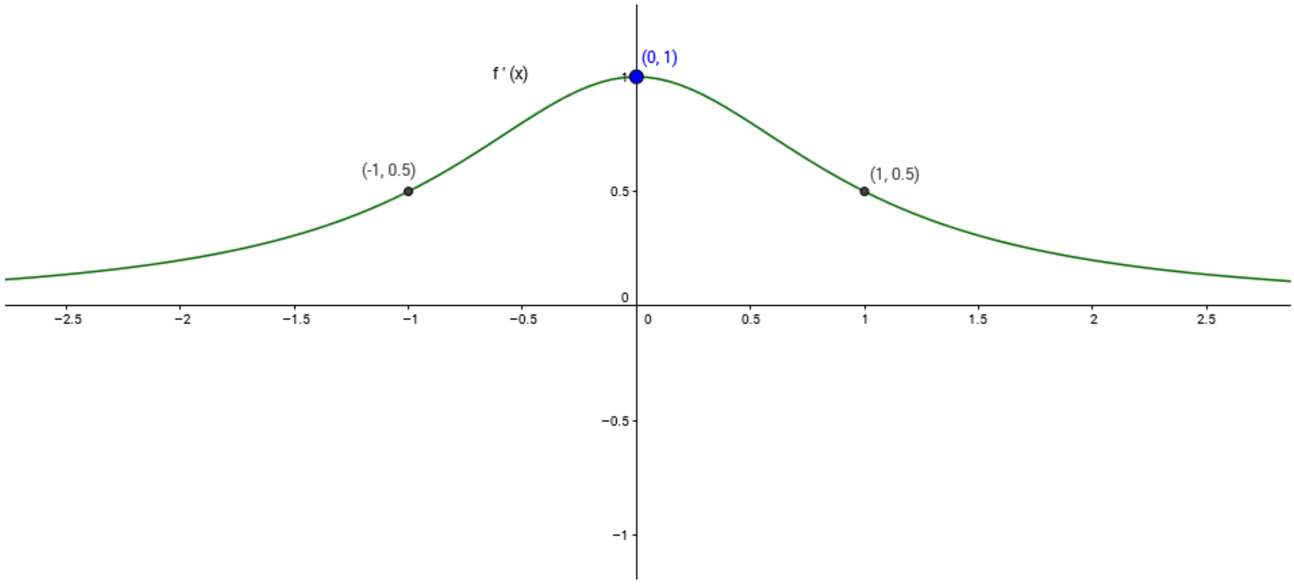
$(0,4{,}48) \rightarrow x=1 \rightarrow f''(-1)<0 \rightarrow f(x)$ cóncava hacia abajo ∩
$(4{,}48\,,+\infty) \rightarrow x=10 \rightarrow f''(10)>0 \rightarrow f(x)$ cóncava hacia arriba U

Existe **punto de inflexión** en $(4{,}48\,,0{,}33)$. Ya tenemos información suficiente para pintar la gráfica.



■ *Estudiar funciones 6* ♣♣

Indica la monotonía, extremos relativos y puntos de inflexión de $f(x)$ a partir de la siguiente gráfica de su derivada $f'(x)$.



Derivada positiva implica función $f(x)$ creciente. Como $f'(x)>0$ → $f(x)$ es estrictamente creciente en todo su intervalo de definición.

Un valor nulo de la derivada $f'(x)=0$ es la condición necesaria de extremo relativo para $f(x)$. Como la gráfica de la derivada nunca corta al eje horizontal, significa que la derivada nunca se anula. Por lo tanto $f(x)$ no posee extremos relativos.

Los extremos relativos de la función derivada son los candidatos a puntos de inflexión de $f(x)$. En $(0,1)$ la función derivada $f'(x)$ presenta un máximo absoluto, por lo que $f''(0)=0$, que es la condición necesaria de punto de inflexión de $f(x)$.

A la izquierda de $x<0$ la función derivada es creciente, por lo que $f''(x)>0$.

A la derecha de $x<0$ la función derivada es decreciente, por lo que $f''(x)<0$.

Por lo tanto, a ambos lados de $x=0$ la segunda derivada cambia de signo. Y como $f''(0)=0$, podemos afirmar que $(0,1)$ existe un punto de inflexión.

Otro chistecillo.

Un niño va a la panadería.

"Me da una barra, por favor. Y si tiene huevos, me da una docena".

El niño se fue a su casa con trece barras de pan...

■ *Estudiar funciones 7* ♣♣

El número de litros por metro cuadrado que llovió en un determinado lugar viene dado por la función siguiente:

$$Q(t)=\frac{-t^3}{8}+\frac{3t^2}{2}-\frac{9t}{2}+10$$

Donde t es el tiempo en días que va desde $t=1$ (lunes) hasta $t=8$ (lunes de la semana siguiente).

a) Determina en qué día de la semana llovió más y en que día llovió menos. ¿Cuántos litros por metro cuadrado llovió esos días?

b) Representa gráficamente la función durante los 8 días.

a) Los días en los que llovió más y en los que llovió menos, dentro de un intervalo, son los extremos absolutos. Para obtenerlos, debemos calcular la imagen de los extremos del intervalo y la imagen de los extremos relativos.

$Q'=\frac{-3}{8}t^2+3t-\frac{9}{2} \rightarrow Q'=0 \rightarrow t=2$, $t=6$ puntos críticos

$$Q''=\frac{-3}{4}t+3$$

$Q''(2)>0 \rightarrow t=2$ es un mínimo relativo → coordenadas $(2,Q(2))=(2,6)$

$Q''(6)<0 \rightarrow t=6$ es un máximo relativo → coordenadas $(6,Q(6))=(6,10)$

Evaluamos los extremos del intervalo en la función.

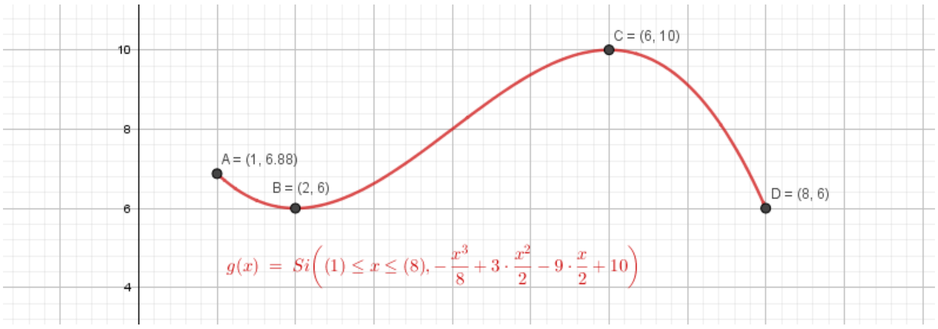
$$(1,Q(1))=(1,6,875)$$

$$(8,Q(8))=(8,6)$$

El día de mayor precipitación (máximo absoluto) es $t=6$ (sábado), con una lluvia de 10 litros por metro cuadrado.

El día de menor precipitación (mínimo absoluto) es $t=2$ (martes) y $t=8$ (lunes de la otra semana), ambos con 6 litros por metro cuadrado.

b) La función es continua por ser polinómica. Hemos obtenido al imagen de los extremos de sus intervalos y la imagen de los extremos relativos, por lo que es fácil trazar su curva en el intervalo $[1,8]$.



■ *Estudiar funciones 8* ♣

Se administra una medicina a un enfermo y t horas después la concentracion en sangre del principio activo viene dada por $c(t)=t e^{-t/2}$ miligramos por mililitro. Determine el valor máximo de $c(t)$ e indique en qué momento se alcanza dicho valor máximo.
Sabiendo que la máxima concentración sin peligro es de 1 mg/ml, señale si en algún momento hay riesgo para el paciente.

La condición necesaria de extremo relativo es primera derivada igual a cero.

$$c'=0 \rightarrow c'=e^{-t/2}+t e^{-t/2}(-1/2) \rightarrow e^{-t/2}+t e^{-t/2}(-1/2)=0 \rightarrow e^{-t/2}(1-\frac{t}{2})=0$$

La exponencianl nunca se anula, por lo que la única solución posible resulta:

$1-\frac{t}{2}=0 \rightarrow t=2\,horas$ → punto crítico

Aplicamos la condición suficiente evaluando el signo de la segunda derivada en el punto crítico.

$$c''=e^{-t/2}(-1/2)+e^{-t/2}(-1/2)+t e^{-t/2}(1/4)$$

$c''(2)=\frac{-e^{-1}}{2}-\frac{e^{-1}}{2}+\frac{e^{-1}}{2}=\frac{-e^{-1}}{2}<0 \rightarrow t=2\,horas$ es un máximo relativo

La concentración que se alcanza en el momento de máximo relativo será la imagen de la función $c(t)$ para $t=2\,horas$.

$$c(2)=2e^{-1}=\frac{2}{e}\simeq 0{,}74$$

La función $c(t)$ solo presenta un extremo relativo, por lo que al ser continua en toda la recta real por ser producto de polinomio y exponencial, el máximo relativo también será absoluto.

Como la concentración máxima resulta $0{,}74\,mg/ml<1\,mg/ml$, en ningún momento hay riesgo para el paciente.

■ *Estudiar funciones 9* ♣♣

Obtener extremos absolutos de $f(x)=(x^2-3)e^{-x+2}$ **en el intervalo** $[-2,4]$ **.**

Obtenemos los extremos relativos, anulando la primera derivada.

$f'(x)=2xe^{-x+2}+(x^2-3)e^{-x+2}(-1) \rightarrow f'(x)=0 \rightarrow e^{-x+2}(2x-x^2+3)=0$

La exponencial nunca se anula, por lo tanto:

$-x^2+2x+3=0$ --> $x=-1$, $x=3$ → puntos críticos

Con la segunda derivada compromobamos si estamos ante un máximo o un mínimo.

$f''(x)=2e^{-x+2}+2xe^{-x+2}(-1)-2xe^{-x+2}-(x^2-3)e^{-x+2}(-1)$

$f''(-1)>0 \rightarrow x=-1$ mínimo relativo → su imagen $f(-1)=-40{,}17$

$f''(3)<0 \rightarrow x=3$ máximo relativo → su imagen $f(3)=2{,}21$

Además, evaluamos la imagen de los extremos del intervalo.

$x=-2 \rightarrow f(-2)=54{,}60$

$x=4 \rightarrow f(4)=1{,}76$

Tendremos un máximo absoluto en la mayor imagen: $(-2, 54{,}60)$

Y un mínimo absoluto en la menor imagen: $(-1, -40{,}17)$

■ *Estudiar funciones 10* ♣

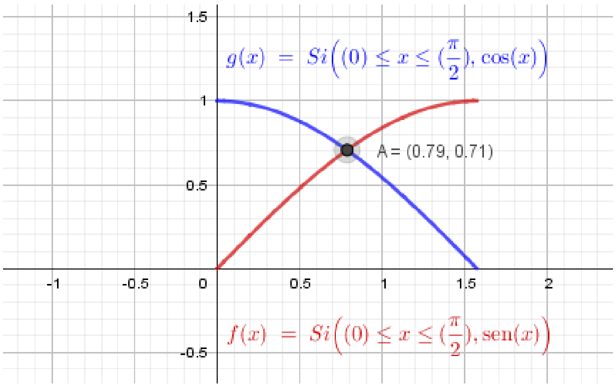
Dibuja sobre los mismos ejes $f(x)=\cos(x)$ **y** $g(x)=sen(x)$ **en el intervalo** $[0,\pi/2]$ **.**

Las gráficas del seno y del coseno son bien conocidas. Cuando nos piden representarlas en los mismos ejes debemos obtener, especialmente, los puntos de corte entre ambas gráficas.

Como solo nos piden dibujarlas en el intervalo $[0,\pi/2]$, solo deberemos resolver la igualdad $sen(x)=\cos(x)$ en ese intervalo.

El único ángulo donde coinciden seno y coseno en el primer cuadrante es 45º, donde $sen(x)=\cos(x)=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

El seno se anula en 0º y alcanza su máximo en 90º. El coseno alcanza su máximo en 0º y se anula en 90º.



■ *Estudiar funciones 11* ♣

Dibuja sobre los mismos ejes $f(x)=x^2-2x$ **y** $g(x)=-x^2+4x$

Las dos funciones son parábolas, por lo tanto, para dibujarlas basta con obtener vértices y determinar si con cóncavas o convexas.

Recuerda que si el coeficiente que acompaña a x^2 es positivo, la parábola es convexa y tendrá un mínimo absoluto y relativo en el vértice. Si el coeficiente es negativo, la parábola es cóncava y tendrá un máximo absoluto y relativo en el vértice.

Los puntos de corte con el eje horizontal se obtienen igulando la función a cero.

El corte con el eje vertical se obtiene evaluando la función en $x=0$.

Los puntos de corte entre ambas funciones, se obtiene igualando ambas funciones: $f(x)=g(x)$.

$f(x)=x^2-2x$

$f'(x)=2x-2 \rightarrow f'(x)=0 \rightarrow 2x-2=0 \rightarrow x=1$ → vértice mínimo relativo

Imagen del vértice → $f(1)=1-2=-1 \rightarrow (1,-1)$

$f(x)=0 \rightarrow x^2-2x=0 \rightarrow x=0 \ , \ x=2 \rightarrow (0,0),(2,0)$ → cortes con eje horizontal

$f(0)=0 \rightarrow (0,0)$ → corte con eje vertical

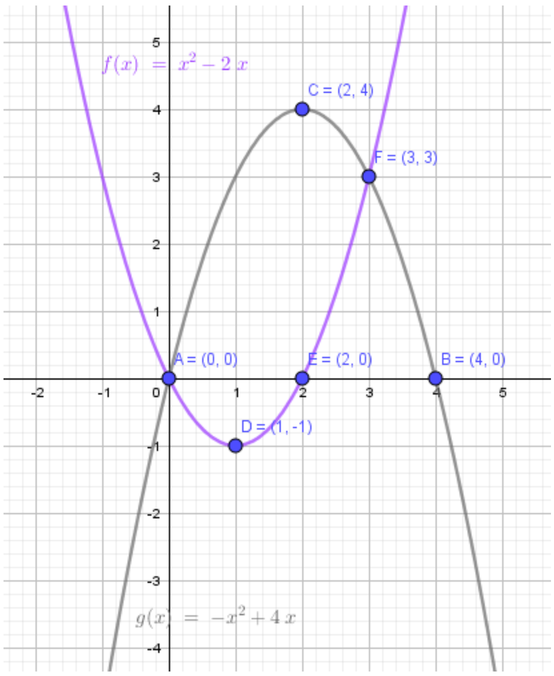
$g(x)=-x^2+4x$

$g'(x)=-2x+4 \rightarrow g'(x)=0 \rightarrow -2x+4=0 \rightarrow x=2$ → vértice máximo relativo

Imagen del vértice → $g(2)=4 \rightarrow (2,4)$

$g(x)=0 \rightarrow -x^2+4x=0 \rightarrow x=0 \ , \ x=4 \rightarrow (0,0),(4,0)$ → cortes con eje horizontal

$g(0)=0 \rightarrow (0,0)$ → corte con eje vertical



$f(x)=g(x) \rightarrow x^2-2x=-x^2+4x \rightarrow 2x^2-6x=0 \rightarrow x=0 \ , \ x=3$ → corte entre funciones → $(0,0)$, $(3,3)$

■ *Estudiar funciones 12* ♣♣

Considera las funciones $f(x)$ y $g(x):\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ dadas por $f(x)=6x-x^2$ y $g(x)=|x^2-2x|$. Esboza el recinto limitado por las gráficas de ambas funciones y calcula los puntos de corte de dichas gráficas.

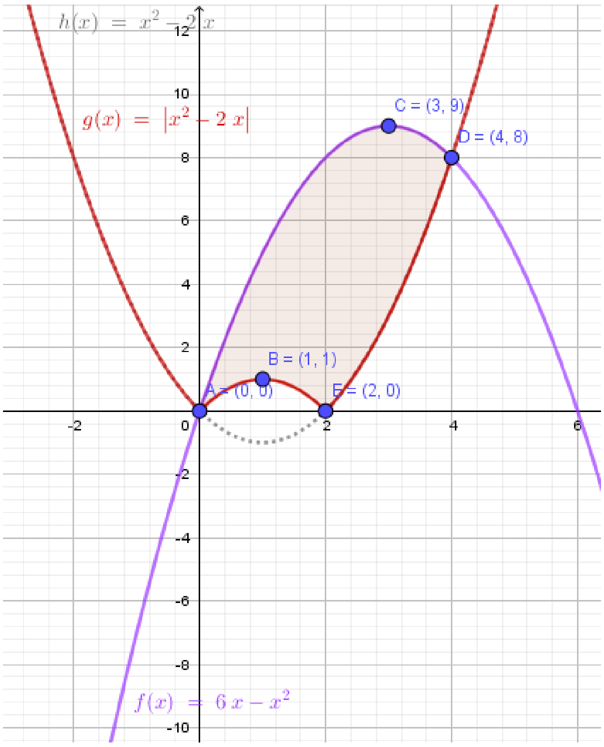
$f(x)=6x-x^2$

$f'(x)=6-2x \rightarrow f'(x)=0 \rightarrow 6-2x=0 \rightarrow x=3$ → vértice máximo relativo

Imagen del vértice → $f(3)=18-9=9 \rightarrow (3{,}9)$

$f(x)=0 \rightarrow 6x-x^2=0 \rightarrow x=0 \;,\; x=6 \rightarrow (0,0),(2,0)$ → cortes con eje horizontal

$f(0)=0 \rightarrow (0{,}0)$ → corte con eje vertical



Para dibujar funciones dentro de un valor absoluto, si conocemos la gráfica de la función dentro del argumento del valor absoluto, es muy cómo dibujar esa gráfica y luego aplicar el valor absoluto: lo que es negativo se vuelve positivo.

Así, llamamos $h(x)=x^2-2x$ al argumento del valor absoluto.

$h(x)=x^2-2x$

$h'(x)=2x-2 \rightarrow h'(x)=0 \rightarrow 2x-2=0 \rightarrow x=1$ → vértice mínimo relativo

Imagen del vértice → $h(1)=1-2=-1 \rightarrow (1,-1)$

$h(x)=0 \rightarrow x^2-2x=0 \rightarrow x=0 \;,\; x=2 \rightarrow (0,0),(2,0)$ → cortes con eje horizontal

$h(0)=0 \rightarrow (0{,}0)$ → corte con eje vertical

Dibujamos ambas funciones, y gráficamente aplicamos valor absoluto a la segunda.

Analíticamente, aplicar avlor absoluto implica eliminar las barras del operador valor absolut y anteponer un signo menos. De esta manera, al igualar als funciones para estudiar los puntos de corte tendremos:

$f(x)=g(x)$

$6x-x^2=x^2-2x \rightarrow x=0 \;,\; x=4 \rightarrow (0,0),(4,8)$ → corte entre las funciones

$6x-x^2=-(x^2-2x) \rightarrow x=0 \rightarrow (0,0)$ → corte entre las funciones

■ *Estudiar funciones 13* ♣♣

Esboza el recinto limitado por la recta $y=4-2x$ **y las gráficas de** $f(x)=3-x^2$ **y** $g(x)=\frac{-x^2}{4}$ **. Calcula todos los puntos de corte entre las gráficas (las dos curvas y la recta).**

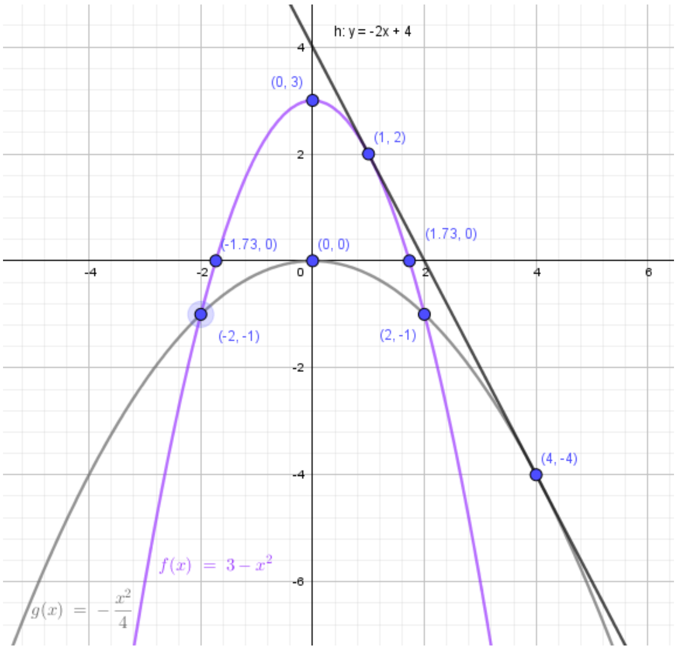
$f(x)=3-x^2$

$f'(x)=-2x \rightarrow f'(x)=0 \rightarrow -2x=0 \rightarrow x=0 \rightarrow$ vértice máximo relativo

Imagen del vértice $\rightarrow f(0)=3 \rightarrow (0,3)$

$f(x)=0 \rightarrow 3-x^2=0 \rightarrow x=\pm\sqrt{3} \rightarrow (+\sqrt{3},0),(-\sqrt{3},0) \rightarrow$ cortes con eje horizontal

$f(0)=3 \rightarrow (0,3) \rightarrow$ corte con eje vertical



$g(x)=\frac{-x^2}{4}$

$g'(x)=\frac{-x}{2} \rightarrow g'(x)=0 \rightarrow \frac{-x}{2}=0 \rightarrow x=0 \rightarrow$ vértice máximo relativo

Imagen del vértice $\rightarrow f(0)=0 \rightarrow (0,0)$

$f(x)=0 \rightarrow \frac{-x^2}{4}=0 \rightarrow x=0 \rightarrow (0,0) \rightarrow$ corte con eje horizontal

$f(0)=0 \rightarrow (0,0) \rightarrow$ corte con eje vertical

La recta $y=4-2x$ es una recta de pendiente negativa que pasa por $(0,4)$ y por $(2,0)$

Los puntos de corte se obtienen igualando, por parejas, todas las funciones.

$f(x)=g(x) \rightarrow (2,-1),(-2,-1)$

$f(x)=y \rightarrow (1,2)$

$g(x)=y \rightarrow (4,-4)$

■ *Estudiar funciones 14* ♣

Obtener la inversa de $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ **y comprobar que** $(f\circ f^{-1})(x)=x$ **y que** $(f^{-1}\circ f)(x)=x$

$y=\dfrac{1}{x-1} \quad \rightarrow \quad x-1=\dfrac{1}{y} \quad \rightarrow \quad x=\dfrac{1}{y}+1 \quad \rightarrow \quad f^{-1}=\dfrac{1}{x}+1$ → función inversa

$$(f\circ f^{-1})(x)=f\left[\frac{1}{x}+1\right]=\frac{1}{\frac{1}{x}+1-1}=x$$

$$(f^{-1}\circ f)(x)=f^{-1}\left[\frac{1}{x-1}\right]=\frac{1}{\frac{1}{x-1}}+1=x$$

■ *Estudiar funciones 15* ♣

Obtener la recta mediatriz del segmento de extremos $A(0,0)$ **y** $(4,2)$ **.**

Primero obtenemos el punto medio del segmento, con la semisuma de la componentes:

$$C\left(\frac{4+0}{2},\frac{2+0}{2}\right)=(2,1)$$

En segundo lugar, obtenemos el vector con los puntos extremos del segmento:

$\vec{AB}=(4-0,2-0)=(4,2)$ → su pendiente es: $m=\frac{2}{4}=\frac{1}{2}$

La mediatriz es perpendicular al vector $\vec{AB}$, por lo que el producto de sus pendientes es -1 .

$$m\cdot m_{mdiatriz}=-1 \quad \rightarrow \quad m_{mediatriz}=-2$$

Con la pendiente de la recta mediatriz y el punto medio, podemos obtener la ecuación punto-pendiente de la recta:

$$-2=\frac{y-1}{x-2}$$

■ *Estudiar funciones 16* ♣

Obtener el ángulo que forma la recta $2x-3y+1=0$ **con el eje horizontal.**

Una manera práctica de obtener el ángulo de una recta respecto al eje horizontal es a partir de la pendiente de la recta. Si la escribimos en forma explícita:

$$y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$$

El coeficiente que acompaña a x es la pendiente → $m=\frac{2}{3}$

La pendiente es la tangente del ángulo que estamos buscando:

$$tg(\alpha)=\frac{2}{3} \quad \rightarrow \quad \alpha=arcotg\left(\frac{2}{3}\right) \quad \rightarrow \quad \alpha=33{,}69^{o}$$

■ *Estudiar funciones 17* ♣

Obtener el ángulo que forman entre sí las rectas $r: 2x-3y+1=0$ **y** $s: x+4y-2=0$ **.**

Dos rectas que no son paralelas se cortan formando cuatro ángulos, iguales dos a dos. El ángulo formado por las rectas se define como el más pequeño de ellos.

Una forma de obtenerlo es operar para obtener el ángulo de cada recta respecto al eje horizontal, y restar finalmente ambos ángulos.

Si escribimos $r: 2x-3y+1=0$ en forma explícita:

$$y=\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$$

El coeficiente que acompaña a x es la pendiente → $m=\frac{2}{3}$

La pendiente es la tangente del ángulo que estamos buscando:

$tg(\alpha)=\frac{2}{3} \rightarrow \alpha=arcotg(\frac{2}{3}) \rightarrow \alpha=33{,}69^{o}$ → ángulo positivo en sentido antihorario, respecto al eje horizontal.

Si escribimos $s: x+4y-2=0$ en forma explícita:

$$y=\frac{-1}{4}x+\frac{1}{2}$$

$tg(\beta)=\frac{-1}{4} \rightarrow \beta=arcotg(\frac{-1}{4}) \rightarrow \beta=-14{,}04^{o}$ → ángulo negativo en sentido horario, respecto al eje horizontal.

La diferencia entre ambos ángulos nos da el ángulo que forman ambas rectas:

$$\alpha-\beta=33{,}69^{o}-(-14{,}04^{o})=47{,}73^{o}$$

Otra forma de obtener este ángulo es a partir de los vectores directores de la recta. Un vector director es paralelo a la recta.

Si $m_r=\frac{2}{3} \rightarrow \vec{u}_r=(3,2)$

Si $m_s=\frac{-1}{4} \rightarrow \vec{u}_s=(4,-1)$

El ángulo formado por ambos vectores es el valor absoluto del cociente entre el producto escalar y el producto de los módulos.

$$\cos(\gamma)=\left|\frac{\vec{u}_r\cdot\vec{u}_s}{|\vec{u}_r|\cdot|\vec{u}_s|}\right| \rightarrow \cos(\gamma)=\left|\frac{(3,2)\cdot(4,-1)}{\sqrt{3^2+2^2}\cdot\sqrt{4^2+(-1)^2}}\right|=\left|\frac{3\cdot4+2\cdot(-1)}{\sqrt{13}\cdot\sqrt{17}}\right|=0{,}67 \rightarrow \gamma=47{,}73^{o}$$

■ *Estudiar funciones 18* ♣♣

Estudiar monotonía de:

a) $f(x)=(2x-1)e^{2x}$

b) $f(x)=x^2|x-3|$

c) $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$

a) La monotonía (crecimiento y decrecimiento de un función), se estudia a partir de los puntos críticos, y evaluando el signo de la derivada en los diferentes intervalos en que se descompone el dominio. Derivada positiva implica función estrictamente creciente. Derivada negativa implica función estrictamente decreciente.

El dominio de $f(x)=(2x-1)e^{2x}$ es toda la recta real,por ser producto de polinomio y exponencial.

$$f'(x)=2e^{2x}+(2x-1)e^{2x}2=e^{2x}(2+4x-2)=e^{2x}4x \rightarrow e^{2x}4x=0$$

La función exponencial nunca se anula, por lo tanto → $x=0$ → punto crítico

Evaluamos el signo de la derivada en los siguientes intervalos:

$(-\infty,0) \rightarrow x=-10 \rightarrow f'(-10)<0$ → función estrictamente decreciente

$(0,\infty) \rightarrow x=10 \rightarrow f'(10)>0$ → función estrictamente creciente

En $x=0$ tenemos un mínimo relativo.

b) El dominio de $f(x)=x^2|x-3|$ es toda la recta real, por ser un polinomio.

Rompemos el valor absoluto.

$$f(x)=\begin{Bmatrix} x^2(-(x-3)) \ si \ x\leq 3 \\ x^2(x-3) \ si \ x>3 \end{Bmatrix} \rightarrow f(x)=\begin{Bmatrix} -x^3+3x^2 \ si \ x\leq 3 \\ x^3-3x^2 \ si \ x>3 \end{Bmatrix}$$

Derivamos la función en cada intervalo y obtenemos sus correspondientes puntos críticos.

$$f'(x)=\begin{Bmatrix} -3x^2+6x \ si \ x<3 \\ 3x^2-6x \ si \ x>3 \end{Bmatrix} \rightarrow f'(x)=0$$

$-3x^2+6x=0 \rightarrow x=0, x=2$ → puntos críticos que sí pertenecen al intervalo $x<3$

$3x^2-6x=0 \rightarrow x=0, x=2$ → no pertenecen al intervalo $x>3$

Estudiamos el signo de la derivada en los siguientes intervalos:

$(-\infty,0) \rightarrow x=-10 \rightarrow f'(-10)<0$ → función estrictamente decreciente

$(0,2) \rightarrow x=1 \rightarrow f'(1)>0$ → función estrictamente creciente

$(2,3) \rightarrow x=\frac{5}{2} \rightarrow f'(\frac{5}{2})<0$ → función estrictamente decreciente

$(3,\infty) \rightarrow x=10 \rightarrow f'(10)>0$ → función estrictamente creciente

Además, en $x=0$ poseemos un mínimo relativo. En $x=2$ un máximo relativo.

En $x=3$ no hay extremos relativo, aunque haya cambio de creciemiento a ambos lados. Ocurre que en $x=3$ no se anula la derivada y, además, si evaluamos la derivada a la izquierda de y a la derecha de ese punto, las derivadas laterales no coinciden. Por lo que la función no es derivable en $x=3$

c) Estudiamos monotonía de $f(x)=x\sqrt{4-x^2}$. El dominio implica que el discriminante sea no negativo. Por lo tanto: $4-x^2\geq 0$ → obtenemos raíces del polinomio: $x=\pm 2$.

Evaluamos el signo de la inecuación en los siguientes intervalos:

$(-\infty,-2)\rightarrow x=-10\rightarrow 4-(-10)^2<0$ → no pertence al dominio

$(-2,2)\rightarrow x=0\rightarrow 4-(0)^2>0$ → sí pertenece al dominio

$(2,\infty)\rightarrow x=10\rightarrow 4-(10)^2<0$ → no pertenece al dominios

Incluyendo a las raíces antes obtenidas, el dominio de la función es $Dom(f)=[-2,2]$

Derivamos e igualamos a cero para obtener puntos críticos.

$$f(x)=x\sqrt{4-x^2}=\sqrt{4x^2-x^4} \quad\rightarrow\quad f'(x)=\frac{8x-4x^3}{2\sqrt{4x^2-x^4}}=\frac{4-2x^2}{\sqrt{4-x^2}} \quad\rightarrow\quad f'(x)=0$$

$4-2x^2=0 \quad\rightarrow\quad x=\pm\sqrt{2}$ → puntos críticos

Evaluamos el signo de la derivada en los siguientes intervalos:

$(-2,-\sqrt{2})\rightarrow x=-1{,}5\rightarrow f'(-1{,}5)<0$ → función estrictamente decreciente

$(-\sqrt{2},\sqrt{2})\rightarrow x=-1\rightarrow f'(-1)>0$ → función estrictamente creciente

$(\sqrt{2},2)\rightarrow x=1{,}5\rightarrow f'(1{,}5)<0$ → función estrictamente decreciente

En $x=-\sqrt{2}$ tenemos un mínimo relativo, $x=\sqrt{2}$ un máximo relativo.