Problemas – Preparación a Selectividad

Resumen de problemas resueltos para preparar Selectividad

Índice de contenido

¿Por qué este resumen?

Tras el duro trabajo en Bachillerato puede venir bien una síntesis de los conceptos teóricos y prácticos esenciales en Matemáticas que suelen aparecer, con mayor frecuencia, en los exámenes de Selectividad.

Estudiar teoría por un lado y problemas por otro, a veces, es tedioso. Por lo que este resumen busca unificar ambas realidades: resolver problemas describiendo la teoría que sustenta las distintas operaciones matemáticas.

¿Significa esto que si comprendo bien los siguientes problemas seguro que saco un 10 en Selectividad? No... pero sí es más probable que realices un buen examen.

¿Recogen estos problemas todos y cada uno de los contenidos de Bachillerato y de Selectividad? No, por Dios, ni mucho menos. Solo son un resumen de los contenidos más comunes en los exámenes de Selectividad de los últimos años.

¿Un consejo de cara a Selectividad? **Explicar todo lo que se hace**. No poner fórmulas y más fórmulas sin más. Dedicar un tiempo a explicar los pasos (por ejemplo, "factorizo el polinomio") y a explicar por qué se hacen las cosas (por ejemplo, "derivo e igualo a cero para aplicar la condición necesaria de extremo relativo).

Un examen bien explicado y ordenado, aunque nos hayamos equivocado al operar en algún paso, es fudamental para obtener una buena nota final.

¿Algún otro consejo? **Leer bien, con calma, las dos opciones del examen**. Leer todos los ejercicios, no solo los dos primeros de cada opción. No pasa nada por gastar 10 minutos en entender qué piden en cada ejercicio y plantear en borrador los pasos generales que habría que dar. Y una vez elegida una opción, no cambiar de opinión a mitad del examen.

Ejercicios de límites

■ *Límites 1*

Sabiendo que $\lim_{x \to 0} \frac{a x^2 + b x + 1 - \cos(x)}{sen(x^2)}$ **es finito e igual a uno, calcula los valores de** a **y** b **.**

Frente a un límite siempre debemos, **en primer lugar, evaluar**. Es decir, sustituir la variable x por el valor al que tiende.

Si al evaluar obtenemos un resultado finito o infinito, ya hemos terminado. Si aparece una indeterminación, debemos **indicar el tipo de indeterminación y resolverla**.

$$\lim_{x \to 0} \frac{a x^2 + b x + 1 - \cos(x)}{sen(x^2)} = \frac{0+0+1-1}{sen(0)} = \frac{0}{0} \equiv indeterminación$$

En las indeterminaciones $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$ podemos aplicar la **regla de L'Hôpital** siempre que se cumplan las siguientes condiciones (y siempre debemos **nombrar estas condiciones** a la hora de resolver un problema por L'Hôpital):

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en un entorno cerrado arbitrario alrededor de x_0 , es decir $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ con $\delta > 0$. Sean además las dos funciones derivables en $\{(x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}\}$, tales que $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = 0$ ó $\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} g(x) = \infty$.

Sea $g'(x) \neq 0, \ \forall x \in \{(a, b) - \{x_0\}\}$.

Entonces, si existe $\lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ también existe $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y los límites son iguales. Es decir:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

El resultado final del límite puede ser un valor $L \in \mathbb{R}$ o infinito. Y el valor x_0 puede ser un valor finito o infinito.

Estas condiciones se cumplen en nuestro ejercicio, por lo tanto:

$$\lim_{x \to 0} \frac{a x^2 + b x + 1 - \cos(x)}{sen(x^2)} \to \text{L'Hôpital} \to \lim_{x \to 0} \frac{2 a x + b + sen(x)}{2 x \cos(x^2)} = \frac{b}{0}$$

Para que el límite sea finito, necesitamos que el numerador también tienda a 0 . En caso contario, **un cociente con numerador no nulo dividido por** 0 **se dispararía a infinito**. Por lo tanto, anulamos el numerador → $b = 0$

Una vez obtenido el valor $b=0$ sustituimos en el límite y evaluamos nuevamente.

$$\lim_{x\to 0}\frac{2ax+sen(x)}{2x\cos(x^2)}=\frac{0}{0}\equiv indeterminación \quad \to \text{L'Hôpital} \to$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{2a+\cos(x)}{2[\cos(x^2)+x\cdot(-2\cdot x\cdot sen(x^2))]}=\frac{2a+1}{2[1+0]}=\frac{2a+1}{2}$$

Según el enunciado el límite debe converger a 1 . Por lo tanto:

$$\frac{2a+1}{2}=1 \quad\to\quad 2a+1=2 \quad\to\quad a=\frac{1}{2}$$

■ *Límites 2*

Resolver:

a) $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}$ **b)** $\lim_{x\to\infty}\frac{-3x^2+5}{4x^2-x+1}$ **c)** $\lim_{x\to-\infty}\frac{x^3+x^2-x+2}{x^2+1}$

Recuerda que un polinomio, en el infinito, siempre tiende a infinito. Y el signo $\pm\infty$ o $-\infty$ vendrá determinado por el grado del polinomio y por el coeficiente que acompaña al termino de mayor grado.

Por ejemplo, si $x\to\infty$ el polinomio $4x^2-x+1$ irá a $+\infty$. Y el binomio $-3x+5$ irá a $-\infty$.

Si $x\to-\infty$ el polinomio $4x^2-x+1$ irá a $+\infty$. Y el binomio $-3x+5$ irá a $+\infty$.

a) Evaluamos en el límite → $\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=\frac{\infty}{\infty}\equiv indeterminación$

Podemos resolver esta indeterminación por L'Hôpital, o bien **dividiendo todos los términos por el mayor grado x^n que aparezca en el cociente.** En este ejemplo, dividiríamos todo por x^2 .

Al dividir por el mayor grado, siempre se cumple la siguiente regla (que podemos indicar en nuestro examen para resolver el ejercicio): en un cociente de polinomios, cuando $x\to\infty$ o $x\to-\infty$, si el grado del numerador es menor que el grado del denominador, el límite tiende a 0 .

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+1}=0$$

b) Evaluamos en el límite → $\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2+5}{4x^2-x+1} = \frac{-\infty}{\infty} \equiv indeterminación$

Podemos resolver por L'Hôpital, o bien aplicar la regla general fruto de dividir todos los términos por el mayor grado x^n que aparezca en el cociente (en el ejemplo, x^2): en un cociente de polinomios, cuando $x\to\infty$ o $x\to-\infty$, si el grado del numerador es igual que el grado del denominador, el límite tiende al cociente de los coeficientes que acompañan a los términos de mayor grado x^n .

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-3x^2+5}{4x^2-x+1} = \frac{-3}{4}$$

c) Evaluamos en el límite → $\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x^2-x+2}{x^2+1} = \frac{-\infty}{\infty} \equiv indeterminación$

Podemos resolver por L'Hôpital, o bien aplicar la regla general fruto de dividir todos los términos por el mayor grado x^n que aparezca en el cociente (en el ejemplo, x^3): en un cociente de polinomios, cuando $x\to\infty$ o $x\to-\infty$, si el grado del numerador es mayor que el grado del denominador, el límite tiende a $+\infty$ ó $-\infty$, según el grado de cada polinomio y según el coeficiente que acompaña al termino de mayor grado .

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{x^3+x^2-x+2}{x^2+1} = -\infty$$

■ *Límites 3*

Obtener el valor de k **que satisface** $\lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2}-\sqrt{4x^2+kx-1}=4$

Evaluamos en el límite. Recuerda que la raíz cuadrada de infinito también vale infinito. Por lo tanto:

$$\lim_{x\to\infty} \sqrt{4x^2}-\sqrt{4x^2+kx-1}=\infty-\infty\equiv indeterminación$$

Este tipo de indeterminaciones vamos a resolverlas **multiplicando y dividiendo por el conjugado de la expresión con radicales** (siempre que aparezcan raíces, ya sea restando o en un cociente, es buena idea aplicar esta técnica del conjugado).

Aparecerá suma por diferencia de un bonomio, que se resuelve como diferencia de cuadrados.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(\sqrt{4x^2}-\sqrt{4x^2+kx-1})\cdot(\sqrt{4x^2}+\sqrt{4x^2+kx-1})}{\sqrt{4x^2}+\sqrt{4x^2+kx-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{4x^2-4x^2-kx+1}{\sqrt{4x^2}+\sqrt{4x^2+kx-1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{-kx+1}{\sqrt{4x^2}+\sqrt{4x^2+kx-1}}$$

En el numerador tenemos un polinomio de grado 1 . Y en el denominador tenemos polinomios de grado 2 dentro de raíces cuadradas, por lo que su comportamiento en el infinito es similar al de un polinomio de grado 1 . Es decir, podemos reducir nuestro estudio al cociente de polinomios del mismo grado. El límite final será el cociente de los coeficientes que acompañan a los términos de mayor grado x^n .

En el numerador $-k$ acompaña a x , y el denominador 4 acompaña a x^2 , por lo que al estar dentro de una raíz sale como $\sqrt{4}=2$. Es decir:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{-kx+1}{\sqrt{4x^2}+\sqrt{4x^2+kx-1}}=\frac{-k}{\sqrt{4}+\sqrt{4}}=\frac{-k}{2+2}=\frac{-k}{4}$$

El enunciado afirma que el límite es igual a 4 → $\frac{-k}{4}=4$ → $k=-16$

■ *Límites 4*

Resolver $\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x)$

Evaluamos → $\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x)=0\cdot(-\infty)\equiv indeterminación$

Recuerda que la gráfica del logaritmo tiene una asíntota vertical a la derecha de 0 .

Este tipo de indeterminaciones se resuelven **dando la vuelta a uno de los término del producto, para buscar una indeterminación donde podamos aplicar L'Hôpital**. Es común dar la vuelta al término más sencillo de los dos, en este caso $x=\frac{1}{\frac{1}{x}}$.

$$\lim_{x\to 0^+} x\cdot\ln(x)=\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}}=\frac{-\infty}{\infty}$$

Enunciaríamos las condiciones de la regla de L'Hôpital (no lo vayas a olvidar) y resolveríamos derivando numerador y denominador por separado.

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \rightarrow \text{L'Hôpital} \rightarrow \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-1}{x^2}} = \lim_{x \to 0^+} (-x) = 0$$

Donde hemos simplificado antes de evaluar finalmente. **No olvides simplificar, si es posible**, tras haber aplicado L'Hôpital.

■ *Límites 5*

Resolver $\lim_{x \to 0^+} x^x$

Evaluamos → $\lim_{x \to 0^+} x^x = 0^0 \equiv indeterminación$

Este tipo de indeterminaciones, y en las tipo ∞^0 y 1^∞ , pueden resolverse a**plicando primero función logaritmo y luego función exponencial, que es la inversa del logaritmo**. Es decir:

$$\lim_{x \to 0^+} \ln(x^x) = \lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln(x) = 0 \cdot (-\infty) \equiv indeterminación$$

Donde hemos aplicado la propiedad del logaritmo de una potencia, donde el exponente pasa a multiplicar al logaritmo de la base de la potencia.

Hemos llegado al mismo límite del ejemplo anterior. Repetiríamos todos los pasos allí indicados y resolveríamos.

$$\lim_{x \to 0^+} x \cdot \ln(x) = 0$$

Este resultado es el logaritmo del límite de partida, por lo que aplicamos exponencial para que cancele con logaritmo. Así obtenendremos el límite de partida.

$$\lim_{x \to 0^+} x^x = e^0 = 1$$

■ *Límites 6*

Resolver $\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2-x-2}$

Evaluamos → $\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2-x-2} = \frac{0}{0} \equiv indeterminación$

¿Cómo resolver? **Factorizando** numerador y denominador, **simplificando** y **evaluando** nuevamente.

$$\lim_{x \to -1} \frac{x+1}{x^2-x-2} = \lim_{x \to -1} \frac{x+1}{(x+1) \cdot (x-2)} = \lim_{x \to -1} \frac{1}{(x-2)} = \frac{-1}{3}$$

Ejercicios de asíntotas

■ *Asíntotas 1*

Estudia las asíntotas de $f(x)=\frac{x}{x^2-1}$

Una función puede tener asíntotas verticales (A.V.), asíntotas horizontales (A.H.) y/o asíntotas oblicuas (A.O.).

Los puntos candidatos a A.V. son los puntos frontera de los intervalos donde no está definida la función. En el caso de un cociente de polinomios, basta con ver los puntos que anulan al denominador.

$$x^2-1=0 \quad \rightarrow \quad x=\pm 1 \quad \rightarrow \quad \lim_{x\to 1}\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{0}=\infty \quad , \quad \lim_{x\to -1}\frac{x}{x^2-1}=\frac{-1}{0}=\infty$$

Siempre, siempre, **siempre que aparezca infinito en un límite de A.V. debemos estudiar los límites laterales**, para determinar si la función tiende a $+\infty$ o a $-\infty$.

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{0^-}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to 1^+}\frac{x}{x^2-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty \quad \rightarrow \text{A.V. en } \quad x=1$$

$$\lim_{x\to -1^-}\frac{x}{x^2-1}=\frac{-1}{0^+}=-\infty \quad , \quad \lim_{x\to -1^+}\frac{x}{x^2-1}=\frac{-1}{0^-}=+\infty \quad \rightarrow \text{A.V. en } \quad x=-1$$

Las A.H. aparecen cuanto estudiamos el comportamiento de la función en el infinito. Por lo que debemos estudiar los siguientes límites.

$$\lim_{x\to \infty}\frac{x}{x^2-1}=0 \quad \rightarrow \text{Donde el grado del numerador es mayor que el grado del denominador}$$

$$\lim_{x\to -\infty}\frac{x}{x^2-1}=0 \quad \rightarrow \text{Donde el grado del numerador es mayor que el grado del denominador}$$

Existe A.H. en la recta horizontal $y=0$. Por norma general, en cociente de polinomios, es suficiente que estudiemos el límite en $+\infty$. Pero ojo, si aparecen exponenciales y/o logaritmos es bueno que estudiemos el límite tanto en $+\infty$ como en $-\infty$, ya que las A.H. pueden aparecer solo en un lado de la función.

Por último, como regla general, **si existen A.H. no tendremos A.O**. No olvidemos indicar este dato: debemos escribir explícitamente que no existen A.O. porque tenemos A.H.

■ *Asíntotas 2*

Estudia las asíntotas oblicuas de $f(x)=\frac{x^2}{2x-1}$

Una asíntota oblicua es una recta con pendiente no nula, de forma general $y=mx+n$, donde m es la pendiente de la recta y n el valor de la ordenada en el origen.

Cada parámetro de la recta se calcula con un límite asociado.

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} \quad \rightarrow \quad m=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{2x^2-x} \quad \rightarrow \quad m=\frac{1}{2}$$

Donde hemos usado que el valor del límite, al ser cociente de polinomios del mismo grado en el infinito, es igual al cociente de los coeficientes que acompañan al mayor grado x^2 .

Si $m=0$ significa que o bien nos hemos equivocado en las operaciones, o bien que no existe A.O (una recta con pendiente nula es una recta horizontal, por lo que determinaría una A.H.).

$$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx) \quad \rightarrow \quad n=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2}{2x-1}-\frac{1}{2}x\right) \quad \rightarrow \quad n=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-2x^2+x}{4x-2}$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{4x-2} \quad \rightarrow \quad n=\frac{1}{4}$$

Donde nuevamente usamos que el valor del límite es igual al cociente de los coeficientes que acompañan al mayor grado x .

La A.O. resulta → $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}$

Ejercicios de continuidad

■ *Continuidad 1*

Obtener el dominio de definición de $f(x)=\sqrt{\dfrac{x}{x^2-5x+6}}$

Necesitamos que el **argumento de la raíz sea positivo o cero**. Igualmente, debemos **desestimar los valores que anulan al denominador del cociente**.

Planteamos la siguiente inecuación. Recuerda que **la solución de una inecuación es un intervalo o la unión de varios intervalos**.

$$\frac{x}{x^2-5x+6}\geq 0$$

En una inecuación con cociente, debemos obtener las raíces del numerador y del denominador. Al tener la inecuación el signo igual, las raíces del numerador pueden formar parte del intervalo solución final. Las raíces del denominador nunca formarán parte de la solución final, ya que no podemos dividir por cero.

$$x=0$$

$$x^2-5x+6=0 \quad\rightarrow\quad x=2 \quad , \quad x=3$$

Evaluamos el signo del cociente en los distintos intervalos formados por las raíces.

$si \quad x<0 \quad\rightarrow\quad x=-10 \quad\rightarrow\quad \dfrac{-10}{(-10)^2-5(-10)+6}<0$ → No cumple la desigualdad de partida

$si \quad 0<x<2 \quad\rightarrow\quad x=1 \quad\rightarrow\quad \dfrac{1}{(1)^2-5(1)+6}>0$ → Sí cumple la desigualdad de partida

$si \quad 2<x<3 \quad\rightarrow\quad x=\dfrac{5}{2} \quad\rightarrow\quad \dfrac{\frac{5}{2}}{\left(\frac{5}{2}\right)^2-5\left(\frac{5}{2}\right)+6}<0$ → No cumple la desigualdad de partida

$si \quad x>3 \quad\rightarrow\quad x=10 \quad\rightarrow\quad \dfrac{10}{(10)^2-5(10)+6}>0$ → Sí cumple la desigualdad de partida

El dominio de la función es → $D(f)$ = [0 , 2) U $(3,+\infty)$

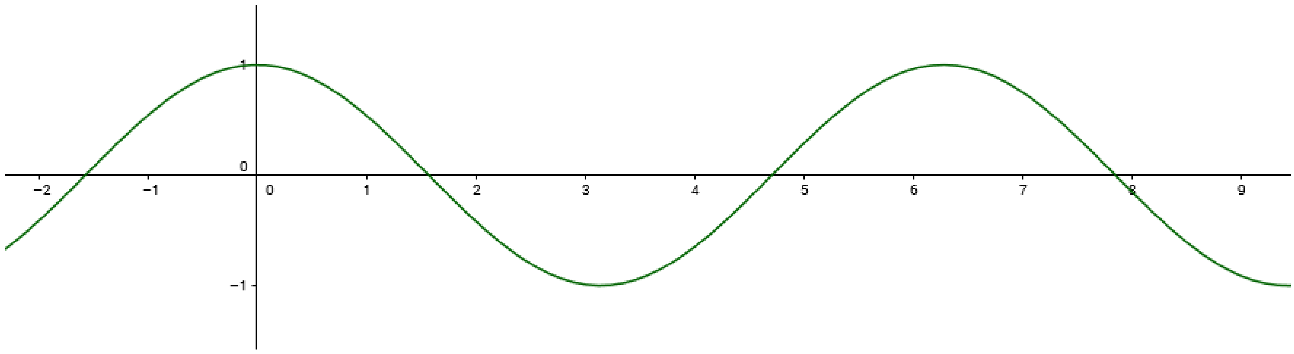
■ *Continuidad 2*

Obtener el dominio de $f(x)=\ln(\cos(x))$ **en el intervalo** $[0,2\pi]$ **.**

La **función logaritmo** está correctamente definida siempre que su **argumento sea positivo**. Por lo que planteamos la siguiente desigualdad estrica (que no incluye al signo igual).

$$\cos(x)>0$$

Recordando la gráfica de la función coseno es muy fácil determinar los intervalos donde la función es positiva dentro de $[0,2\pi]$.



Viendo la gráfica concluimos:

$Dom(f)$ = [0, $\frac{\pi}{2}$) U ($\frac{3\pi}{2}$, 2π]

¿Qué gráfica de funciones elementales es bueno tener siempre en mente? **Logaritmo, exponencial, seno, coseno, tangente, rectas crecientes/decrecientes, parábolas cóncavas/convexas, raíz cuadrada y** x^3 .

Recordando que si a una función le sumamos una cantidad $k>0$ lo que hacemos es desplazar su gráfica k unidades hacia arriba. SI le restamos una cantidad $k>0$ lo que hacemos es desplazar su gráfica k unidades hacia abajo.

De la misma forma $f(x-k)$ desplaza la gráfica $f(x)$ un total de k unidades hacia la derecha.Y $f(x+k)$ desplaza la gráfica $f(x)$ un total de k unidades hacia la izquierda.

■ Continuidad 3

Estudia la continuidad y discontinuidad de $f(x)=\begin{cases} \dfrac{sen(x)}{x} & si \quad -3<x<0 \\ x^2+1 & si \quad 0\leq x\leq 1 \\ \dfrac{e^{(x-1)}-1}{x^2-1} & si \quad 1<x\leq 5 \end{cases}$ **en su dominio.**

Estudiamos la continuidad primero en los **intervalos abiertos de cada trozo de la función**, y luego en los **puntos frontera que separan cada intervalo**.

$si \quad -3<x<0 \quad \rightarrow \quad f(x)=\dfrac{sen(x)}{x}$ → cociente de funciones continuas en toda la recta real. El denominador se anula en $x=0$, que no pertenece al intervalo $-3<x<0$, por lo que $f(x)$ es continua.

$si \quad -0\leq x\leq 1 \quad \rightarrow \quad f(x)=x^2+1$ → función continua por ser polinómica.

$si \quad 1<x\leq 5 \quad \rightarrow \quad \dfrac{e^{(x-1)}-1}{x^2-1}$ → cociente de funciones continuas en toda la recta real. El denominador se anula en $x=\pm 1$, que no pertenece al intervalo $1<x<5$, por lo que $f(x)$ es continua.

Estudiamos los puntos frontera. **Una función es continua en un punto si está definida la función en ese punto, si coinciden los límites laterales y si el valor del límite es igual a la imagen del punto en la función**.

El punto $x=-3$ no lo estudiamos porque la función no está definida en ese punto.

$x=0$

$f(0)=1$

$L^-=\lim_{x\rightarrow 0^-}\dfrac{sen(x)}{x}=\dfrac{0}{0}\equiv indeterminación$ → L'Hôpital (recuerda enunciar siempre la regla, con sus condiciones, antes de aplicarla) → $L^-=\lim_{x\rightarrow 0^-}\dfrac{\cos(x)}{1}=1$

$L^+=\lim_{x\rightarrow 0^+}(x^2+1)=1$

$L^-=L^+=1 \quad \rightarrow \quad L=1$

$f(0)=L \quad \rightarrow \quad 1=1 \quad \rightarrow \quad f(x)$ es continua en $x=0$

$x=1$

$f(1)=2$

$L^{-}=\lim_{x\to 1^{-}}(x^2+1)=2$

$L^{+}=\lim_{x\to 1^{+}}\frac{e^{(x-1)}-1}{x^2-1}=\frac{1-1}{1-1}=\frac{0}{0}\equiv indeterminación$ → L'Hôpital → $L^{+}=\lim_{x\to 1^{+}}\frac{e^{(x-1)}}{2x}=\frac{1}{2}$

$L^{-}\neq L^{+}$ → $2\neq\frac{1}{2}$ → Al no coincidir los límites laterales $f(x)$ no es continua en $x=1$

$x=5$

$f(5)=\frac{e^4-1}{24}$

$L^{-}=\lim_{x\to 5^{-}}\frac{e^{(x-1)}-1}{x^2-1}=\frac{e^4-1}{24}$ → La función no está definida a la derecha de $x=5$, por lo que no tiene sentido preguntarnos por el límite derecho L^{+} → En este caso el límite de la función en $x=5$ coincide con el valor del límite izquierdo → $L^{-}=L=\frac{e^4-1}{24}$

$f(5)=L$ → $\frac{e^4-1}{24}=\frac{e^4-1}{24}$ → $f(x)$ es continua en $x=5$

Llegados a este punto, como me sobra un espacio en blanco la mar de mono, voy a poner **un chistecillo para amenizar** la lectura y comprensión de estos gloriosos ejercicios.

Esto es un gato y un gallo que tienen un golpe con sus coches. Y dice el gato:

“¡Miauto, miauto, miauto!”

A lo que responde el gallo:

“¡Ki ki ki kiere ke le haga!”.

Ejercicios de derivabilidad

■ *Derivabilidad 1*

Estudia la derivabilidad de $f(x)=\begin{Bmatrix} \sqrt{x} & si & 0\le x\le 1 \\ x^2 & si & x>1 \end{Bmatrix}$ **en** $x_0=1$ **usando la definición formal de derivada.**

Para que **una función sea derivable en un punto debe ser continua en ese punto y coincidir las derivadas laterales en ese punto**.

Además, al derivar, el problema nos pide usar la definición formal de derivada $f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ y no usar directamente las reglas de las tablas de derivación.

Comenzamos estudiando la continuidad en $x_0=1$. No estudio la continuidad en los intervalos abiertos donde la función está definida, ya que no me lo pide el enunciado.

Una función es continua en un punto si se cumplen las siguientes tres condiciones:

1. Debe existir imagen de $x_0 \rightarrow f(x_0) \rightarrow f(1)=\sqrt{1}=1$
2. Deben coincidir los límites laterales en x_0 . Es decir:

$$L^-=\lim_{x\to x_0^-} f(x) \rightarrow L^-=\lim_{x\to 1^-}\sqrt{x}=1$$

$$L^+=\lim_{x\to x_0^+} f(x) \rightarrow L^+=\lim_{x\to 1^+}(x^2)=1$$

$L^-=L^+=1 \rightarrow L=1$ → El límite vale 1

3. Deben coincidir la imagen del punto y el límite → $f(x_0)=L \rightarrow 1=1$

Por lo tanto, la función es continua en $x_0=1$.

Continuamos calculando la derivada de la función, pero a partir de la definición formal de derivada.

$$\frac{d[\sqrt{x}]}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}\cdot\frac{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\lim_{h\to 0}\frac{x+h-x}{h\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}=\lim_{h\to 0}\frac{h}{h\cdot(\sqrt{x+h}+\sqrt{x})}$$

$$\lim_{h\to 0}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{d[x^2]}{dx}=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^2-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x^2+h^2+2hx-x^2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h^2+2hx}{h}=\lim_{h\to 0} h+2x=2x$$

Ya podemos escribir la función derivada de la función a trozos de partida (recuerda **dejar los intervalos abiertos, sin el signo igual, ya que aún no hemos demostrado que sea derivable en el punto frontera que separa los intervalos**).

$$f'(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{2\sqrt{x}} & si \quad 0<x<1 \\ 2x & si \quad x>1 \end{cases}$$

Estudiamos las derivadas laterales a izquierda y derecha de $x_0=1$. Recuerda que **una derivada lateral es hacer el límite correspondiente a la función derivada**. Es decir.

$$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{1}{2} \quad , \quad f'(1^+)=\lim_{x\to 1^+}2x=2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}\neq 2$$

Las derivadas laterales no coinciden. La función no es derivable en $x_0=1$.

Insisto una vez más. Al obtener las derivadas laterales tenemos que hacer un límite. Si al evaluar obtenemos un valor finito o infinito, ya tenemos el valor del límite lateral. Y si aparece una indeterminación, aplicamos las reglas conocidas de resolución de indeterminaciones.

■ *Derivabilidad 2*

Obtener la recta tangente y normal a $f(x)=\ln(x+1)-\dfrac{1}{x+1}$ **en** $x=0$ **.**

La **interpretación geométrica de la derivada** afirma que la derivada de la función en un punto es igual a la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto.

Y con la pendiente m y un punto de la recta (x_0, y_0) , podemos obtener la recta tangente a la función en ese punto.

Primero derivamos.

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{x+1+1}{(x+1)^2}=\frac{x+2}{(x+1)^2} \quad \rightarrow \quad f'(0)=2 \quad \rightarrow \quad m=2$$

En segundo lugar obtenemos la imagen en la función del valor $x=0 \quad \rightarrow \quad f(0)=-1$

$$(x_0, y_0)=(0,-1)$$

Recuerda, **la pendiente se obtiene evaluando en la derivada** y **la imagen evaluando en la función de partida**. No te líes.

Podemos usar la ecuación punto-pendiente de la recta.

$$m=\frac{y-y_0}{x-x_0} \rightarrow 2=\frac{y+1}{x-0} \rightarrow y=2x-1$$

También podemos llegar al mismo resultado usando directamente la ecuación explícita de la recta.

$$y=mx+n \rightarrow y=2x+n \rightarrow -1=2\cdot 0+n \rightarrow -1=n \rightarrow y=2x-1$$

Esta es la recta tangente a la función en $x=0$.

¿Qué relación hay entre la recta tangente y la recta normal? Ambas son perpendiculas. Y el producto de las pendientes de dos rectas perpendiculares es igual a -1 .

$$m_t\cdot m_n=-1 \rightarrow 2\cdot m_n=-1 \rightarrow m_n=\frac{-1}{2}$$

Con la pendiente de la recta normal y el punto ya conocido $(x_0,y_0)=(0,-1)$ podemos obtener la ecuación de la recta normal.

$$m_n=\frac{y-y_0}{x-x_0} \rightarrow \frac{-1}{2}=\frac{y+1}{x-0} \rightarrow y=\frac{-1}{2}x-1$$

■ *Derivabilidad 3*

Obtener la recta tangente a $f(x)=arcotg(x)$ paralela a la recta que pasa por los puntos $A(1,3)$ y $B(-2,0)$.

Dos rectas paralelas tienen la misma pendiente m . Por lo que debemos obtener la pendiente de la recta que pasa por los dos puntos dados.

Esa recta viene dada por la expresión:

$$\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{x-x_1} \rightarrow \frac{0-3}{-2-1}=\frac{y-3}{x-1} \rightarrow 1=\frac{y-3}{x-1} \rightarrow m=1$$

Según la interpretación geométrica de la derivada, debemos obtener el punto de la función cuya derivada coincida con el valor de la pendiente $m=1$.

$$f'(x)=\frac{1}{1+x^2} \rightarrow \frac{1}{1+x^2}=1 \rightarrow 1=1+x^2 \rightarrow x=0$$

Calculamos la imagen del punto $x=0 \rightarrow f(0)=arcotg(0)=0 \rightarrow (x_0, y_0)=(0,0)$

Y con la pendiente y un punto, podemos escribir la ecuación de la recta tangente a la función en ese punto.

$$m=\frac{y-y_0}{x-x_0} \rightarrow 1=\frac{y}{x} \rightarrow y=x$$

■ *Derivabilidad 4*

Obtener a **y** b **para que** $f(x)=\left\{\begin{array}{ll} a\cdot\cos(x)+2x & si \quad x<0 \\ a^2\cdot\ln(x+1)+\dfrac{b}{x+1} & si \quad x\geq 0 \end{array}\right\}$ **sea derivable en** $x=0$ **.**

En estos problemas de determinar dos parámetros en una función definida en dos trozos, **suele aparecer una condición al estudiar la continuidad y otra condición a estudiar la derivabilidad**. Con esas condiciones, podremos formar un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas que resolveremos.

Primero estudiamos la continuidad en $x=0$.

$$f(0)=a\cdot\cos(0)+2\cdot 0=a$$

$$L^-=\lim_{x\to 0^-}(a\cdot\cos(x)+2x)=1 \quad , \quad L^+=\lim_{x\to 0^+}\left(a^2\cdot\ln(x+1)+\frac{b}{x+1}\right)=b \rightarrow L^-=L^+ \rightarrow a=b$$

$f(0)=L \rightarrow a=b \rightarrow f(x)$ es continua en $x=0$ siempre que se cumpla $a=b$

Derivamos la función a trozos. Recuerda quitar el signo igual en el punto frontera, ya que eso es precisamente lo que queremos demostrar ahora: saber si es derivable en el punto frontera $x=0$.

$$f'(x)=\left\{\begin{array}{ll} -a\cdot sen(x)+2 & si \quad x<0 \\ \dfrac{a^2}{x+1}-\dfrac{b}{(x+1)^2} & si \quad x>0 \end{array}\right\}$$

La función será derivable en $x=0$ si coinciden las derivadas laterales.

$$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}(-a\cdot sen(x)+2)=2 \quad , \quad f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}(\frac{a^2}{x+1}-\frac{b}{(x+1)^2})=a^2-b \quad \rightarrow \quad 2=a^2-b$$

$f(x)$ es derivable en $x=0$ si se cumple la condición $2=a^2-b$

Llegamos al siguiente sistema.

$\begin{Bmatrix} a=b \\ a^2-b=2 \end{Bmatrix}$ → Sustituimos la primera ecuación en la segunda → $a^2-a-2=0$

Resolvemos → $a=-1$, $a=2$

Las soluciones finales que garantizan la derivabilidad en $x=0$ son dos:

$a=-1$, $b=-1$

$a=2$, $b=2$

■ *Derivabilidad 5*

Demuestra que la función $f(x)=x-\sqrt{x}$ tiene una única solución para $x>\frac{1}{4}$.

En primer lugar demostremos, por el **Teorema de Bolzano**, que la función $f(x)=x-\sqrt{x}$ tiene al menos una solución real para $x>\frac{1}{4}$. Para ello buscamos un intervalo cerrado donde la función sea continua y cambie de signo al ser evaluada en los extremos del intervalo.

$$Si \quad f(x) \quad continua \quad en \quad [a,b] \quad y \quad f(a)\cdot f(b)<0 \quad \rightarrow \quad \exists c\in(a,b)/f(c)=0$$

El dominio de la función son todos los números reales positivos más el 0 , por lo que podemos considerar el siguiente intervalo:

$$[\frac{1}{4},10] \quad \rightarrow \quad f(\frac{1}{4})<0 \quad , \quad f(10)>0 \quad \rightarrow \quad \exists c\in(\frac{1}{4},10)/f(c)=0$$

Una vez demostrada la existencia de al menos una solución real para $x>\frac{1}{4}$, demostremos que es única por reducción al absurdo y aplicando el **Teorema de Rolle**.

Nuestra hipótesis de partida es que existen dos soluciones $x=c_1>\frac{1}{4}$, $x=c_2>\frac{1}{4}$ tal que $f(c_1)=f(c_2)=0$. Como la función es continua en $\mathbb{R}^+ +\{0\}$, será continua en $[c_1, c_2]$ por ser positivos ambos extremos del intervalo. Además nuestra función es derivable en el intervalo $(0,+\infty)$, por lo que también es derivable en (c_1, c_2) . Así estamos en condiciones de aplicar el Teorema de Rolle.

$$Si \quad f(x) \quad continua \quad en \quad [c_1, c_2] \quad ,derivable \quad en \quad (c_1, c_2) \quad y \quad f(c_1)=f(c_2) \quad \rightarrow$$
$$\rightarrow \quad \exists \varphi \in (c_1, c_2) / f'(\varphi)=0$$

Derivamos la función e igualamos a cero.

$$f(x)=x-\sqrt{x} \quad \rightarrow \quad f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}} \quad , \quad f'(\varphi)=0 \quad \rightarrow \quad \varphi=\frac{1}{4}$$

Y llegamos a un absurdo, ya que hemos supuesto que c_1 y c_2 son mayores que $\frac{1}{4}$, por lo que nuestra hipótesis de partida es falsa. Solo existe una única solución para $x>\frac{1}{4}$.

Y aquí tengo otro huequecillo para un **chiste**.
Estos son dos tomates que cruzan la carretera. Y de pronto dice uno al otro:
"¡Cuidado con el camión, sshhooff!"
Y responde el otro tomate:
"¿Qué?, ¡sshhooff!"

Ejercicios de optimización

■ *Optimización 1*

Obtener las dimensiones del rectángulo inscrito en la circunferencia de radio unidad y centrada en el origen de coordenadas, con mayor área posible. Obtener el valor de dicha área máxima.

Para resolver los problemas de optimización puede ser útil seguir el **siguiente esquema de trabajo**:

1. Hacer un dibujo ilustrativo (si es posible).

2. Indicar claramente cuál es la magnitud que debemos optimizar (perímetro, área, volumen, distancia, coste económico, tiempo, etc.). Para este tipo de problemas es bueno tener claro las fórmulas del perímetro, área y volumen de las siguientes figuras geométricas: **triángulo, rectángulo, círcunferencia, círculo, esfera, cilindro, cono y paralelepípedo**.

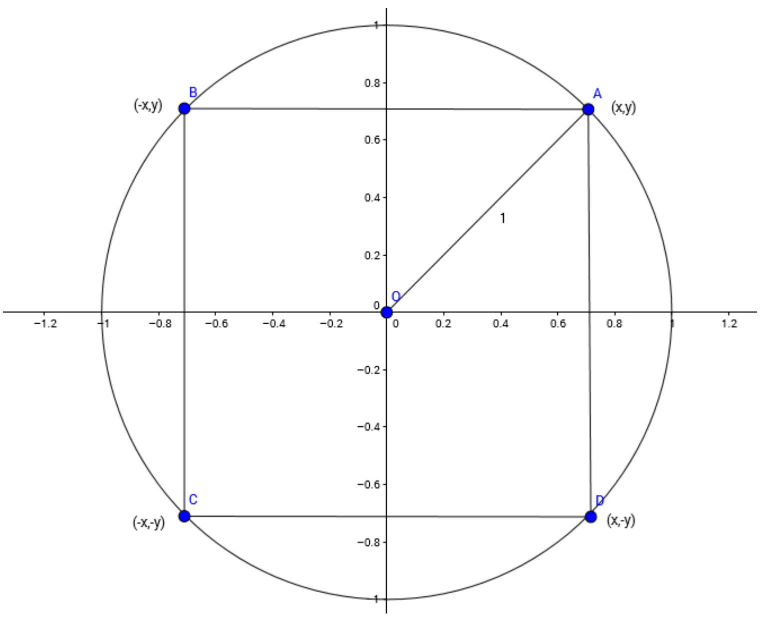
3. Escribir la ecuación de la función a optimizar. Si esta función depende de varias variables, usar los datos del enunciado para dejar la función dependiente de una única variable.

4. Imponer la condición necesaria de extremo relativo: primera derivada igual a cero. Los puntos que cumplan esa igualdad serán los puntos críticos, candidatos a extremos relativos.

5. Demostrar si estamos ante un máximo o mínimo relativo. Tenemos dos formas de demostrarlo. Evaluando el signo de la primera derivada a ambos lados del punto crítico (y comprobando que cambia de signo), o bien evaluando el punto crítico en la segunda derivada (si la segunda derivada es positiva, estaremos ante un mínimo; si la segunda derivada es negativa, estaremos ante un máximo). En el primer método, al evaluar a ambos lados de los puntos críticos, debemos estar atentos a los puntos donde la función a optimizar no está definida.

6. Si el enunciado nos pide obtener la imagen del punto crítico, debemos obtener el valor del punto crítico en la función de partida.

En nuestro problema podemos representar la siguiente gráfica. El rectángulo inscrito tiene un vértice en cada uno de los cuadrantes, siendo (x, y) las coordenadas del vértice del primer cuadrante.



El área del rectángulo es la magnitud a maximizar, siendo su fórmula:

$$A=base\cdot altura=2x\cdot 2y=4xy$$

Esta función depende de dos variables. Vamos a relacionarlas con la ecuación de la circunferencia de radio unidad centrada en el origen.

$$x^2+y^2=1 \quad\rightarrow\quad y=\sqrt{1-x^2}$$

Por lo que el área queda como una función dependiente de una única variable.

$$A=4x\cdot\sqrt{1-x^2}=4\sqrt{x^2-x^4}$$

El dominio de la función área resulta → $D(A)=[-1,1]$

Derivamos e igualamos a cero, por ser la condición necesaria de extremo relativo.

$$A'=4\cdot\frac{2x-4x^3}{2\sqrt{x^2-x^4}}=4\cdot\frac{x-2x^3}{\sqrt{x^2-x^4}}$$

$$A'=0 \quad\rightarrow\quad x-2x^3=0 \quad\rightarrow\quad x(1-2x^2)=0 \quad\rightarrow\quad x=\frac{-\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Al ser (x,y) un punto del primer cuadrante, debemos tomar como punto crítico a máximo relativo el valor positivo $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Evaluamos la primera derivada a izquierda y derecha de $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$, sin olvidar el punto crítico $x=0$ y el valor que marca el final del dominio de definición $x=1$.

$$si \;\; 0<x<\frac{\sqrt{2}}{2} \quad\rightarrow\quad x=0{,}1 \quad\rightarrow\quad A'(0{,}1)>0$$

$$si \;\; \frac{\sqrt{2}}{2}<x<1 \quad\rightarrow\quad x=0{,}9 \quad\rightarrow\quad A'(0{,}1)<0$$

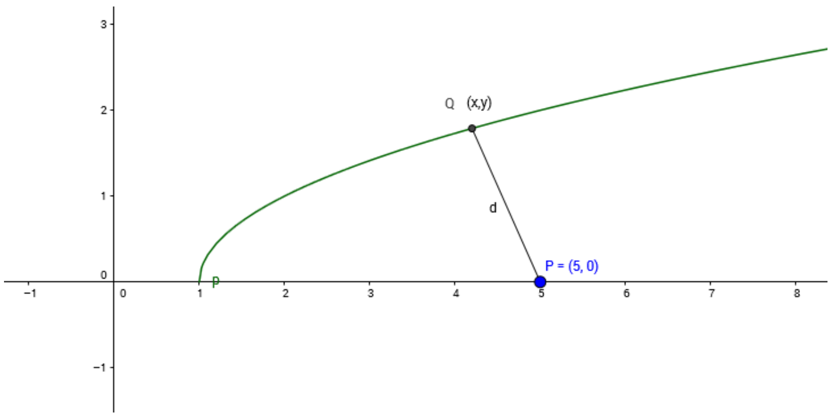
La derivada cambia de signo → $x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ es un máximo relativo.

Por lo tanto el rectángulo resultante es de base $2x=\sqrt{2}\ u$ y de altura $2y=\sqrt{2}\ u$. El área máxima resulta $A_{máx}=2\ u^2$

■ *Optimización 2*

Obtener el punto de la gráfica de la función $f(x)=\sqrt{x-1}$ a menor distancia del punto $P(5,0)$. Obtener dicha distancia mínima.

Un punto arbitrario de la función será $Q(x,y)=Q(x,\sqrt{x-1})$.



La distancia del punto Q al punto P será la función a minimizar.

$$d(Q,P)=\sqrt{(5-x)^2+(0-\sqrt{x-1})^2}=\sqrt{(5-x)^2+x-1}=\sqrt{25+x^2-10x+x-1}=\sqrt{x^2-9x+24}$$

El discriminante de la raíz siempre es positivo, por lo que el dominio de la función $d(Q,P)$ son todos los número reales.

Derivamos e igualamos a cero, por ser la condición necesaria de extremo relativo.

$$d'=\frac{2x-9}{2\sqrt{x^2-9x+24}}$$

$$d'=0 \rightarrow 2x-9=0 \rightarrow x=\frac{9}{2}$$

Tenemos el punto crítico $x=\frac{9}{2}$, candidato a extremo relativo. Evaluamos la primera derivada a ambos lados del punto crítico (recordando que el dominio de la función a optimizar son todos los reales).

$$si \quad x<\frac{9}{2} \quad \rightarrow \quad x=1 \quad \rightarrow \quad d'(1)<0$$

$$si \quad x>\frac{9}{2} \quad \rightarrow \quad x=10 \quad \rightarrow \quad d'(10)>0$$

La derivada cambia de signo → $x=\frac{9}{2}$ es un mínimo relativo.

Las coordenadas del punto son → $(\frac{9}{2}, f(\frac{9}{2}))=(\frac{9}{2}, \sqrt{\frac{7}{2}})$

La distancia mínima resulta:

$$d_{mín}=\sqrt{(\frac{9}{2})^2-9\cdot(\frac{9}{2})+24}=\sqrt{\frac{81}{4}-\frac{81}{2}+24}=\sqrt{\frac{-81}{4}+24}=\sqrt{\frac{15}{4}}=\frac{\sqrt{15}}{2} \quad u^2$$

■ *Optimización 3*

Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para 13,5 metros cúbicos. Para ello se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcula las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea al mínimo posible.

La función que debemos optimizar es la cantidad de chapa utilizada, que será suma de la chapa empleada para la base cuadrada más la chapa empleada en las cuatro paredes verticales. En cada caso, la cantidad de chapa será igual al volumen de chapa necesaria para construir cada parte.

Si la base es cuadrada supondremos x el valor del lado. Las paredes serán rectangulares, de base x y de altura y .

El grosor de la chapa, que es uniforme (es decir, constante), lo llamaremos d .

$$Volumen \quad chapa \quad base \ =x\cdot x\cdot d=x^2\cdot d$$
$$Volumen \quad chapa \quad paredes \ =4\cdot x\cdot y\cdot d$$
$$Volumen \quad total \quad chapa \ =x^2\cdot d+4\cdot x\cdot y\cdot d=d(x^2+4\cdot x\cdot y) \quad \rightarrow \quad V=d(x^2+4\cdot x\cdot y)$$

Donde recordamos que el grosor d es un valor constante. En la práctica, al ser el grosor uniforme, lo que buscamos optimizar es la superficie total de chapa empleada.

La función V obtenida depende de dos variables: x, y . Con el dato del volumen del enunciado podemos relacionar ambas variables.

$$13{,}5\ \ m^3 = x\cdot x\cdot y \ \rightarrow\ 13{,}5 = x^2\cdot y \ \rightarrow\ y=\frac{13{,}5}{x^2}$$

Llevamos este valor a la función $V \rightarrow V=d\left(x^2+4\cdot x\cdot y\right)=d\left(x^2+4\cdot x\cdot\frac{13{,}5}{x^2}\right)=d\left(x^2+\frac{54}{x}\right)$

El dominio de esta función es $Dom(V)=\mathbb{R}-\{0\}$. Solo tienen sentido físico distancias positivas, por lo que exigiremos valores positivos de la variable x .

El gasto mínimo de chapa se produce para aquel valor de la variable que minimiza la función $V(x)$. Por lo tanto, deberemos derivarla, igualarla a cero y obtener los puntos críticos. Finalmente demostraremos que el punto crítico es un mínimo relativo.

$$V=d\left(x^2+\frac{54}{x}\right) \ \rightarrow\ d \ \text{ es una constante} \rightarrow\ V'=d\left(2x-\frac{54}{x^2}\right) \ \rightarrow\ V'=d\left(\frac{2x^3-54}{x^2}\right)$$

$$V'=0 \ \rightarrow\ d\left(\frac{2x^3-54}{x^2}\right)=0 \ \rightarrow\ \frac{2x^3-54}{x^2}=0 \ \rightarrow\ 2x^3-54=0 \ \rightarrow\ x^3=27 \ \rightarrow\ x=3$$

Vamos a determinar si el punto crítico $x=3$ es un mínimo relativo. Para ello evaluamos el signo de la primera derivada en los siguientes intervalos.

$(0,3) \rightarrow V'(1)<0 \rightarrow V(x)$ decreciente

$(3,+\infty) \rightarrow V'(10)>0 \rightarrow V(x)$ creciente

Por lo tanto, en $x=3$ encontramos un mínimo relativo.

Si $x=3 \rightarrow y=\frac{13{,}5}{x^2}=\frac{13{,}5}{9}=\frac{3}{2}$

Las dimensiones solicitadas son: una base cuadrado de lado $x=3\ \ m$ y paredes verticales de base $x=3\ \ m$ y altura $y=\frac{3}{2}\ \ m$.

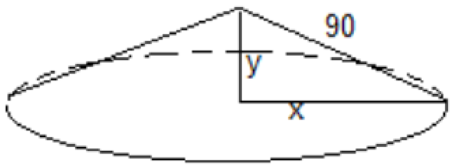
El volumen de chapa mínimo es igual a $V(3)=d\left(x^2+\frac{54}{x}\right)=27\cdot d\ \ m^3$, que lógicamente resulta en función del grosor desconocido d .

■ *Optimización 4*

Sea un triángulo rectángulo de hipotenusa $90\,cm$. Haciéndolo girar alrededor de uno de sus catetos genera un cono. Obtener las dimensiones de los catetos para que el volumen del cono engendrado sea máximo. Ayuda: volumen de un cono $V=\frac{1}{3}\pi r^2 h$.

La función a maximizar es el volumen. Depende de dos variables, el radio y la altura, por lo que buscaremos una relación entre ambas variables.

Imagen tomada de http://www.iesayala.com/selectividadmatematicas/



Según el dibujo la altura del cono coincide con el cateto de longitud y . El radio de la base coincide con el cateto de longitud x . Por lo que el volumen resulta:

$$V=\frac{1}{3}\pi x^2 y$$

Por Pitágoras → $90^2=x^2+y^2 \rightarrow x^2=8100-y^2 \rightarrow V=\frac{1}{3}\pi(8100-y^2)y=\frac{1}{3}\pi(8100y-y^3)$

Ya tenemos la función a optimizr dependiendo de una sola variable. Derivamos e igualamos a cero para aplicar la condición necesaria de extremo relativo.

$$V'=\frac{1}{3}\pi(8100-3y^2) \;,\; V'=0 \rightarrow 8100-3y^2=0 \rightarrow y^2=2700 \rightarrow y=\pm 30\sqrt{3}$$

Donde tomaremos la solución positiva ya que las distancias tienen sentido físico positivas.

Para demostrar si estamos ante un máximo de la función volumen, evaluamos el punto crítico en la segunda derivada.

$V''=\frac{1}{3}\pi(-6y)=-2\pi y \rightarrow V''(30\sqrt{3})<0 \rightarrow y=30\sqrt{3}$ es un máximo relativo

Dimensiones de los catetos: $y=30\sqrt{3}\ cm \rightarrow x=30\sqrt{6}\ cm$

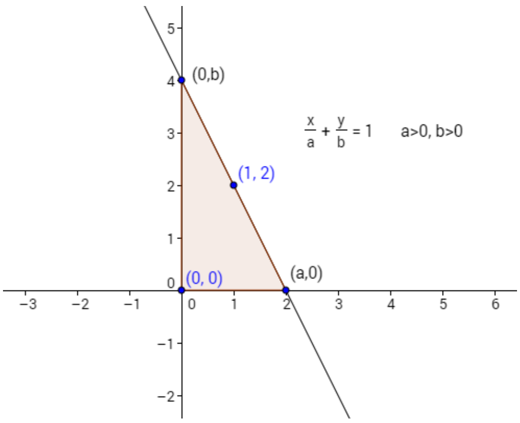
■ *Optimización 5*

Encontrar, de entre todas las rectas que pasan por el punto $(1,2)$, aquella que forma con la partes positivas de los ejes de coordenadas un triángulo de área mínima. Obtener dicha área mínima.

La **ecuación canónica de la recta** nos permite expresar la recta a partir de los **puntos de corte de la recta con los ejes de coordenadas**.

$$r:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad \rightarrow \quad (a,0),(0,b)\in r$$

Con $a>0, b>0$ para nuestro problema, ya que la recta pasa por el punto $(1,2)$ y corta a los semiejes positivos de coordenadas formando un triángulo. Por lo que la pendiente de la recta será negativa (ver imagen).



El área del triángulo rectángulo formado por la recta y los ejes cartesianos es:

$$A=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b$$

Y esta es la función que debemos optimizar para buscar su máximo relativo.

La función depende de dos variables. ¿Cómo podemos relacionar ambas variables, para dejar A en función de una sola variable?

Con ayuda de la ecuación de la recta, que pasa por el punto $(1,2)$.

$$r:\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1 \quad , \quad (1,2)\in r \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a}+\frac{2}{b}=1 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a}=1-\frac{2}{b} \quad \rightarrow \quad \frac{1}{a}=\frac{b-2}{b} \quad \rightarrow \quad a=\frac{b}{b-2}$$

Llevamos esta relación a la ecuación del área del triángulo.

$$A=\frac{1}{2}\cdot a\cdot b \quad\rightarrow\quad A=\frac{1}{2}\cdot\frac{b}{b-2}\cdot b \quad\rightarrow\quad A=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2}{b-2}$$

El dominio de la función área es $Dom(A)=\mathbb{R}-\{2\}$. Y según la condiciones de nuestro enunciado, solo tienen sentido valores positivos de b , ya que la recta solo corta al eje OY en su semieje positivo.

Derivamos e igualamos a cero la función, como condición necesaria de extremo relativo.

$$A'=\frac{1}{2}\cdot\frac{2b(b-2)-b^2}{(b-2)^2} \quad\rightarrow\quad A'=\frac{1}{2}\cdot\frac{2b^2-4b-b^2}{(b-2)^2} \quad\rightarrow\quad A'=\frac{1}{2}\cdot\frac{b^2-4b}{(b-2)^2}$$

$$A'=0 \quad\rightarrow\quad b^2-4\text{b}=0 \quad\rightarrow\quad b=0 \quad , \quad b=4$$

Tenemos dos puntos candidatos a extremos relativos. Vamos a evaluar la derivada en los siguientes intervalos, para decidir si son máximos o mínimos.

$$(-\infty,0) \quad\rightarrow\quad A'(-10)>0$$
$$(0,2) \quad\rightarrow\quad A'(1)<0$$
$$(2,4) \quad\rightarrow\quad A'(3)<0$$
$$(4,+\infty) \quad\rightarrow\quad A'(5)>0$$

En $b=0$ la función presenta un máximo relativo (aunque este valor no lo contemplamos realmente, según las condiciones de nuestro enunciado), y en $b=4$ aparece un mínimo relativo (que también es absoluto si nos cernimos a valores positivos de b , que son lo que tienen sentido en nuestro problema).

Por lo tanto, si $b=4 \rightarrow a=2 \rightarrow A=4\ u^2$

La ecuación de la recta resulta:

$$r:\frac{x}{2}+\frac{y}{4}=1 \quad\rightarrow\quad r:y=-2x+4$$

Valor absoluto

■ *Valor absoluto 1*

Estudiar la derivabilidad de $f(x)=x-\left|\frac{x^2-1}{x}\right|$ **en su dominio de definición.**

Siempre que nos encontremos con valor absoluto debemos **romper la función en trozos antes de operar**. Para ello, obtenemos las raíces tanto del numerador como del denominador que aparecen dentro del valor absoluto (si fuese un polinomio, y no un cociente, siemplemente obtendríamos las raíces del polinomio).

$$x^2-1=0 \;\rightarrow\; x=\pm 1$$
$$x=0$$

Representamos en la recta real las raíces obtenidas, recordando que las raíces del denominador no pertenecen al dominio de la función ya que no podemos dividir por cero. Y evaluamos el signo del argumento del valor absoluto en cada uno de los intervalos obtenidos.

$si \;\; x<-1$ → por ejemplo $x=-10 \;\rightarrow\; \frac{(-10)^2-1}{-10}<0$

$si \;\; -1<x<0$ → por ejemplo $x=\frac{-1}{2} \;\rightarrow\; \frac{\left(\frac{-1}{2}\right)^2-1}{\frac{-1}{2}}>0$

$si \;\; 0<x<1$ → por ejemplo $x=\frac{1}{2} \;\rightarrow\; \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2-1}{\frac{1}{2}}<0$

$si \;\; x>1$ → por ejemplo $x=10 \;\rightarrow\; \frac{(10)^2-1}{10}>0$

En los intervalos donde el argumento del valor absoluto sea positivo, podemos quitar las barras de valor absoluto sin más. Donde el argumento ea negativo, debemos colocar un signo negativo al eliminar las barras. De esta forma, tendremos los siguientes intervalos (fíjate que en uno de los tramos incluimos el signo igual para $x=-1$ y $x=1$, pero no para $x=0$).

$$f(x)=\left\{\begin{matrix} x+\frac{x^2-1}{x} & si & x\leq -1 \\ x-\frac{x^2-1}{x} & si & -1<x<0 \\ x+\frac{x^2-1}{x} & si & 0<x\leq 1 \\ x-\frac{x^2-1}{x} & si & x>1 \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{operamos} \rightarrow \quad f(x)=\left\{\begin{matrix} \frac{2x^2-1}{x} & si & x\leq -1 \\ \frac{1}{x} & si & -1<x<0 \\ \frac{2x^2-1}{x} & si & 0<x\leq 1 \\ \frac{1}{x} & si & x>1 \end{matrix}\right\}$$

Recuerda: el 0 no pertenece al dominio de la función y por eso no aparece el signo igual en ninguno de los intervalos a la izquierda o a la derecha de 0 .

El dominio de definición de la función a trozos es $\mathbb{R}-\{0\}$.

Una función es derivable en su dominio si es continua y si está definida la función derivada en ese dominio.

La continuidad se estudia primero en los intervalos abiertos y luego en los puntos frontera que dividen los intervalos.

$x<-1 \quad \rightarrow \quad f(x)=\frac{2x^2-1}{x}$ → Continua en el intervalo abierto por ser cociente de polinomios y no incluir a 0 , valor que anula al denominador.

$-1<x<0 \quad \rightarrow \quad f(x)=\frac{1}{x}$ → Continua en el intervalo abierto por ser cociente de polinomios y no incluir a 0 , valor que anula al denominador.

$0<x<1 \quad \rightarrow \quad f(x)=\frac{2x^2-1}{x}$ → Continua en el intervalo abierto por ser cociente de polinomios y no incluir a 0 , valor que anula al denominador.

$x>1 \quad \rightarrow \quad f(x)=\frac{1}{x}$ → Continua en el intervalo abierto por ser cociente de polinomios y no incluir a 0 , valor que anula al denominador.

Para estudiar la continuidad en los puntos frontera aplicamos las tres condiciones de continuidad en un punto.

$x=-1$

$f(-1)=-1$

$$L^-=\lim_{x\to -1^-}\frac{2x^2-1}{x}=-1 \quad , \quad L^+=\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{x}=-1 \quad \rightarrow \quad L^-=L^+=-1 \quad \rightarrow \quad L=-1$$

$f(-1)=L \quad \rightarrow \quad -1=-1 \quad \rightarrow \quad f(x)$ es continua en $x=-1$

$x=0$
$\nexists f(0)$ $\rightarrow$ $f(x)$ no es continua en $x=0$ $\rightarrow$ $f(x)$ no es derivable en $x=0$

$x=1$
$f(1)=1$
$L^{-}=\lim_{x\to 1^{-}}\frac{2x^2-1}{x}=1$, $L^{+}=\lim_{x\to 1^{+}}\frac{1}{x}=1$ $\rightarrow$ $L^{-}=L^{+}=1$ $\rightarrow$ $L=1$
$f(1)=L$ $\rightarrow$ $1=1$ $\rightarrow$ $f(x)$ es continua en $x=1$

Estudiamos la derivabilidad, en primer lugar, en los intervalos abiertos.

$$f'(x)=\begin{cases} \frac{2x^2+1}{x^2} & si \quad x<-1 \\ \frac{-1}{x^2} & si \quad -1<x<0 \\ \frac{2x^2+1}{x^2} & si \quad 0<x<1 \\ \frac{-1}{x^2} & si \quad x>1 \end{cases}$$

En todos los intervalos abiertos la función derivada está bien definida, ya que ninguno de los intervalos incluye el valor $x=0$ que anula los distintos denominadores. Por lo tanto $f(x)$ es derivable en $x<-1$, $-1<x<0$, $0<x<1$, $x>1$.

Estudiamos la derivabilidad en los puntos frontera donde la función era continua. Recuerda que la función será derivable en esos puntos frontera si coinciden sus derivadas laterales (recuerda que una derivada lateral no es más que el límite por la derecha o por la izquierda en la función derivada correspondiente).

$x=-1$
$f'(-1^{-})=\lim_{x\to -1^{-}}\frac{2x^2+1}{x^2}=-3$, $f'(-1^{+})=\lim_{x\to -1^{+}}\frac{-1}{x^2}=-1$ $\rightarrow$ $-3\neq -1$
$f(x)$ no es derivable en $x=-1$

$x=1$

$f'(1^-)=\lim_{x\to 1^-}\frac{2x^2+1}{x^2}=3$, $f'(1^+)=\lim_{x\to -1^+}\frac{1}{x^2}=-1 \rightarrow 3\neq -1$

$f(x)$ no es derivable en $x=1$

■ *Valor absoluto 2*

Sea la función $f(x)=x^2-|x|$. Estudiar su derivabilidad, monotonía y extremos relativos.

Rompemos a trozos, antes de nada, el valor absoluto.

$x=0$

El argumento del valor absoluto es negativo a la izquierda de cero y positivo a la derecha de cero.

$$f(x)=\begin{cases} x^2+x & si \quad x\leq 0 \\ x^2-x & si \quad x>0 \end{cases}$$

Para que la función sera derivable, primer debe ser continua. En los intervalos abiertos $x<0$, $x>0$ la función es continua por ser polinómica.

En el punto frontera $x=0$ aplicamos las condiciones de continuidad.

$f(0)=0$

$L^-=\lim_{x\to 0^-}(x^2+x)=0$, $L^+=\lim_{x\to 0^+}(x^2-x)=0 \rightarrow L^-=L^+=0 \rightarrow L=0$

$f(0)=L \rightarrow 0=0 \rightarrow f(x)$ es continua en $x=0$

Estudiamos la función derivada en los intervalos abiertos.

$$f'(x)=\begin{cases} 2x+1 & si \quad x<0 \\ 2x-1 & si \quad x>0 \end{cases}$$

En los intervalos abiertos $x<0$, $x>0$ la función derivada es continua por ser polinómica. Por lo tanto, $f(x)$ es derivable en los intervalos abiertos.

Estudiamos la derivabilidad en el punto frontera, calculando si coinciden las derivadas laterales.

$x=0$

$f'(0^-)=\lim_{x\to 0^-}(2x+1)=1$, $f'(0^+)=\lim_{x\to 0^+}(2x-1)=-1 \rightarrow 1\neq -1$

$f(x)$ no es derivable en $x=0$

Anulamos la primera derivada en cada intervalo para determinar la existencia de puntos críticos.

$si \;\; x<0 \rightarrow f'(x)=0 \rightarrow 2x+1=0 \rightarrow x=\frac{-1}{2}$

$si \;\; x>0 \rightarrow f'(x)=0 \rightarrow 2x-1=0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$

Ambos puntos críticos pertenecen a los intervalos donde están definidos cada tramo. De no haber sido así, no los consideraríamos. Determinamos los extremos con el valor de la segunda derivada en el punto crítico.

$si \;\; x<0 \rightarrow f'(x)=2>0 \rightarrow x=\frac{-1}{2}$ es un mínimo relativo

$si \;\; x>0 \rightarrow f'(x)=2>0 \rightarrow x=\frac{1}{2}$ es un mínimo relativo

El estudio de la monotonía resulta:

$si \;\; x<\frac{-1}{2} \rightarrow f(x)$ es decreciente

$\frac{-1}{2}<x<0 \rightarrow f(x)$ es creciente

$0<x<\frac{1}{2} \rightarrow f(x)$ es decreciente

$\frac{1}{2}<x \rightarrow f(x)$ es creciente

¡Ojo, una trampa final! Los mínimos que hemos obtenido son lo que anulan la primera derivada. Pero al trabajar con intervalos debemos tener en cuenta a todos los puntos frontera de los intervalos.

En $x=0$ la función es continua pero no derivable, por lo tanto nunca podrá ocurrir que $f'(0)=0$. Pero sí ocurre que si la función a la izquierda $x=0$ es creciente, y a la derecha de $x=0$ es decreciente, tenemos un máximo relativo (es un punto anguloso, al no ser suave el trazo de la función en ese punto).

■ *Valor absoluto 3*

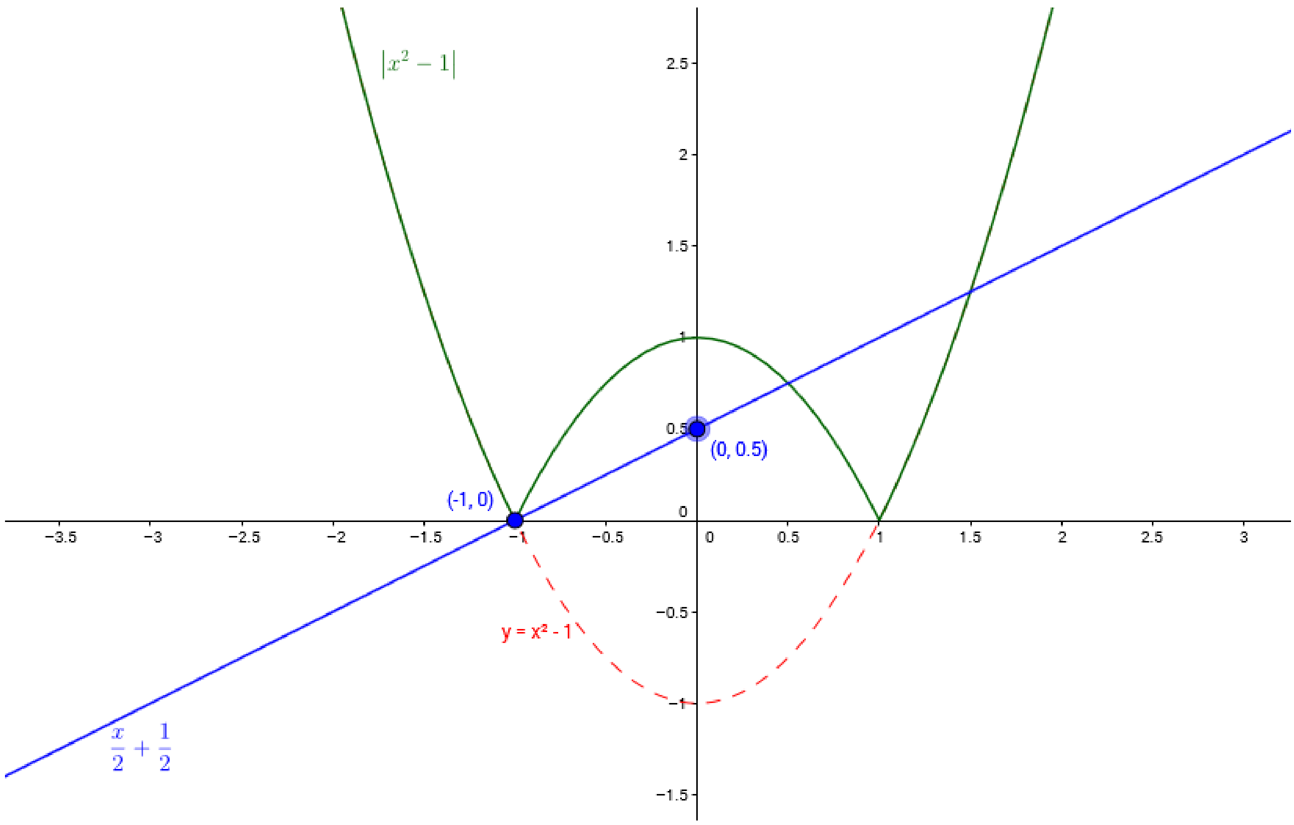
Representar sobre una misma gráfica las funciones $f(x)=|x^2-1|$ **y** $g(x)=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$ **. Obtener puntos de corte de ambas gráficas.**

Si la función que tenemos dentro del valor absoluto es sencilla de representar (una parábola cóncava hacia arriba, en este ejercicio), la mejor forma de obtener un boceto rápido de su gráfica es pintar la función sin valor absoluto y luego pasar la parte negativa de la función a positiva.

La parábola $y=x^2-1$ tiene extremo relativo en $y'=0 \rightarrow 2x=0 \rightarrow x=0 \rightarrow (0,-1)$ es un mínimo absoluto de la parábola, ya que al ser positivo el coeficiente que acompaña a x^2 genera una parábola cóncava.

Los puntos de corte con el eje horizontal son → $y=0 \rightarrow x=\pm 1 \rightarrow (-1,0)$, $(1,0)$

La recta $g(x)=\frac{x}{2}+2$ tiene pendiente $m=\frac{1}{2}$ (coeficiente que acompaña a x en la forma explícita de la recta) y pasa por el punto $(0,\frac{1}{2})$ (ordenada en el origen) y por el punto $(-1,0)$.



Para estudiar los puntos de corte entre ambas gráficas, debemos en primer lugar romper el valor absoluto en trozos. Recuerda: no operes con funciones con valor absoluto sin haberlas roto previamente en trozos.

Para ello igualamos el argumento contenido en el valor absoluto a cero, y obtenemos las raíces.

$$x^2-1=0 \;\rightarrow\; x=\pm 1$$
$$si\;\; x<-1 \;\rightarrow\; x=-10 \;\rightarrow\; (-10)^2-1>0$$
$$si\;\; -1<x<1 \;\rightarrow\; x=0 \;\rightarrow\; (0)^2-1<0$$
$$si\;\; x>1 \;\rightarrow\; x=10 \;\rightarrow\; (10)^2-1>0$$

Donde el argumento sea negativo, deberemos colocar un signo menos al quitar el valor absoluto.

$$f(x)=\left\{\begin{matrix} x^2-1 \;\; si \;\; x<-1 \\ 1-x^2 \;\; si \;\; -1\leq x\leq 1 \\ x^2-1 \;\; si \;\; x>1 \end{matrix}\right\}$$

Fíjate que ponemos el signo igual en uno (y solo uno) de los tramos de cada punto frontera, para garantizar la continuidad de la función.

Ahora ya podemos estudiar los punto de corte, igualando la fórmula de las gráficas en cada intervalo.

$$si\;\; x<-1 \;\rightarrow\; x^2-1=\frac{x}{2}+\frac{1}{2} \;\rightarrow\; x^2-\frac{x}{2}-\frac{3}{2}=0 \;\rightarrow \text{No hay solución dentro del intervalo}$$
$$si\;\; -1\leq x\leq 1 \;\rightarrow\; 1-x^2=\frac{x}{2}+\frac{1}{2} \;\rightarrow\; x^2+\frac{x}{2}-\frac{1}{2}=0 \;\rightarrow\; x=-1 \;\;,\;\; x=\frac{1}{2}$$
$$si\;\; x>1 \;\rightarrow\; x^2-1=\frac{x}{2}+\frac{1}{2} \;\rightarrow\; x^2-\frac{x}{2}-\frac{3}{2}=0 \;\rightarrow\; x=\frac{3}{2}$$

Los tres puntos de corte son $(-1,0)$, $(\frac{1}{2},\frac{3}{4})$ y $(\frac{3}{2},\frac{5}{4})$.

Estudio y representación de funciones

■ *Estudiar funciones 1*

Sea la función $f:(0,+\infty)$ y definida por $f(x)=\frac{1}{x}+\ln(x)$. Halla los extremos absolutos de $f(x)$ (abscisas donde se obtienen y valores que alcanzan) en el intervalo $[\frac{1}{e},e]$.

Todo extremo absoluto es relativo. Pero el inverso no es cierto: **un extremo relativo puede no ser absoluto**.

Cuando nos pregunten por extremos absolutos **en un intervalo cerrado, debemos evaluar la función en los extremos del intervalo y obtener la imagen de los posibles extremos relativos**. Comparando las imágenes podremos determinar si hay extremos absolutos.

$$x=\frac{1}{e} \rightarrow f(\frac{1}{e})=e+\ln(\frac{1}{e})=e+\ln(1)-\ln(e)=e-1 \rightarrow (\frac{1}{e},e-1)=(\frac{1}{e},1{,}71)$$

$$x=e \rightarrow f(e)=\frac{1}{e}+\ln(e)=\frac{1}{e}+1 \rightarrow (e,\frac{1}{e}+1)=(e,1{,}37)$$

Derivamos e igualamos a cero, como condición necesaria de extremo relativo.

$$f'(x)=\frac{-1}{x^2}+\frac{1}{x}=\frac{-1+x}{x^2}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow -1+x=0 \rightarrow x=1$$

Decidimos si en $x=1$ tenemos un mínimo o un máximo relativo evaluando la segunda derivada.

$$f''(x)=\frac{-x^2+2x}{x^4}=\frac{-x+2}{x^3} \rightarrow f''(1)=1>0 \rightarrow x=1 \text{ es un mínimo relativo}$$

$$x=1 \rightarrow f(1)=1+\ln(1)=1 \rightarrow (1,1)$$

Comparando el valor de las imágenes de los tres puntos obtenidos, concluimos:

$(\frac{1}{e},e-1)=(\frac{1}{e},1{,}71)$ máximo absoluto en el intervalo $[\frac{1}{e},e]$

$(1,1)$ mínimo absoluto en el intervalo $[\frac{1}{e},e]$

■ *Estudiar funciones 2*

Sea la función definida por $f(x)=\frac{2x^2}{(x+1)(x-2)}$ **. Estudia el dominio, los puntos de corte con los ejes, los intervalos de crecimiento y decrecimiento, y los extremos relativos.**

En un cociente de polinomios el dominio son todos los reales menos los valores que anulan el denominador. Por lo tanto $D(f)=\mathbb{R}-\{-1,2\}$.

Los puntos de corte con el eje horizontal implica $f(x)=0 \rightarrow (0,0)$

El punto de corte con el eje vertical implica $x=0 \rightarrow (0,0)$

Para estudiar el crecimiento y los extremos relativos, obtenemos la primera derivada e igualamos a cero para calcular los puntos críticos.

$$f'(x)=\frac{-2x^2-8x}{(x^2-x-2)^2}$$

$$f'(x)=0 \rightarrow -2x^2-8x=0 \rightarrow x=-4 \quad , \quad x=0$$

Para evaluar el signo de la derivada a los lados de los puntos críticos debemos tener en cuenta los puntos que no pertenecen al dominio de la función.

$si \;\; x<-4 \rightarrow f'(-10)<0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$si \;\; -4<x<-1 \rightarrow f'(-2)>0 \rightarrow f(x)$ creciente

$si \;\; -1<x<0 \rightarrow f'(\frac{-1}{2})>0 \rightarrow f(x)$ creciente

$si \;\; 0<x<2 \rightarrow f'(1)<0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$si \;\; 2<x \rightarrow f'(10)<0 \rightarrow f(x)$ decreciente

Encontramos un mínimo relativo en $x=-4$ y un máximo relativo en $x=0$.

Si nos hubiesen pedido obtener las imágenes d ellos extremos, hubiéramos calculado $f(-4)$ y $f(0)$. En este ejercicio no nos lo han pedido, por lo que ya hemos terminado nuestro estudio.

■ *Estudiar funciones 3*

Determinar a, b, c, d **para que** $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ **posea un extremo relativo en** $x=0$ **, un punto de inflexión en** $(1,0)$ **y para que la pendiente de la recta tangente en el punto de inflexión sea igual a** -3 **.**

Nos piden cuatro parámetros, por lo que del enunciado deberemos obtener cuatro condiciones para formar un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas.

De la condición necesaria de extremo relativo → $f'(x)=0 \rightarrow c=0$

Si la función pasa por $(1,0) \rightarrow f(1)=0 \rightarrow a+b+c+d=0$

De la condición necesaria de punto de inflexión → $f''(x)=0 \rightarrow 6a+2b=0$

Y de la interpretación geométrica de la derivada podemos deducir que el valor de la derivada de la función en $x=1$ es $-3 \rightarrow f'(1)=-3 \rightarrow 3a+2b+c=-3$

Con estas cuatro condiciones formamos un sistema, de solución general → $a=1, b=-3, c=0, d=2$

■ *Estudiar funciones 4*

Sea la función $f(x)=\frac{1}{2x}+\ln(x)$ **definida para** $x>0$ **. Determina el punto de la gráfica en el que la pendiente de la recta tangente es máxima.**

Decir que la pendiente de la **recta tangente sea máxima es lo mismo decir que el valor de la primera derivada sera máxima**. Es decir, debemos estudiar los **extremos relativos de la función derivada**.

Si para $f(x)$ la condición necesaria de extremo relativo es $f'(x)=0$, ahora para $f'(x)$ la condición necesaria será $f''(x)=0$.

Es decir, lo que nos están preguntando ni más ni menos es que calculemos la existencia de **puntos de inflexión en la función de partida**.

$$f'(x)=\frac{-1}{2x^2}+\frac{1}{x} \rightarrow f''(x)=\frac{1}{x^3}-\frac{1}{x^2}=\frac{1-x}{x^3}$$

$$f''(x)=0 \rightarrow 1-x=0 \rightarrow x=1$$

Para decidir si estamos ante un punto de inflexión, evaluamos la tercera derivada en $x=1$.

Si $f'''(1)\neq 0$ tendremos un punto de inflexión.

$$f'''(x)=\frac{-1\cdot x^3-(1-x)\cdot 3x^2}{x^6}=\frac{-x^3-3x^2+3x^3}{x^6}=\frac{2x-3}{x^4}$$

$$f'''(1)=\frac{2-3}{1}=-1\neq 0$$

En $x=1$ tendremos un punto de inflexión.

¿Cómo saber si es un máximo o un mínimo de la primera derivada? Muy sencillo. **La tercera derivada es la segunda derivada de la primera derivada**... parece un trabalenguas jajaja.

Por lo tanto: tercera derivada negativa significa que la segunda derivada de la primera derivada es negativa. Es decir, tenemos un máximo de la primera derivada. Como queríamos demostrar.

■ *Estudiar funciones 5*

Estudia y representa $f(x)=\frac{\ln(x)}{x}$

El **dominio** de la función son todos los reales positivos, ya que el denominador se anula en $x=0$ y el logaritmo se define para argumentos positivos → $Dom(f(x))=(0,+\infty)$.

Los **puntos de corte con los ejes** cartesianos resultan:

$corte \quad con \quad eje \quad OX \quad \rightarrow \quad y=0 \quad \rightarrow \quad \ln(x)=0 \quad \rightarrow \quad (1,0)$

$corte \quad con \quad eje \quad OY \quad \rightarrow \quad x=0$ → La función no está definida en $x=0$

La función no presenta periodicidad. La función **no es par ni impar**.

Estudiamos la **asíntota vertical** que aparece en $x=0$. Calculamos los límites laterales.

$\lim_{x\to 0^-}\frac{\ln(x)}{x}=\nexists$ → La función no está definida en los reales negativos

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\ln(x)}{x}=\frac{-\infty}{0^+}=-\infty$$

El logaritmo a la derecha de 0 se dispara a $-\infty$ y x es un número positivo; pequeño, pero positivo. Por lo tanto, el cociente va a $-\infty$. Tenemos una asíntota vertical a la derecha de $x=0$.

Estudiamos el límite en el infinito de la función para determinar la existencia de **asíntota horizontal**. Y recordamos que el logaritmo tiende a infinito si x tiende a ∞ .

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\frac{+\infty}{+\infty}$$ → Indeterminación → L'Hôpital → $$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}=0$$

Tenemos una asíntota horizontal en $y=0$. En consecuencia, no habrá **asíntota oblicua**.

Estudiamos los **extremos relativos y los intervalos de crecimiento con la primera derivada**.

$$f(x)=\frac{\ln(x)}{x} \quad\rightarrow\quad f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\ln(x)\cdot 1}{x^2}=\frac{1-\ln(x)}{x^2} \quad , \quad f'(x)=0 \quad\rightarrow\quad \ln(x)=1 \quad\rightarrow\quad x=e$$

La primera derivada se anula para el punto $(e,f(e))=(e,\frac{1}{e})$. Por lo tanto hay un **punto crítico**. Debemos determinar si, efectivamente, es **extremo relativo**.

$(0,e) \rightarrow x=1 \rightarrow f'(1)>0 \rightarrow f(x)$ creciente

$(e,+\infty) \rightarrow x=10 \rightarrow f'(10)<0 \rightarrow f(x)$ decreciente

Se confirma la existencia de máximo relativo en el punto $(e,\frac{1}{e})$.

Estudiamos la **curvatura con la segunda derivada**.

$$f'(x)=\frac{1-\ln(x)}{x^2} \quad\rightarrow\quad f''(x)=\frac{\frac{-1}{x}\cdot x^2-(1-\ln(x)\cdot 2x)}{x^4}=\frac{\frac{-1}{x}\cdot x-(1-\ln(x)\cdot 2)}{x^3}$$

$$f''(x)=\frac{-1-(1-\ln(x)\cdot 2)}{x^3}=\frac{-3+2\ln(x)}{x^3} \quad\rightarrow\quad f''(x)=0 \quad\rightarrow\quad \ln(x)=\frac{3}{2}$$

Resolvemos esta igualdad aplicando exponencial.

$$\ln(x)=\frac{3}{2} \quad\rightarrow\quad e^{\ln(x)}=e^{\frac{3}{2}} \quad\rightarrow\quad x=e^{\frac{3}{2}} \quad\rightarrow\quad x\simeq 4{,}48$$

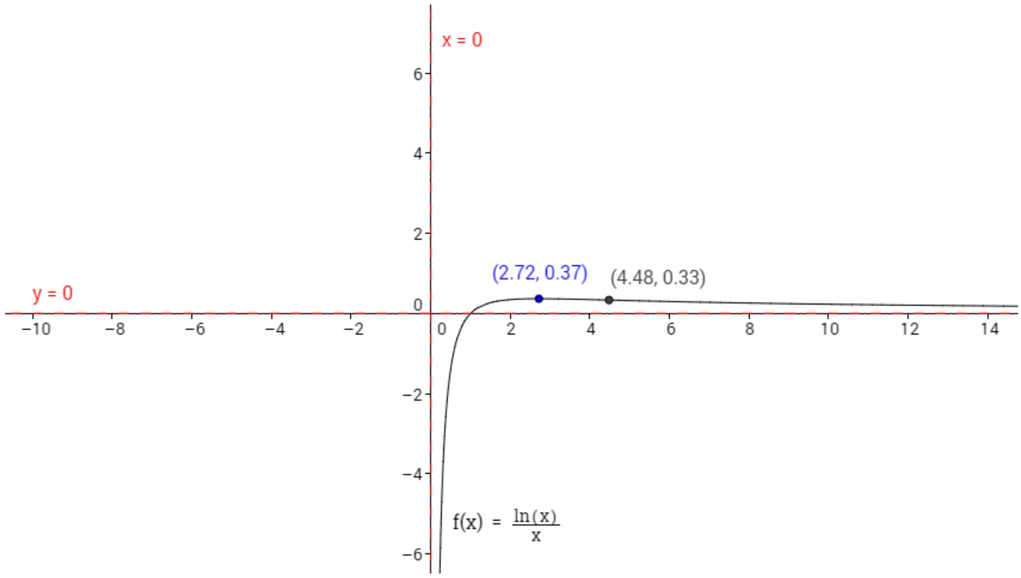
Candidato a punto de inflexión: $(4{,}48, f(4{,}48))=(4{,}48, 0{,}33)$

Estudiamos la curvatura en los siguientes intervalos.

$(0,4{,}48) \rightarrow x=1 \rightarrow f''(-1)<0 \rightarrow f(x)$ cóncava hacia abajo ∩
$(4{,}48,+\infty) \rightarrow x=10 \rightarrow f''(10)>0 \rightarrow f(x)$ cóncava hacia arriba U

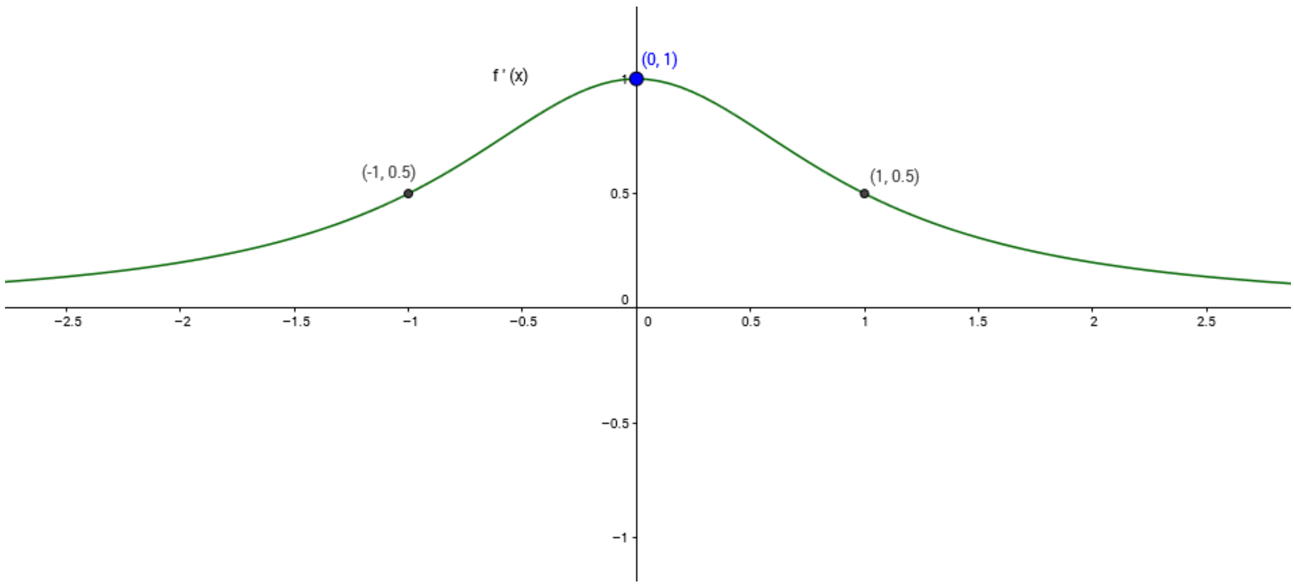
Existe **punto de inflexión** en $(4{,}48, 0{,}33)$.

Ya tenemos información suficiente para pintar la gráfica.



■ *Estudiar funciones 6*

Indica la monotonía, extremos relativos y puntos de inflexión de $f(x)$ a partir de la siguiente gráfica de su derivada $f'(x)$.



Derivada positiva implica función $f(x)$ creciente. Como $f'(x)>0 \rightarrow f(x)$ es creciente en todo su intervalo de definición.

Un valor nulo de la derivada $f'(x)=0$ es la condición necesaria de extremo relativo para $f(x)$. Como la gráfica de la derivada nunca corta al eje horizontal, significa que la derivada nunca se anula. Por lo tanto $f(x)$ no posee extremos relativos.

Los extremos relativos de la función derivada son los candidatos a puntos de inflexión de $f(x)$. En $(0,1)$ la función derivada $f'(x)$ presenta un máximo absoluto, por lo que $f''(0)=0$, que es la condición necesaria de punto de inflexión de $f(x)$.

A la izquierda de $x<0$ la función derivada es creciente, por lo que $f''(x)>0$.

A la derecha de $x<0$ la función derivada es decreciente, por lo que $f''(x)<0$.

Por lo tanto, a ambos lados de $x=0$ la segunda derivada cambia de signo. Y como $f''(0)=0$, podemos afirmar que $(0,1)$ existe un punto de inflexión.

Otro chistecillo.

Un niño va a la panadería.

“Me da una barra, por favor. Y si tiene huevos, me da una docena”.

El niño se fue a su casa con trece barras de pan...

Integrales

■ *Integrales 1*

Calcula $\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}dx$

Tenemos un cociente de polinomios con igual grado en numerador y denominador.

Podemos **dividir el polinomio numerador entre el polinomio denominador**, para obtener un nuevo polinomio más un cociente de polinomios donde el grado del numerador sea menor que el grado del denominador (y así poder aplicar, por ejemplo, el método de integración de los coeficientes indeterminados).

O bien podemos llegar al mismo resultado razonando de la siguiente forma:

$$I=\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}dx=-\int \frac{x^2}{x^2+x-2}dx=-\int \frac{x^2+(x-2)-(x-2)}{x^2+x-2}dx=-\int \frac{x^2+x-2}{x^2+x-2}dx+\int \frac{x-2}{x^2+x-2}dx$$

$$I=-\int dx+\int \frac{x-2}{x^2+x-2}dx=-x+\int \frac{x-2}{(x-1)(x+2)}dx$$

Aplicamos en la integral que nos queda el **método de los coeficientes indeterminados**.

$$\frac{x-2}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2} \quad \rightarrow \quad x-2=A(x+2)+B(x-1)$$

Damos valores para obtener los coeficientes.

$$x=1 \quad \rightarrow \quad -1=3A+0 \quad \rightarrow \quad A=\frac{-1}{3}$$

$$x=-2 \quad \rightarrow \quad -4=0-3B \quad \rightarrow \quad B=\frac{4}{3}$$

Sustituimos, sin olvidar la constante de integración final.

$$I=-x-\frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx+\frac{4}{3}\int \frac{1}{x+2}dx \quad \rightarrow \quad I=-x-\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{4}{3}\ln|x+2|+C$$

■ *Integrales 2*

Calcula $\int \frac{x^3}{x^2-5x+6}\,dx$

Tenemos un cociente de polinomios, con el grado del numerador mayor que el grado del denominador. Realizamos la división de los polinomios.

$$\frac{x^3}{x^2-5x+6}=x+\frac{5x^2-6x}{x^2-5x+6}$$

Y la integral nos queda:

$$I=\int\left(x+5+\frac{19x-30}{x^2-5x+6}\right)dx=\frac{x^2}{2}+5x+\int\frac{19x-30}{x^2-5x+6}\,dx$$

Llegamos a una segunda integral con el grado del numerador menor que el grado del denominador, por lo que hayamos las raíces del denominador y aplicamos el método de los coeficientes indeterminados.

$$x^2-5x+6=(x-2)(x-3) \;\rightarrow\; \frac{19x-30}{x^2-5x+6}=\frac{A}{x-2}+\frac{B}{x-3} \;\rightarrow\; 19x-30=A(x-3)+B(x-2)$$

Si $x=3 \;\rightarrow\; B=27$

Si $x=2 \;\rightarrow\; A=-8$

$$I=\frac{x^2}{2}+5x+\int\left(\frac{-8}{x-2}+\frac{27}{x-3}\right)dx=\frac{x^2}{2}+5x-8\ln|x-2|+27\ln|x-3|+C$$

Todo un clásico.

Jesucristo que dice:

“ $y=x^2$ ”

A lo que responde San Pedro.

“Ya empieza otra vez con las parábolas”.

■ *Integrales 3*

Calcula $\int \frac{x+3}{x^3+x}\,dx$

$$\int \frac{x+3}{x^3+x}dx=\int \frac{x+3}{x(x^2+1)}dx$$

Descomponemos el denominador como producto de una **raíz simple** y una **raíz compleja**.

$$\frac{x+3}{x^3+x}=\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}$$
$$x+3=A(1+x^2)+(Bx+C)x$$

Damos valores para obtener los coeficientes indeterminados.

Si $x=0 \rightarrow 3=A$

Si $x=1 \rightarrow 4=6+B+C$

Si $x=2 \rightarrow 5=15+4B+2C$

Con las dos últimas ecuaciones planteamos un sistema $2x2$ de soluciones.

$B=-3$, $C=1$

Y la integral queda expresada como:

$$\int \frac{x+3}{x(x^2+1)}dx=\int \frac{3}{x}dx+\int \frac{-3x+1}{1+x^2}dx=3\cdot\ln|x|-3\int \frac{x}{1+x^2}dx+\int \frac{1}{1+x^2}dx+C$$
$$3\cdot\ln|x|-\frac{3}{2}\int \frac{2x}{1+x^2}dx+arcotg\,x+C=3\cdot\ln|x|-\frac{3}{2}\ln|1+x^2|+arcotg\,x+C$$

■ *Integrales 4*

Calcula $\int \frac{1}{2x^2+x+2}dx$

El denominador es una **ecuación de segundo grado sin solución real**.

$$\int \frac{1}{2x^2+x+2}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+\frac{x}{2}+1}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{x^2+\frac{x}{2}+\frac{1}{16}+\frac{15}{16}}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}}dx$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{15}{16}+\left(\frac{4x+1}{4}\right)^2}dx=\frac{1}{2}\int \frac{1}{\frac{15}{16}\cdot\left[1+\frac{16}{15}\cdot\left(\frac{4x+1}{4}\right)^2\right]}dx=\frac{16}{2\cdot 15}\int \frac{1}{1+\left(\frac{4x+1}{\sqrt{15}}\right)^2}dx$$

$$\frac{8}{15}\int \frac{1}{1+\left(\frac{4x+1}{\sqrt{15}}\right)^2}dx=\frac{8}{15}\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}\int \frac{\frac{4}{\sqrt{15}}}{1+\left(\frac{4x+1}{\sqrt{15}}\right)^2}dx=\frac{2}{\sqrt{15}}\cdot arcotg\left(\frac{4x+1}{\sqrt{15}}\right)+C$$

■ *Integrales 5*

Calcula $\int sen^4 x\cdot\cos^5 x\,dx$

Tenemos la integral de una función impar en coseno. Por lo que proponemos el **cambio de variable**:

$$sen\,x=t \;\rightarrow\; \cos x\,dx=dt \;\rightarrow\; dx=\frac{dt}{\cos x}$$

$$\int sen^4 x\cdot\cos^5 x\,dx=\int t^4\cdot\cos^5 x\frac{dt}{\cos x}=\int t^4\cdot\cos^4 x\,dt=\int t^4\cdot[\cos^2 x]^2dt=\int t^4\cdot[1-sen^2 x]^2dt$$

$$\int t^4\cdot[1-t^2]^2dt=\int t^4\cdot(1+t^4-2t^2)dt=\int t^4+t^8-2t^6\,dt=\frac{t^5}{5}+\frac{t^9}{9}-\frac{2\cdot t^7}{7}$$

Deshacemos el cambio de variable (que no se nos olvide esto, por Dios).

$$I=\frac{sen^5 x}{5}+\frac{sen^9 x}{9}-\frac{2\cdot sen^7 x}{7}+C$$

■ *Integrales 6*

Calcula $\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx$

Radicando: x

Índice de las raíces: $2,3 \quad \rightarrow \quad m.c.m. \equiv 6$

Cambio de variable → $x=t^6 \quad \rightarrow \quad dx=6\cdot t^5\,dt$

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}dx=\int \frac{1-t^{\frac{6}{2}}}{t^{\frac{6}{3}}}\cdot 6\cdot t^5 dt=6\cdot\int \frac{1-t^3}{t^2}\cdot t^5\,dt=6\cdot\int (1-t^3)\cdot t^3\,dt=6\cdot\int (t^3-t^6)\,dt$$

$$6\cdot\int t^3\,dt-6\cdot\int t^6\,dt=\frac{6}{4}\cdot t^4-\frac{6}{7}\cdot t^7+C$$

Deshacemos el cambio de variable (repito, que no se olvide deshacer el cambio de variable).

$$x=t^6 \quad \rightarrow \quad \sqrt[6]{x}=t$$

$$I=\frac{3}{2}\cdot x^{\frac{4}{6}}-\frac{6}{7}\cdot x^{\frac{7}{6}}+C=\frac{3}{2}\cdot\sqrt[3]{x^2}-\frac{6}{7}\cdot x\cdot\sqrt[6]{x}+C$$

■ *Integrales 7*

Calcula $\int x^2\cdot\cos(x)\,dx$

Aplicamos partes.

$$u=x^2 \quad \rightarrow \quad du=2x$$
$$dv=\cos(x) \quad \rightarrow \quad v=sen(x)$$

Y la integral queda:

$$I=x^2\cdot sen(x)-2\int x\cdot sen(x)dx$$

Aplicamos nuevamente partes en la nueva integral.

$$u=x \quad \rightarrow \quad du=1$$
$$dv=sen(x) \quad \rightarrow \quad v=-\cos(x)$$

$$I=x^2\cdot sen(x)-2[-x\cos(x)+\int \cos(x)dx]$$
$$I=x^2\cdot sen(x)+2x\cos(x)-2\int \cos(x)dx=x^2\cdot sen(x)+2x\cos(x)-2sen(x)+C$$

■ *Integrales 8*

Calcula una función primitiva de $f'(x)=x\cdot\ln(x^2+1)$ **que pase por el punto** $(0,1)$ **.**

Nos dan la derivada de la función: $f'(x)=x\cdot\ln(x^2+1)$.
Para obtener la función $f(x)$ deberemos integrar. **El valor de la constante de integración lo obtendremos aplicando la condición que nos da el enunciado**.

$$f'(x)=x\cdot\ln(x^2+1) \quad \rightarrow \quad f(x)=\int x\cdot\ln(x^2+1)dx$$

Aplicamos integración por partes.

$$u=\ln(x^2+1) \quad \rightarrow \quad d\,u=\frac{2x}{x^2+1}dx$$
$$d\,v=x\,d\,x \quad \rightarrow \quad v=\frac{x^2}{2}$$
$$f(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x^2+1)-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x^2+1)-\int\frac{x^3}{x^2+1}dx+C$$

Obtenemos una integral como cociente de dos polinomios, con grado del numerador mayor que el grado del denominador.

Ejecutamos la división.

$$\frac{x^3}{x^2+1}=x-\frac{x}{x^2+1}$$

$$f(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x^2+1)-\int x\,dx+\int\frac{x}{x^2+1}dx+C$$

$$f(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x^2+1)-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+C$$

$$f(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x^2+1)-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$$

Según el enunciado la función pasa por el punto $(0,1)$.

$$f(0)=1 \ \rightarrow \ f(0)=C \ \rightarrow \ C=1$$

Finalmente la función buscada resulta:

$$f(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x^2+1)-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+1=\frac{1}{2}((x^2+1)\ln(x^2+1)-x^2)+1$$

■ *Integrales 9*

Sea $f''(x)=\ln(x)$. Obtener $f(x)$ sabiendo que su gráfica pasa por el $(1,0)$ y que la pendiente de la recta tangente a la función en $x=2$ es igual 1 .

Nos dan la segunda derivada. Deberemos **integrar dos veces para obtener la función primitiva** $f(x)$. Al integrar dos veces aparecerán dos constantes de integración, cuyo valor vendrá determinado por las condiciones del enunciado.

$f'(x)=\int\ln(x)dx$ → Integramos por partes

$$u=\ln(x) \ \rightarrow \ u'=\frac{1}{x}$$

$$v'=1 \ \rightarrow \ v=x$$

$$f'(x)=x\cdot\ln(x)-\int dx=x\cdot\ln(x)-x+C$$

Si la pendiente de la recta tangente en $x=2$ es igual a 1 , significa que $f'(2)=1$.

$$2\cdot\ln(2)-2+C=1 \quad\rightarrow\quad C=3-2\cdot\ln(2)$$

$$f(x)=\int f'(x)\,dx \quad\rightarrow\quad f(x)=\int (x\cdot\ln(x)-x+C)\,dx$$

$$f(x)=\int x\cdot\ln(x)\,dx-\int x\,dx+\int C\,dx$$

$$f(x)=\int x\cdot\ln(x)\,dx-\frac{x^2}{2}+Cx+D$$

Aplicamos partes en la integral que hemos obtenido.

$$u=\ln(x) \quad\rightarrow\quad u'=\frac{1}{x}$$

$$v'=x \quad\rightarrow\quad v=\frac{x^2}{2}$$

$$f(x)=\frac{x^2\cdot\ln(x)}{2}-\int\frac{x}{2}\,dx-\frac{x^2}{2}+Cx+D$$

$$f(x)=\frac{x^2\cdot\ln(x)}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{2}+Cx+D$$

Si la gráfica pasa por el punto $(1,0)$, significa que $f(1)=0$.

$$\frac{\ln(1)}{2}-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}+C+D=0 \quad\rightarrow\quad -\frac{3}{4}+C+D=0 \quad\rightarrow\quad D=\frac{3}{4}-C$$

Por lo que la función resulta:

$$f(x)=\frac{x^2\cdot\ln(x)}{2}-\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{2}+Cx+\frac{3}{4}-C$$

$$f(x)=\frac{x^2\cdot\ln(x)}{2}-\frac{3x^2}{4}+(3-2\cdot\ln(2))x+\frac{3}{4}-3+2\cdot\ln(2)$$

■ *Integrales 10*

Calcula $\int_2^3 \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}\,dx$

Resolvemos, en primer lugar la integral indefinida.

Tenemos un cociente de polinomios, con grado el numerador menor que el grado del denominador. En el denominador tenemos una raíz doble $x=0$ y una raíz simple $x-1=0$, por lo que descomponemos de la siguiente forma:

$$\frac{x^2+1}{x^2(x-1)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x^2}+\frac{C}{x-1} \quad \rightarrow \quad x^2+1=A\,x(x-1)+B\,(x-1)+C\,x^2$$

Fíjate como la raíz doble $x=0$ aparece en dos denominadores, $\frac{A}{x}$ y $\frac{B}{x^2}$. Damos valores.

Si $x=1 \;\rightarrow\; 2=C$

Si $x=0 \;\rightarrow\; 1=-B \;\rightarrow\; B=-1$

Si $x=2 \;\rightarrow\; 5=2A+B+4C \;\rightarrow\; 5=2A-1+8 \;\rightarrow\; A=-1$

Por lo que la integral indefinida se descompone en tres fracciones.

$$\int \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}\,dx=\int \frac{-1}{x}\,dx+\int \frac{-1}{x^2}\,dx+\int \frac{2}{x-1}\,dx=-\ln|x|+\frac{1}{x}+2\ln|x-1|+C=\frac{1}{x}+2\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|+C$$

Para resolver la integral definida aplicamos la **regla de Barrow**.

$$\int_2^3 \frac{x^2+1}{x^2(x-1)}\,dx=\left[\frac{1}{x}+2\ln\left|\frac{x-1}{x}\right|\right]_2^3=\frac{1}{3}+2\ln\left(\frac{2}{3}\right)-\frac{1}{2}-2\ln\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{-1}{6}+2\left[\ln\left(\frac{2}{3}\right)-\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right]$$

■ *Integrales 11*

Sea $f(x)=\frac{\ln(x)}{2x}$ **para** $x>0$ **. Y sea** $F(x)$ **la primitiva de** $f(x)$ **, que cumple** $F(1)=2$ **.**

a) Calcula $F'(e)$ **.**

b) Halla la ecuación de la recta tangente a $F(x)$ **en el punto de abscisa** $x=e$ **.**

a) La primitiva $F(x)$ de una función $f(x)$ se obtiene integrando dicha función $f(x)$. Por lo tanto, la deriva $F'(x)$ coincide con la función $f(x)$ (no nos liemos con las minúsculas y las mayúsculas; se suelen reservar las letras mayúsculas $F, G, H...$ para indicar las primitivas).

$$F'(e)=f(e)=\frac{\ln(e)}{2e}=\frac{1}{2e}$$

b) Para obtener la recta tangente a una función en un punto, necesitamos el punto (x_0, y_0) y la pendiente m de la recta en dicho punto.

El punto $(x_0, y_0)=(e, y_0)$ → Necesitamos obtener la imagen de $x=e$.

La pendiente coincide con el valor de la derivada de la función en el punto. Por lo tanto $m=F'(e)=f(e)=\frac{1}{2e}$ tal y como razonamos en el apartado anterior.

Nos falta, en consecuencia, la imagen de $x=e$. ¿Cómo obtener la fórmula de $F(x)$ donde evaluar $x=e$? Integrando $f(x)$.

$$F(x)=\int f(x)dx \quad \rightarrow \quad F(x)=\int \frac{\ln(x)}{2x}dx=\frac{1}{2}\int \frac{\ln(x)}{x}dx=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\int \frac{2\cdot\ln(x)}{x}dx=\frac{1}{4}\ln^2(x)+C$$

Donde hemos resuelto la integral inmediata recordando que la derivada de $\ln(x)$ es $\frac{1}{x}$.

De la familia de primitivas $F(x)=\frac{1}{4}\ln^2(x)+C$ elegimos la que cumple la condición del enunciado

$$F(1)=2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{4}\ln^2(1)+C=2 \quad \rightarrow \quad C=2$$

$$F(x)=\frac{1}{4}\ln^2(x)+2 \quad \rightarrow \text{evaluamos} \quad x=e \quad \rightarrow \quad F(e)=\frac{1}{4}\ln^2(e)+2=\frac{9}{4} \quad \rightarrow \text{punto} \quad \left(e, \frac{9}{4}\right)$$

La ecuación punto-pendiente de la recta solución resulta:

$$\frac{1}{2e}=\frac{y-\frac{9}{4}}{x-e}$$

▪ *Integrales 12*

Obtener una función derivable $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ **, tal que** $f'(x)=\begin{Bmatrix} x^2-2x & si & x<0 \\ e^x-1 & si & x\geq 0\end{Bmatrix}$ **y sabiendo que** $f(1)=1$

Toda funcíón continua en el intervalo $[a,b]$, por el el **Teorema Fundamental del Cálculo Integral**, es integrable.

Si $f(x)$ es derivable significa que su función derivada $f'(x)$ es continua en todo su dominio de definición, por lo que $f(x)=\int_a^x f'(x)dx$ es una primitiva de $f'(x)\forall x\in[a,b]$.

Si integramos $f'(x)$ en cada intervalo, obtendremos $f(x)$.

Si $x<0 \rightarrow f(x)=\int(x^2-2x)dx \rightarrow f(x)=\frac{x^3}{3}-x^2+C$

Si $x\geq 0 \rightarrow f(x)=\int(e^x-1)dx \rightarrow f(x)=e^x-x+D$

De la condición del enunciado $f(1)=1 \rightarrow e-1+D=1 \rightarrow D=2-e$

Si la función es continua en toda la recta real, será continua en $x=0$, por lo que los límites laterales en ese punto deben coincidir.

$$\lim_{x\to 0^-}\left(\frac{x^3}{3}-x^2+C\right)=C \quad , \quad \lim_{x\to 0^+}(e^x-x+2-e)=1+2-e=3-e$$

Igualando ambos límites → $C=3-e$

La función solución resulta $f(x)=\begin{Bmatrix} \frac{x^3}{3}-x^2+3-e & si & x<0 \\ e^x-x+2-e & si & x\geq 0\end{Bmatrix}$

■ *Integrales 13*

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo $[2,3]$ y $F(x)$ una primitiva de $f(x)$ tal que $F(2)=1$ y $F(3)=2$. Calcular:

a) $\int_2^3 f(x)dx$

b) $\int_2^3 (5\cdot f(x)-7)dx$

c) $\int_2^3 F^2(x)\cdot f(x)dx$

a) Si $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ $\rightarrow$ $F(x)=\int f(x)dx$

Al aplicar la regla de Barrow en $\int_2^3 f(x)dx=[F(x)]_2^3=F(3)-F(2)=2-1=1$

b) $I=\int_2^3 (5\cdot f(x)-7)dx=5\int_2^3 f(x)dx-7\int_2^3 dx=5[F(x)]_2^3-7[x]_2^3=5\cdot(F(3)-F(2))-7\cdot(3-2)$
$I=5\cdot(2-1)-7\cdot 1=5-7=-2$

c) Si $F(x)=\int f(x)dx$ $\rightarrow$ $F'(x)=f(x)$ $\rightarrow$ Por lo tanto:

$$I=\int_2^3 F^2(x)\cdot f(x)dx=\int_2^3 F^2(x)\cdot F'(x)dx=[\frac{1}{3}F^3(x)]_2^3$$

Donde nos damos cuenta que dentro de la integral definida tenemos la potencia de una función por la derivada de esa función.

$$I=\frac{1}{3}\cdot(F^3(3)-F^3(2))=\frac{1}{3}\cdot(2^3-1^3)=\frac{7}{3}$$

■ *Integrales 14*

Calcula $\int_0^{\pi^2} sen(\sqrt{x})dx$. Ayuda: cambio de variable $\sqrt{x}=t$

$$\sqrt{x}=t \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x}}dx=dt \rightarrow dx=2\sqrt{x}dt=2t\,dt$$

$$I=\int_0^{\pi^2} sen(\sqrt{x})\,dx=\int_0^{\pi^2} sen(t)\,2t\,dt=2\int_0^{\pi^2} t\cdot sen(t)\,dt$$

Resolvemos la integral indefinida aplicando partes.

$$u=t \quad \rightarrow \quad u'=1$$
$$v'=sen(t) \quad \rightarrow \quad v=-\cos(t)$$

$$\int t\cdot sen(t)\,dt=-t\cdot\cos(t)+\int \cos(t)\,dt=-t\cdot\cos(t)+sen(t)$$

Deshacemos el cambio de variable $\sqrt{x}=t \quad \rightarrow \quad -\sqrt{x}\cdot\cos(\sqrt{x})+sen(\sqrt{x})$
Por lo que nuestra integral definida resulta:

$$I=2\cdot[-\sqrt{x}\cdot\cos(\sqrt{x})+sen(\sqrt{x})]_0^{\pi^2}=2\cdot[-\pi\cdot\cos(\pi)+sen(\pi)+0-0]=2\pi$$

Cálculo de áreas

■ *Áreas 1*

Calcular el valor de $a>1$ sabiendo que el área encerrada por la parábola $y=-x^2+a\,x$ y la recta $y=x$ es igual a $\frac{4}{3}$.

Para obtener el área encerrada por ambas curvas debemos determinar.

- Los **puntos de corte** entre ambas gráficas.
- Decidir **qué función se encuentra por encima** de la otra.

Para obtener los puntos de corte igualamos ambas ecuaciones.

$$-x^2+a\,x=x \;\rightarrow\; -x^2+(a-1)x=0 \;\rightarrow\; x(-x+(a-1))=0 \;\rightarrow\; x=0 \;,\; x=a-1$$

Como $a>1 \rightarrow x=a-1>0 \rightarrow$ Este punto de corte se encontrará en el primer o cuarto cuadrante. Como la recta $y=x$ no pasa por el cuarto cuadrante, es obvio que $x=a-1>0$ indica un punto del primer cuadrante.

La parábola $y=-x^2+a\,x$ es cóncava hacia abajo, ya que el coeficiente que acompaña a x^2 es negativo. Por lo tanto, la parábola $y=-x^2+a\,x$ quedará por encima de la recta $y=x$ en el intervalo marcado por los puntos de corte $[0,a-1]$.

$$Área=\int_0^{a-1}(-x^2+a\,x-x)\,dx$$

Aplicamos la **regla de Barrow**.

$$Área=\left[\frac{-x^3}{3}+(a-1)\frac{x^2}{2}\right]_0^{a-1}=\frac{-(a-1)^3}{3}+(a-1)\frac{(a-1)^2}{2}=\frac{-2(a-1)^3+3(a-1)^3}{6}=\frac{(a-1)^3}{6}$$

Según el enunciado el área es igual a $\frac{4}{3}$.

$$\frac{(a-1)^3}{6}=\frac{4}{3} \;\rightarrow\; (a-1)^3=8 \;\rightarrow\; a-1=2 \;\rightarrow\; a=3$$

■ *Áreas 2*

Sea $g(x)=\ln(x)$ **. Calcula el valor de** $a>1$ **para que el área limitada por su gráfica, el eje de abscisas y la recta** $x=a$ **sea igual a** 1 **.**

La **función logaritmo es estrictamente creciente en su dominio de definición y corta al eje de abscisas en el** $x=1$. De tal forma que el área encerrada por su gráfica y el eje de abscisas en el intervalo $[1,a]$ será igual a:

$$Área=\int_1^a \ln(x)\,dx$$

Integramos por partes la integral indefinida.

$$u=\ln(x) \quad \rightarrow \quad u'=\frac{1}{x}$$

$$v'=1 \quad \rightarrow \quad v=x$$

$$\int \ln(x)\,dx=x\cdot\ln(x)-\int dx=x\cdot\ln(x)-x+C$$

Aplicamos la **regla de Barrow** en la integral definida.

$$Área=\int_1^a \ln(x)\,dx=[x\cdot\ln(x)-x]_1^a=a\cdot\ln(a)-a-0+1=a(\ln(a)-1)+1$$

El enunciado afirma que el área debe ser igual a 1 .

$$a(\ln(a)-1)+1=1 \quad \rightarrow \quad a(\ln(a)-1)=0 \quad \rightarrow \quad a=0 \quad , \quad \ln(a)-1=0 \quad \rightarrow \quad a=e$$

De las dos soluciones nos quedamos con la positiva $a=e$.

Aprovechando que sale el número e . Esto es una **fiesta de funciones**, todas bailando y divirtiéndose. En un rincón, sola, está la función exponencial.

Le dicen las demás funciones:

“¡Exponencial, intégrate!”

A lo cual responde:

“¿Para qué?, ¿para quedarme igual?”

■ *Áreas 3*

Calcular el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x)=2-x$ **y** $g(x)=\frac{2}{x+1}$ **.**

Obtenemos puntos de corte de ambas gráficas → $2-x=\frac{2}{x+1}$ → $-x^2+x=0$ → $x=0$, $x=1$

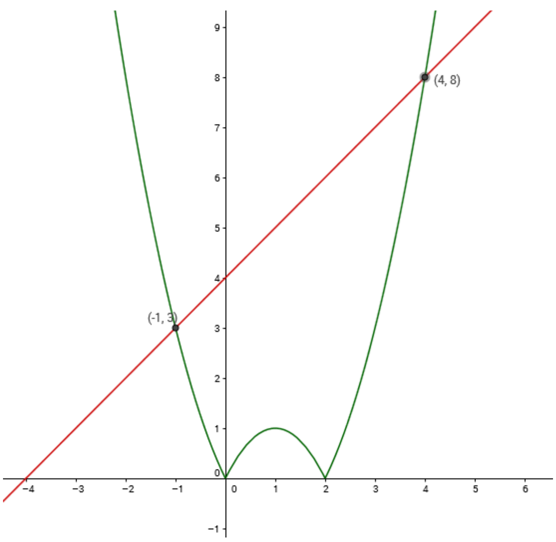
Con un sencillo esbozo podemos decidir qué función está por encima de la otra en el intervalo $[0,1]$. O bien darnos cuenta que $g(x)=\frac{2}{x+1}$ es una función cóncava hacia arriba y estrictamente decreciente para $x>-1$, mientras que la recta $f(x)=2-x$ es estrictamente decreciente en toda la recta real. Por lo que la recta permanece por encima de la hipérbola en $[0,1]$. El área encerrada será igual a:

$$Área=\int_0^1 (2-x-\frac{2}{x+1})\,dx=[2x-\frac{x^2}{2}-2\ln|x+1|]_0^1=2-\frac{1}{2}-2\ln(2)=\frac{3}{2}-2\ln(2)\ u^2$$

■ *Áreas 4*

Calcular el área encerrada por las gráficas de las funciones $f(x)=|x(x-2)|$ **y** $g(x)=x+4$ **.**

Necesitamos los puntos de corte de ambas gráficas. Podemos hacer un sencillo esbozo, para estimar los puntos de corte. Y podemos trazar la parábola contenida dentro del valor absoluto y colocar como positiva la zona donde sea negativa.



O bien de manera analítica, antes de trabajar con el valor absoluto, podemos romper la función a trozos. Las raíces del argumento del valor absoluto son $x=0$ y $x=2$, por lo que si evaluamos el signo del argumento del valor absoluto, resulta:

$$f(x)=\begin{Bmatrix} x(x-2) \ \ si \ \ x<0 \\ -x(x-2) \ \ si \ \ 0\leq x\leq 2 \\ x(x-2) \ \ si \ \ x>2 \end{Bmatrix}$$

Obtenemos los puntos de corte con la recta $g(x)=x+4$ en cada tramo.

Si $x<0 \ \rightarrow \ x(x-2)=x+4 \ \rightarrow \ x=-1$
Si $0\leq x\leq 2 \ \rightarrow \ -x(x-2)=x+4$ → No hay puntos de corte en el intervalo
Si $x>2 \ \rightarrow \ x(x-2)=x+4 \ \rightarrow \ x=4$

La recta queda por encima de la parábola, debiendo distinguir los siguientes tramos:

$$Área=\int_{-1}^{0}(x+4-x(x-2))dx+\int_{0}^{2}(x+4+x(x-2))dx+\int_{2}^{4}(x+4-x(x-2))dx$$

$$Área=\int_{-1}^{0}(-x^2+3x+4)dx+\int_{0}^{2}(x^2-x+4)dx+\int_{2}^{4}(-x^2+3x+4)dx$$

$$Área=[\frac{-x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+4x]_{-1}^{0}+[\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+4x]_{-1}^{0}+[\frac{-x^3}{3}+\frac{3x^2}{2}+4x]_{2}^{4}=\frac{109}{6} \ \ u^2$$

■ *Áreas 5*

Calcula el área limitada por la curva $y=(x+1)e^{2x}$ y las rectas $x=0$, $x=1$ e $y=0$.

Debemos determinar si la función $y=(x+1)e^{2x}$ corta al eje horizontal $y=0$ en algún punto del intervalo $[0,1]$. Para ello, igualamos ambas funciones.

$(x+1)e^{2x}=0 \ \rightarrow \ x+1=0$, $x=-1$ → o bien $e^{2x}=0$ que no posee solución

Por lo tanto, no hay puntos de corte entre ambas gráficas en el intervalo $[0,1]$.

La función $y=(x+1)e^{2x}$ es positiva tanto en $y(x=0)=1$ como en $y(x=1)=2\cdot e^2$, por lo tanto su gráfica siempre se mantiene por encima de la recta horizontal $y=0$. El área encerrada será:

$$A=\int_0^1 (x+1)e^{2x}\,dx=\int_0^1 x\cdot e^{2x}\,dx+\int_0^1 e^{2x}\,dx$$

Resolvemos cada una de las integrales indefinidas resultantes.

$\int x\cdot e^{2x}\,dx$ → aplicamos partes

$$u=x \quad\rightarrow\quad u'=1$$

$$v'=e^{2x} \quad\rightarrow\quad v'=\frac{1}{2}e^{2x}$$

$$\int x\cdot e^{2x}\,dx=\frac{x\cdot e^{2x}}{2}-\frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx=\frac{x\cdot e^{2x}}{2}-\frac{1}{4}e^{2x}+C$$

$$\int e^{2x}\,dx=\frac{1}{2}e^{2x}+D$$

Por lo que las integrales definidas que aparecen en el cálculo del área resultan.

$$A=\int_0^1 x\cdot e^{2x}\,dx+\int_0^1 e^{2x}\,dx=\left[\frac{x\cdot e^{2x}}{2}-\frac{e^{2x}}{4}\right]_0^1+\left[\frac{e^{2x}}{2}\right]_0^1$$

Aplicamos la **regla de Barrow**.

$$A=\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{4}-0+\frac{1}{4}+\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}=\frac{3e^2}{4}-\frac{1}{4}\quad u^2$$

■ *Áreas 6*

Calcula el área limitada por $f(x)=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ **, el eje** OX **y las rectas** $x=0$ **y** $x=\ln(5)$ **.**

Si la función se encuentra **por encima del eje horizontal** el **área** encerrada será igual a la **integral definida** de la función entre los límites de integración.

Recuerda que si la función se encuentra **por debajo del eje horizontal**, el **área** se define como el **valor absoluto de esa integral definida**. Es decir, **una integral definida puede dar como resultado un valor**

negativo... pero un área siempre debe ser positiva, y por eso aplicamos valor absoluto en este segundo caso.

La función $f(x)=\frac{e^x}{(1+e^x)^2}$ nunca corta al eje horizontal, ya que $e^x=0$ no admite solución. Además $f(0)$ y $f(\ln(5))$ son valores positivos, por lo que la curva e encuentra por encima del eje horizontal.

$$Área=\int_0^{\ln(5)}\frac{e^x}{(1+e^x)^2}dx=\left[\frac{-1}{1+e^x}\right]_0^{\ln(5)}=\left[\frac{-1}{1+\ln(5)}+\frac{1}{2}\right]\simeq 0,117\ \ u^2$$

Donde hemos recordado la derivada de la función inversa $\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{f(x)}\right]=\frac{-f'(x)}{f^2(x)}$ y hemos aplicado la regla de Barrow.

Sistemas de ecuaciones por Gauss

■ *Sistemas y Gauss 1*

Sea el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{matrix} x+y+(m+1)z=2 \\ x+(m-1)y+2z=1 \\ 2x+my+z=-1 \end{matrix}\right\}$

a) Discutir sus posibles soluciones según el valor del parámetro $m\in\mathbb{R}$ **.**

b) Resolver el sistema, si es posible, para $m=2$ **.**

a) Planteamos la matriz ampliada del sistema y triangulamos por Gauss. Recuerda que si, al transformar alguna línea, aparece en la ecuación de transformación el parámetro m , debemos **estar atentos al obtener los resultados finales por si algún valor está inhabilitado** (ya que no podemos multiplicar por 0 la línea que estamos transformando).

¿Qué transformaciones podemos aplicar? **Transformaciones lineales**. Es decir: sumar/restar líneas paralelas entre sí y/o multiplicar una línea por un número real no nulo.

Estas transformaciones lineales garantizan que **el sistema resultante es equivalente al sistema de partida**, es decir, tienen las mismas soluciones.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m+1 & 2 \\ 1 & m-1 & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow F'_2=F_2-F_1 \ , \ F'_3=F_3-2F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m+1 & 2 \\ 0 & m-2 & 1-m & -1 \\ 0 & m-2 & -2m-1 & -5 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow F'_3=F_3-F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m+1 & 2 \\ 0 & m-2 & 1-m & -1 \\ 0 & 0 & -m-2 & -4 \end{array}\right)$$

Discusión de casos (es vital **mirar las posiciones** a_{33} **,** a_{22} **y** a_{11} **en la matriz triangular**):

- Si $-m-2=0 \rightarrow m=-2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$ → Incongruencia en F_3 → No hay solución → Sistema Incompatible
- Si $m-2=0 \rightarrow m=2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right) \rightarrow$ F_3 es combinación lineal de F_2 , por lo que el sistema equivalente resulta $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$ → Sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas → Infinitas soluciones → Sistema Compatible indeterminado con un parámetro libre. Recuerda que **una línea** L_i **es combinación lineal de otra línea paralela o de otras líneas paralelas si podemos expresar esa línea** L_i **como suma/resta de las otras líneas y/o**

proporcional a otra línea. En este caso, podremos obviar en la resolución la línea que es combinación lineal, ya que no aporta información nueva al sistema de ecuaciones.

- Si $m \neq -2$ y $m \neq 2$ → Solución única → Sistema Compatible Determinado, ya que llegamos a **tres ecuaciones no nulas en la sistema triangulado de tres ecuaciones y tres incógnitas, que no son combinación lineal entre sí**.

b) Para $m=2$ ya hemos razonado que tenemos infinitas soluciones al ser S.C.I. con un parámetro libre. Para resolver **damos a una de las incógnitas el valor arbitrario del parámetro**, e intentamos escribir las otras incógnitas en función de ese parámetro.

Si resulta que la incógnita a la que hemos igualado al parámetro libre toma un valor real fijo después de operar y resolver en el sistema, significa que no puede ser parámetro libre, por lo que igualaremos otra incógnita al parámetro.

El sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas al que llegamos es:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \quad z=1 \quad , \quad y=\lambda \quad \rightarrow \quad x=-1-\lambda$$

■ *Sistemas y Gauss 2*

Sea $\left\{\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x-a\cdot y+z=1 \\ a\cdot x+y+z=4 \end{array}\right\}$ **. Discutir las soluciones en función del valor de** $a \in \mathbb{R}$ **.**

Planteamos la matriz ampliada del sistema y triangulamos por Gauss.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \quad F'_2=F_2-F_1 \quad , \quad F'_3=F_3-a\cdot F_1 \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a & 4-a \end{array}\right) \rightarrow$$

→ Intercambiamos C_2 con C_3 (**el cambio de columnas afecta al orden de las incógnitas**) →

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a & 4-a \end{array}\right) \rightarrow \text{Intercambiamos } F_2 \text{ con } F_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 4-a \\ 0 & 0 & -a-1 & 0 \end{array}\right)$$

Discusión de casos:

- Si $-a-1=0 \rightarrow \quad a=-1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ → Podemos obviar la tercera fila (al hacerse todos los términos nulos significa que es combinación lineal de las otras filas). Llegamos a un sistema equivalente de dos ecuaciones y tres incógnitas → Un parámetro libre → infinitas soluciones → Sistema Compatible Indeterminado

- Si $1-a=0 \rightarrow a=1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$ → Absurdo en F_2 → No hay solución → Sistema incompatible, ya que $0 \neq 4$.
- Si $a \neq -1$ y $a \neq 1$ → Solución única → Sistema Compatible Determinado, ya que **llegamos a tres ecuaciones no nulas tras triangular la matriz, que no son combinación lineal entre sí**.

■ *Sistemas y Gauss 3*

Sea el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{c} a x+7y+5z=0 \\ x+a y+z=3 \\ y+z=-2 \end{array}\right\}$

a) Discutir sus posibles soluciones según el valor del parámetro $a \in \mathbb{R}$ **.**

b) Resolver el sistema, si es posible, para $a=4$ **.**

a) $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 5 & 0 \\ 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$ → intercambiamos F_3 con F_2 → $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & a & 1 & 3 \end{array}\right)$ → $F'_3=a F_3-F_1$ (el valor $a=0$ inhabilita esta operación, porque multiplicaría por cero la fila F_3 que estamos transformando. Por lo tanto, **el caso** $a=0$ **no se considera en la futura discusión de casos una vez triangulada la matriz**).

→ $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & a^2-7 & a-5 & 3a \end{array}\right)$ → $F'_3=F_3-(a^2-7)F_2$ → $\left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -a^2+a+2 & 2a^2+3a-14 \end{array}\right)$

Discusión de casos:

- Si $-a^2+a+2=0 \rightarrow a=-1$, $a=2$
  - Si $a=-1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{array}\right)$ → Absurdo en F_3 → No hay solución → S.I.
  - Si $a=2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ → F_3 es combinación lineal de otras filas → Infinitas soluciones → S.C.I.
- En general, si $a \neq -1$, $a \neq 2$ → Solución única → S.C.D.

b) Para $a=4 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -10 & 30 \end{array}\right) \rightarrow$ S.C.D. $\rightarrow \quad z=-3 \rightarrow \quad y=1 \rightarrow x=2$

Esto son PowerPoint y Excel que llaman a la puerta.¿Cómo se llama la película?

Está-Word... jajajaja, **madre mía**, buenísimo.

Otro chiste. Ración doble.

Esto es una iglesia tan bajita, tan bajita, tan bajita, que la gente en ve de arrodillarse hacía cuerpo a tierra.

Matrices

■ *Matrices 1*

Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}1+m & 1\\ 1 & 1-m\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ **.**

a) ¿Para qué valores de m **se verifica** $A^2=2A+I$ **? (Siendo** I **la matriz identidad).**

b) Para $m=1$ **calcula** A^{-1} **.**

c) Para $m=1$ **calcula** X **que satisface** $A\cdot X-B=A\cdot B$ **.**

a) $A^2=2A+I \rightarrow \begin{pmatrix}1+m & 1\\ 1 & 1-m\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1+m & 1\\ 1 & 1-m\end{pmatrix}=2\cdot\begin{pmatrix}1+m & 1\\ 1 & 1-m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

Operamos.

$$\begin{pmatrix}(1+m)^2+1 & 1+m+1-m\\ 1+m+1-m & 1+(1-m)^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2+2m & 2\\ 2 & 2-2m\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1 & -1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}m^2+2+2m & 2\\ 2 & m^2+2-2m\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3+2m & 1\\ 3 & 2-2m\end{pmatrix}$$

Igualamos término a término en ambas matrices, encontramos las siguientes incongruencias o absurdos matemáticos.

$2=1 \quad , \quad 2=3$

Por lo tanto, no existe ningún valor real m que satisfaga la ecuación matricial.

b) $A=\begin{pmatrix}1+m & 1\\ 1 & 1-m\end{pmatrix} \rightarrow m=1 \rightarrow A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$

$|A|=0-1=-1\neq 0$ $\rightarrow$ Existe A^{-1} $\rightarrow$ $A^{-1}=\dfrac{[adj(A)]^t}{|A|}$

$A_{11}=0 \quad , \quad A_{12}=-1$

$A_{21}=-1 \quad , \quad A_{22}=2$

Es decir → $adj(A)=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow [adj(A)]^t=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

En efecto → $A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

c) $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $A^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$A\cdot X-B=A\cdot B \rightarrow A\cdot X=A\cdot B+B \rightarrow A\cdot X=(A+I)B \rightarrow X=A^{-1}\cdot(A+I)\cdot B$$

$$X=(A^{-1}\cdot A+A^{-1}\cdot I)\cdot B \rightarrow X=(I+A^{-1})\cdot B$$

Operamos.

$$I+A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$(I+A^{-1})\cdot B=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow X=\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

■ *Matrices 2*

Despeja X de la ecuación matricial $X(CD)^{-1}=A+X(D^{-1}C^{-1}-B)$, siendo $A, B, C\ y\ D$ matrices cuadradas invertibles.

Recordamos que una matriz multplicada por su inversa da la matriz identidad → $A\,A^{-1}=I$

Recordamos que una matriz multiplicada por la matriz identidad, resulta la propia matriz → $A\,I=A$

Recordamos que el producto de matrices no es conmutativo, por lo que por lo general → $AB=BA$, por lo que al multiplicar matrices debemos tener muy claro el lado por donde apliamos la multiplicación.

Más cosas: la inversa de un producto resulta $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$. Ojo que cambia el orden de la matrices cuando el operador inversa actúa sobre cada término del producto.

Y por Dios... que nadie divida matrices. La división de matrices no está definida.

Con todo esto a modo de repaso, resolvemos.

$X(CD)^{-1}=A+X(D^{-1}C^{-1}-B)$ → Aplico por la derecha la inversa de $(CD)^{-1}$

$$X(CD)^{-1}CD=[A+X(D^{-1}C^{-1}-B)]CD \rightarrow X\,I=[A+X(D^{-1}C^{-1}-B)]CD$$

Donde I es la matriz identidad.

$$X=ACD+X\left(D^{-1}C^{-1}-B\right)CD \quad\rightarrow\quad X=ACD+\left(XD^{-1}C^{-1}-XB\right)CD$$
$$X=ACD+XD^{-1}C^{-1}C\,D-X\,B\,C\,D$$

Es fundamental aplicar los productos en el orden correcto.

$$X=A\,C\,D+X\,D^{-1}\,I\,D-X\,BC\,D \quad\rightarrow\quad X=A\,C\,D+X\,D^{-1}\,D-X\,B\,C\,D$$
$$X=ACD+X\,I-XBCD \quad\rightarrow\quad X=A\,C\,D+X-X\,B\,C\,D \quad\rightarrow\quad 0=A\,C\,D-X\,B\,C\,D$$

Donde 0 es la matriz nula.

$$X\,B\,C\,D=ACD \quad\rightarrow\quad X\,B\,C\,D\,D^{-1}=A\,C\,D\,D^{-1} \quad\rightarrow\quad X\,B\,C=A\,C \quad\rightarrow\quad X\,B\,C\,C^{-1}=A\,C\,C^{-1}$$
$$X\,B=A \quad\rightarrow\quad X\,B\,B^{-1}=A\,B^{-1} \quad\rightarrow\quad X=A\,B^{-1}$$

Resumiendo: el secreto estña en ir aplicando matrices inversas, sin equivocarnos de lado de aplicación. Y cuando coincida una matriz y su inversa, cancelan como la matriz identidad.

Determinantes

■ *Determinantes 1*

Considera el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{matrix} \lambda x+y-z=-1 \\ \lambda x+\lambda z=\lambda \\ x+y-\lambda z=0 \end{matrix}\right\}$

a) Discute el sistema según los valores de λ **.**

b) Resuelve el sistema para $\lambda=0$ **.**

a) La matriz del sistema y la matriz ampliada son:

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \quad , \quad A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & -1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & -1 & \lambda & 0 \end{array}\right)$$

Por el **Teorema de Rouché-Frobenius**, el sistema tendrá **solución** si el **rango de ambas matrices coincide**. En caso contrario, será incompatible.

Si ambos **rangos coinciden y son iguales al número de incógnitas del sistema** (tres en nuestro caso), la solución será única y estaremos ante un **sistema compatible determinado**.

Si ambos **rangos coinciden y su valor es menor que le número de incógnitas, estaremos ante infinitas soluciones y el sistema será** compatible indeterminado (con tantos parámetros libres como la diferencia entre el número de incógnitas y el rango).

Para estudiar el rango de la matriz A , calculamos su determinante.

$$|A|=0+\lambda-\lambda-(0+\lambda^2-\lambda^2)=0$$

El determinante de A se anula independientemente del valor del parámetro λ . Por lo tanto, el rango de A nunca será 3 . Como máximo, podrá ser 2 .

El rango de A será 2 si existe al menos un menor de orden 2 no nulo. Si estudiamos todos los menores de orden dos posibles:

$$|\alpha_{11}|=-\lambda \quad , \quad |\alpha_{12}|=-\lambda^2-\lambda=-\lambda(\lambda+1) \quad , \quad |\alpha_{13}|=\lambda$$

$$|\alpha_{21}|=-\lambda+1 \quad , \quad |\alpha_{22}|=-\lambda^2+1=(1+\lambda)(1-\lambda) \quad , \quad |\alpha_{23}|=\lambda-1$$

$$|\alpha_{31}|=\lambda \quad , \quad |\alpha_{32}|=\lambda^2+\lambda=\lambda(\lambda+1) \quad , \quad |\alpha_{33}|=-\lambda$$

Viendo estos nueve menores de orden dos, no hay ningún valor único del parámetro λ que anule a todos.

Por lo tanto, el rango de A será 2 independientemente del valor del parámetro λ .

Ahora estudiamos el rango de la matriz ampliada A/C . Como máximo su rango será 3 , ya que es un matriz rectangular de tres filas y cuatro columnas.

En primer lugar comprobamos si A/C contiene alguna submatriz cuadrada de orden tres con determinante no nulo.

$$A/C=\left(\begin{array}{ccc|c}\lambda & 1 & -1 & -1\\ \lambda & 0 & \lambda & \lambda\\ 1 & -1 & \lambda & 0\end{array}\right)$$

$$|C_1C_2C_4|=\lambda(2+\lambda) \quad , \quad |C_1C_2C_4|=0 \ \rightarrow \ \lambda=0 \ , \ \lambda=-2$$

$$|C_1C_3C_4|=\lambda^2(1-\lambda) \quad , \quad |C_1C_3C_4|=0 \ \rightarrow \ \lambda=0 \ , \ \lambda=1$$

$$|C_2C_3C_4|=\lambda^2 \quad , \quad |C_2C_3C_4|=0 \ \rightarrow \ \lambda=0$$

Discusión de casos (**sé ordenado en la discusión de casos**):

- Si $\lambda\neq 0$ y $\lambda\neq 1$ y $\lambda\neq -2$ $\rightarrow$ $rango(A/C)=3\neq 2=rango(A)$ → Sistema incompatible → No existe solucion.
- Si $\lambda=-2$ $\rightarrow$ $|C_2C_3C_4|=\lambda^2=4\neq 0$ $\rightarrow$ $rango(A/C)=3\neq 2=rango(A)$ → Sistema incompatible → No existe solucion.
- Si $\lambda=1$ $\rightarrow$ $|C_2C_3C_4|=\lambda^2=1\neq 0$ $\rightarrow$ $rango(A/C)=3\neq 2=rango(A)$ → Sistema incompatible → No existe solucion.
- Si $\lambda=0$ $\rightarrow$ $rango(A/C)\neq 3$ por anularse el determinante de todas las submatrices de orden tres → $A/C=\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\end{array}\right)$ → Encontramos al menos un menor de orden dos no nulo → $\begin{vmatrix}0 & 1\\ 1 & -1\end{vmatrix}=-1\neq 0$ $\rightarrow$ $rango(A/C)=2=rango(A)<3=número\ de\ incógnitas$ → Sistema compatible indeterminado → Infinitas soluciones con $3-2=1$ parámetro libre.

b) Debemos resolver el sistema para $\lambda=0$, donde ya sabemos (por el apartado anterior), que estamos ante un sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones) con un parámetro libre.

$$A/C=\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 0 & 0\end{array}\right)$$ → Podemos obviar la segunda fila por tener todos los términos nulos →

$$A/C=\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & -1 & -1\\ 1 & -1 & 0 & 0\end{array}\right)$$ → Tomamos como parámetro libre $y=\alpha$

De la primera ecuación del nuevo sistema → $z=1+\alpha$

De la segunda ecuación del nuevo sistema → $x=\alpha$

La solución final, en función de un parámetro, resulta → $\begin{Bmatrix} x=\alpha \\ y=\alpha \\ z=1+\alpha \end{Bmatrix}$

■ *Determinantes 2*

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$ **.**

a) Encuentra el valor, o los valores, de m **para los que** A **y** B **tienen el mismo rango.**

b) Determina, si existen, los valores de m **para los que** A **y** B **tienen el mismo determinante.**

a) El **rango** es el **número de vectores linealmente independientes dentro de la matriz**. Una matriz cuadrada de orden dos, tendrá como máximo dos vectores linealmente independientes. Una matriz cuadrada de orden tres, tendrá como máximo tres vectores linealmente independientes. Una matriz rectangular de orden tres por cuatro, tendrá como máximo tres vectores linealmente independientes.

Debemos estudiar el rango de cada matriz, y comprobar si existen valores comunes del parámetro m en la discusión de casos en ambas matrices. Para estudiar el rango, comenzamos planteando el determinante de cada matriz cuadrada y comprobando donde se anula.

$$|A|=-m-4 \quad , \quad |A|=0 \quad \rightarrow \quad m=-4$$

Si $m\neq-4$ → $|A|\neq0$ → $rango(A)=2$, ya que tendremos dos vectores linealmente independientes formando la matriz.

Si $m=-4$ → $|A|=0$ → $rango(A)=1$, ya que existe al menos un menor de orden uno no nulo. Por ejemplo $|\alpha_{22}|=-1\neq0$.

$$|B|=m^2+4m \quad , \quad |B|=0 \quad \rightarrow \quad m=0 \quad , \quad m=-4$$

Si $m\neq0$ y $m\neq-4$ → $|B|\neq0$ → $rango(B)=3$, ya que tendremos tres vectores linealmente independientes formando la matriz.

Si $m=0$ → $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ → $rango(B)=2$, ya que existe al menos un menor de orden dos no nulo. Por ejemplo $|\alpha_{33}|=4\neq0$.

Si $m=-4 \rightarrow B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow rango(B)=2$, ya que existe al menos un menor de orden dos no nulo. Por ejemplo $|\alpha_{13}|=8\neq 0$.

Comparando sendas discusiones de casos, concluimos: Si $m=0$ el rango de ambas matrices coincide y es igual a 2 .

b) En este apartado debemos igualar sendos determinantes y obtener los valores de m solución.

$$|A|=|B| \quad , \quad |A|=-m-4 \quad , \quad |B|=m^2+4m \rightarrow -m-4=m^2+4m \rightarrow m^2+5m+4=0$$
$$m=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{-5\pm 3}{2} \rightarrow m=-1 \quad , \quad m=-4$$

■ *Determinantes 3*

Dado el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{array}{c} kx+2y=3 \\ -x+2kz=-1 \\ 3x-y-7z=k+1 \end{array}\right\}$

a) Estudiar las posibles soluciones según el valor de k **.**

b) Resolver para $k=1$ **.**

Tenemos la siguiente matriz del sistema y su matriz ampliada asociada.

$$A=\begin{pmatrix} k & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2k \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix} \quad , \quad A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} k & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2k & -1 \\ 3 & -1 & -7 & k+1 \end{array}\right)$$

El sistema tendrá **solución** siempre y cuando **el rango de ambas matrices coincida**, según el **teorema de Rouché-Frobenius**.

Para estudiar el rango de la matriz A vemos para que valores de k se anula su determinante.

$$|A|=2k^2+12k-14 \quad , \quad |A|=0 \rightarrow k^2+6k-7=0 \rightarrow k=1,-7$$

Discusión de casos (**sé ordenado en la discusión de casos**):

- Si $k \neq 1, -7 \Rightarrow |A| \neq 0 \Rightarrow rango(A) = 3 = rango(A/C) = número\ de\ incógnitas$ → Estamos ante un sistema compatible determinado → Solución única.
- Si $k = -7 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rango(A) \neq 3$ → Estudiemos el rango de A y de A/C .
  $A = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -14 \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix}$ → $rango(A) = 2$ por existir al menos un menor de orden dos no nulo; por ejemplo $\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Estudiamos rango de la matriz ampliada $A/C = \left(\begin{array}{ccc|c} -7 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -14 & -1 \\ 3 & -1 & -7 & -6 \end{array}\right)$ comprobando si existe al menos un menor de orden tres no nulo.
  En efecto, $|C_1 C_2 C_4| = 13 \neq 0 \Rightarrow rango(A/C) = 3 \neq 2 = rango(A)$ → Sistema incompatible → No hay solución.
- Si $k = 1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rango(A) \neq 3$ → Estudiemos el rango de A y de A/C .
  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix}$ → $rango(A) = 2$ por existir al menos un menor de orden dos no nulo; por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Estudiamos rango de la matriz ampliada $A/C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -7 & 2 \end{array}\right)$ comprobando si existe al menos un menor de orden tres no nulo.
  Todos los menores de orden tres se anulan: $|C_1 C_2 C_4| = 0$, $|C_1 C_3 C_4| = 0$, $|C_2 C_3 C_4| = 0$ → $rango(A) = 2 = rango(A/C) < 3 = número\ de\ incógnitas$ → Sistema compatible indeterminado con un parámetro libre → Infinitas soluciones.

b) Para $k = 1$ hemos justificado en el apartado anterior que estamos ante un sistema compatible indeterminado con un parámetro libre → Infinitas soluciones. Por ejemplo, si consideramos $z = \lambda$ como parámetro libre:

$$\left\{ \begin{array}{c} x + 2y = 3 \\ -x + 2z = -1 \\ 3x - y - 7z = 2 \end{array} \right\} \rightarrow \quad f(x) = \left\{ \begin{array}{c} x + 2y = 3 \\ -x = -1 - 2\lambda \\ 3x - y = 2 + 7\lambda \end{array} \right\}$$ → De la segunda ecuación obtenemos $x = 1 + 2\lambda$. Y llevando este resultado a la primera ecuación $y = 1 - \lambda$.

La solución de nuestro sistema, dependiente de un parámetro, resulta $\left\{ \begin{array}{c} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 - \lambda \\ z = \lambda \end{array} \right\}$.

■ *Determinantes 4*

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} m+2 & 0 & 0 \\ -3 & m+1 & 1 \\ 1 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$ **.**

a) Obtener $|A^{10}|$ **.**

b) Para $m=0$ **calcular, si es posible, la matriz inversa de** A **.**

a) El determinante de un producto de matrices es el producto de los determinantes.

$$|A^{10}|=|A\cdot A\cdot A\cdot ...\cdot A|=|A|\cdot|A|\cdot|A|\cdot ...\cdot|A|=|A|^{10}$$
$$|A|=(m+2)(m^2-1) \quad \rightarrow \quad |A^{10}|=((m+2)(m^2-1))^{10}$$

b) Si $m=0 \rightarrow |A|=(0+2)(0-1)=-2\neq 0$ → Existe la matriz inversa (**el determinante no nulo es la condición necesaria y suficiente para demostrar la existencia de inversa**).

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad , \quad A^{-1}=\frac{[adj(A)]^t}{|A|}$$

Obtenemos los nueve adjuntos. Recuerda: $A_{ij}=(-1)^{i+j}\cdot|\alpha_{ij}|$

$$A_{11}=-1 \quad , \quad A_{12}=-2 \quad , \quad A_{11}=-1$$
$$A_{21}=0 \quad , \quad A_{22}=-2 \quad , \quad A_{23}=0$$
$$A_{31}=0 \quad , \quad A_{32}=-2 \quad , \quad A_{33}=2$$

$$[adj(A)]^t=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Recuerda que **la matriz inversa satisface**: $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$

■ *Determinantes 5*

Sabemos que el vector $(2,1,-1)$ **es solución del sistema** $\begin{Bmatrix} ax+by+cz=a+c \\ bx-y+bz=a-b-c \\ cx-by+2z=b \end{Bmatrix}$

Calcule el valor de los parámetros a,b y c **.**

Si el vector $(2,1,-1)$ es solución, sustituyo los valores de sus componentes en las incógnitas x,y,z del sistema.

$\begin{Bmatrix} 2a+b-c=a+c \\ 2b-1-b=a-b-c \\ 2c-b-2=b \end{Bmatrix}$ → Nuevo sistema con a,b y c como incógnitas.

$\begin{Bmatrix} a+b-2c=0 \\ -a+2b+c=1 \\ -2b+2c=2 \end{Bmatrix}$ →Notación matricial→ $M=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, $M/D=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 \end{array}\right)$

Estudiamos el rango de M . Si es 3 , tendremos sistema compatible determinado con solución única. Y podremos resolver, por ejemplo, por la **regla de Cramer**.

$$|M|=4+0-4-(0-2-2)=4\neq 0 \quad \rightarrow \quad Rango(M)=3$$

Podemos obtener la solución única por Cramer para las incógnitas a,b y c . Recuerda que **Cramer solo lo utilizamos en los sistemas compatibles determinados**.

$$a=\frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{4}=\frac{0+2+4-(-8+0+2)}{4}=\frac{12}{4}=3$$

$$b=\frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix}}{4}=\frac{2+0+4-(0+0+2)}{4}=\frac{4}{4}=1$$

$$c=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1 & 0\\ -1 & 2 & 1\\ 0 & -2 & 2\end{vmatrix}}{4}=\frac{4+0+0-(0-2-2)}{4}=\frac{8}{4}=2$$

■ *Determinantes 6*

Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & -1\end{pmatrix}$ **. Calcula:**

a) $|A^{-1}|$

b) $|5\mathrm{A}|$

c) $|(5\mathrm{A})^{-1}|$

a) $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ → **El determinante de la matriz inversa es la inversa del determinante de la matriz**.

$$|A|=-1-1=-2 \quad \rightarrow \quad |A^{-1}|=\frac{-1}{2}$$

b) $|5\mathrm{A}|=5^2\cdot|A|=25\cdot(-2)=-50$ → **El determinante de un número real multiplicado por una matriz, es igual al determinante de la matriz multiplicado por el número real elevado a la dimensión de la matriz**. En nuestro ejemplo, el orden de la matriz cuadrada será igual a dos (el orden coincide con el número de filas o columnas de la matriz cuadrada).

■ *Determinantes 7*

a) Determina el rango de $A=\begin{pmatrix}a & -a & 6\\ 2 & -2 & 4\\ a+2 & -5 & -10\end{pmatrix}$ **según el valor de** a **.**

b) Encontrar una matriz B **, de orden** 2×2 **, que verifique la siguiente ecuación matricial:**

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}B\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3 & -3\\ 3 & 3\end{pmatrix}$$

a) La matriz A es de orden $n=3$. Por lo tanto su rango, como máximo, puede ser 3 . Recuerda que **el rango es el número de vectores linealmente indepenientes contenidos dentro de la matriz**.

Para que $rango(A)=3$ necesitamos que su determinante sea distinto de cero. Es decir:

$$rango(A)=3 \implies \begin{vmatrix} a & -a & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ a+2 & -5 & -10 \end{vmatrix} \neq 0$$

Antes de resolver este determinante podemos intentar hacer el mayor número de ceros posible, para simplificar la suma de producto final de la regla de Sarrus.

$$\begin{vmatrix} a & -a & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ a+2 & -5 & -10 \end{vmatrix} \rightarrow \quad C'_2=C_2+C_1 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \begin{vmatrix} a & 0 & 6 \\ 2 & 0 & 4 \\ a+2 & a-3 & -10 \end{vmatrix} = 12(a-3)-4a(a-3)=4(a-3)(3-a)=-4(a-3)^2$$

Es decir, los valores de a que no anulen el determinante harán que el rango de A sea igual a 3 .

$$-4(a-3)^2 \neq 0 \quad \rightarrow \quad a \neq 3$$

Nuestra discusión de casos es la siguiente:

- Si $a \neq 3 \quad \rightarrow \quad rango(A)=3$
- Si $a=3 \quad \rightarrow \quad A=\begin{pmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 2 & -2 & 4 \\ 5 & -5 & -10 \end{pmatrix}$ → Buscamos algún menor de orden 2 no nulo →

  Por ejemplo $|\alpha_{11}|=\begin{vmatrix} -2 & 4 \\ -5 & -10 \end{vmatrix}=20+20=40 \neq 0 \quad \rightarrow \quad rango(A)=2$

b) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} B \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad ABC=D \quad \rightarrow \quad B=A^{-1}DC^{-1}$

Calculamos las inversas de A y de C , siempre y cuando sus **determinantes** sean **no nulos** (**condición necesaria y suficiente para existencia de matriz inversa**).

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix} \rightarrow |A|=1$$

$$A^{-1}=\frac{[adj(A)]^t}{|A|}=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$$

$$C=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix} \rightarrow |C|=1$$

$$C^{-1}=\frac{[adj(C)]^t}{|C|}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$B=A^{-1}DC^{-1} \rightarrow B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3 & -3\\ 3 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix}-6 & -12\\ 9 & 18\end{pmatrix}$$

■ *Determinantes 8*

Resolver la siguiente ecuación (obtener valor de x que satisface la igualdad):

$$\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\ 1 & 5 & 25\\ 1 & 3 & 9\end{vmatrix}=0$$

Antes de aplicar la regla de Sarrus vamos a triangular el determinante, para **obtener el mayor número de ceros posibles**, de tal forma que el **producto final** que resuelte de resolver el determinante **sea lo más sencillo posible**.

$$\begin{vmatrix}1 & x & x^2\\ 1 & 5 & 25\\ 1 & 3 & 9\end{vmatrix} \rightarrow F'_2=F_2-F_1 \rightarrow \begin{vmatrix}1 & x & x^2\\ 0 & 5-x & 25-x^2\\ 1 & 3 & 9\end{vmatrix} \rightarrow F'_3=F_3-F_1 \rightarrow$$

$\rightarrow \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 5-x & 25-x^2 \\ 0 & 3-x & 9-x^2 \end{vmatrix} \rightarrow F'_3=(5-x)F_3-(3-x)F_2$ → **Divido por** $(5-x)$ **para compensar la multiplicación en la fila** F_3 $\rightarrow$

$$\rightarrow \frac{1}{5-x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 5-x & 25-x^2 \\ 0 & 0 & (5-x)(9-x^2)-(3-x)(25-x^2) \end{vmatrix}$$

El valor de este **determinante triangular** es, directamente, el **producto de los términos de la diagonal principal**. Es decir:

$$\frac{1}{5-x}\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \\ 0 & 5-x & 25-x^2 \\ 0 & 0 & (5-x)(9-x^2)-(3-x)(25-x^2) \end{vmatrix}=[(5-x)(9-x^2)-(3-x)(25-x^2)]$$

Igualamos a 0 para resolver la ecuación que plantea el enunciado:

$$[(5-x)(9-x^2)-(3-x)(25-x^2)]=0$$

Recordamos que suma por diferencia es igual a diferencia de cuadrados:

$$[(5-x)(3-x)(3+x)-(3-x)(5-x)(5+x)]=0$$

Sacando factor común:

$$[(5-x)(3-x)(3+x)-(3-x)(5-x)(5+x)]=0$$
$$(5-x)(3-x)[-2]=0$$

Si un producto es igual a cero, significa que al menos uno de los términos de la multiplicación es igual a cero. Por lo tanto:

$$5-x=0 \rightarrow x=5$$
$$3-x=0 \rightarrow x=3$$

■ *Determinantes 9*

Sea el sistema $\left\{\begin{matrix} 2x+y+az=-1 \\ -x+ay-z=2 \\ 2ax-2y+a^2z=2 \end{matrix}\right\}$

a) Discute las soluciones del siguiente sistema según los valores del parámetro a .

b) Resolverlo cuando sea compatible determinado.

a) Vamos a definir la matriz del sistema A y la matriz ampliada A/C , de tal forma que si el rango de ambas matrices coincide el sistema será compatible. En caso contrario, el sistema será incompatible y no tendrá solución (Teorema de Rouché-Frobenius).

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ -1 & a & -1 \\ 2a & -2 & a^2 \end{pmatrix}$ → El rango máximo que puede tener A es 3

$A/C=\left(\begin{matrix} 2 & 1 & a \\ -1 & a & -1 \\ 2a & -2 & a^2 \end{matrix}\left|\begin{matrix} -1 \\ 2 \\ 2 \end{matrix}\right.\right)$ → El rango máximo que puede tener A/C es 3

El rango de A será 3 si el determinante $|A|$ es distinto de cero. Por lo tanto, calculamos su determinante:

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ -1 & a & -1 \\ 2a & -2 & a^2 \end{vmatrix}=2a^3-2a+2a-(2a^3+4-a^2)=a^2-4$$

$$|A|\neq 0 \ \rightarrow \ a^2-4\neq 0 \ \rightarrow \ a^2\neq 4 \ \rightarrow \ a\neq \pm 2$$

Nuestra discusión de casos es el siguiente:

- Si $a\neq\pm 2$ → $rango(A)=3$ → $rango(A/C)=3$. Como $n=3$ es el número de incógnitas del sistema, y coincide con $rango(A)=rango(A/C)$, tendremos sistema compatible determinado (solución única).
- Si $a=2$ → $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ → Buscamos un menor de orden 2 no nulo → Por ejemplo $|\alpha_{33}|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}=4+1=5\neq 0$ → $rango(A)=2$.

  Ahora debemos estudiar el rango de la matriz ampliada, ya que al añadir una columna a la matriz

A , puede ocurrir que el rango de A/C sea 3 y estemos ante un sistema incompatible (sin solución).

En efecto, si en $A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ 4 & -2 & 4 & 2 \end{array}\right)$ tomamos la submatriz formada por la columna 2, la columna 3 y la columna 4, su determinante es no nulo.

$$|C_2 C_3 C_4|=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \end{vmatrix}=-2-8-8-(-2+8+8)=-32\neq 0 \ \rightarrow \ rango(A/C)=3 \ \rightarrow$$

Al no coincidir con $rango(A)=2$ → Sistema incompatible.

- Si $a=-2 \ \rightarrow \ A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -4 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ → Buscamos un menor de orden 2 no nulo → Por ejemplo $|\alpha_{33}|=\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix}=-4+1=-3\neq 0 \ \rightarrow \ rango(A)=2$.

  Ahora debemos estudiar el rango de la matriz ampliada.

  $A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -1 & 2 \\ -4 & -2 & 4 & 2 \end{array}\right)$ → Las cuatro submatrices de orden 3 contenidas dentro de la matriz ampliada A/C tienen determinante nulo. Por lo que el $rango(A/C)\neq 3$ → $rango(A/C)=2$.

  Otra forma de verlo es darnos cuanta de la proporcionalidad $F_3=-2F_1$ → Al existir esta combinación lineal, el rango de A/C no será 3 ya que podremos obviar una fila.

  Es decir, tenemos $rango(A)=rango(A/C)=2<3(número \ incógnitas)$ → Sistema compatible indeterminado (con un parámetro libre).

b) Debemos resolver el sistema en el caso S.C.D. **La solución quedará en función del parámetro** a **(ojo, no dar ningún valor al parámetro** a **; dejar la solución en función del parámetro)**.

Vamos a resolverlo aplicando la **regla de Cramer**.

$$\left\{\begin{array}{c} 2x+y+az=-1 \\ -x+ay-z=2 \\ 2ax-2y+a^2z=2 \end{array}\right\}$$

$A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & a \\ -1 & a & -1 \\ 2a & -2 & a^2 \end{pmatrix} \ \rightarrow \ |A|=a^2-4\neq 0$ → Por ser S.C.D. al considerar $a\neq\pm 2$

$$A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & a & -1 \\ -1 & a & -1 & 2 \\ 2a & -2 & a^2 & 2 \end{array}\right)$$

Aplicamos Cramer.

$$|A|=\begin{vmatrix} 2 & 1 & a \\ -1 & a & -1 \\ 2a & -2 & a^2 \end{vmatrix}=2a^3-2a+2a-(2a^3+4-a^2)=a^2-4$$

$$x=\frac{\begin{vmatrix} -1 & 1 & a \\ 2 & a & -1 \\ 2 & -2 & a^2 \end{vmatrix}}{a^2-4}=\frac{-a^3-2-4a-(2a^2-2+2a^2)}{a^2-4}=\frac{-a(a^2+4a+4)}{(a-2)(a+2)}=\frac{-a(a+2)^2}{(a-2)(a+2)}=\frac{-a(a+2)}{a-2}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ -1 & 2 & -1 \\ 2a & 2 & a^2 \end{vmatrix}}{a^2-4}=\frac{4a^2+2a-2a-(4a^2-4+a^2)}{a^2-4}=-1$$

$$z=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & a & 2 \\ 2a & -2 & 2 \end{vmatrix}}{a^2-4}=\frac{4a+4a-2-(-2a^2-8-2)}{a^2-4}=\frac{2a^2+8a+8}{a^2-4}=\frac{2(a+2)^2}{(a+2)(a-2)}=\frac{2(a+2)}{a-2}$$

■ *Determinantes 10*

Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$ **y sabemos que** $|A|=2$ **. Calcula los siguientes determinantes, explicando adecuadamente los pasos que sigues para calcularlos:**

a) $\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$

b) $\begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}$

a) Aplicamos transformaciones lineales de filas y columnas hasta obtener el determinante de la matriz A y así poder aplicar el valor de $|A|=2$.

$\begin{vmatrix} a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ 5 & 5 & 5 \end{vmatrix}$ → **Intercambiamos F_1 con F_3 con el consiguiente cambio de signo** → $-\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \\ a-1 & b-1 & c-1 \end{vmatrix}$ → Intercambiamos F_2 con F_3 lo cual genera un nuevo cambio de signo→ $\begin{vmatrix} 5 & 5 & 5 \\ a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \end{vmatrix}$ → Sacamos **factor común** 5 **de la primera fila** → $5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a-1 & b-1 & c-1 \\ a^2-1 & b^2-1 & c^2-1 \end{vmatrix}$ → $F'_2=F_2+F_1$, $F'_3=F_3+F_1$ →

$$\rightarrow \quad 5\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=5|A|=5\cdot 2=10$$

b) Desarrollamos los cuadrados de la primera fila:

$$\begin{vmatrix} (a+1)^2 & (b+1)^2 & (c+1)^2 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} a^2+2a+1 & b^2+2b+1 & c^2+2c+1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} \rightarrow \quad F'_1=F_1-2\mathrm{F}_2-F_3 \quad \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix}=|A|=2$$

¿Cómo se dice en árabe "matrimonio"? Ata la jaca a la estaca.

¿Y cómo se dice en árabe "divorcio"? Se aleja la almeja.

Y ahora un chiste de Física. Un amigo le dice a otro:

"Mi novia me ha pedido tiempo y distancia... Creo que quiere medir la velocidad."

■ *Determinantes 11*

Sea el sistema $A\,X=B$ **, donde** $A=\begin{pmatrix} a & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & a \end{pmatrix}$ **,** $B=\begin{pmatrix} 1 \\ a-2 \\ 3 \end{pmatrix}$ **y** $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ **.**

a) ¿Para qué valores de a **el sistema tiene solución única?**

b) ¿Para qué valores de a **el sistema no tiene solución?**

c) ¿Para qué valores de a **el sistema tiene al menos dos soluciones?**

d) Halla las soluciones cuando el sistema sea compatible.

a) El sistema tiene solución única, por el **Teorema de Rouché-Frobenius**, si los rangos de la matriz del sistema y de la matriz ampliada coinciden y son igual al número de incógnitas (tres en nuestro ejemplo).

$$A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & a-2 \\ 3 & 4 & a & 3 \end{array}\right)$$

Por lo tanto, necesitamos que $rango(A)=3=rango(A/B)$

$$|A|=\begin{vmatrix} a & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & a \end{vmatrix}=a^2-8a+15=(a-3)(a-5)$$

Si $a\neq 3\ \ y\ \ a\neq 5\ \rightarrow\ |A|\neq 0\ \rightarrow\ rango(A)=3=rango(A/B)=número\,incógnitas\ \rightarrow$ Como la matriz del sistema está contenida en la matriz ampliada, y ambas pueden tener un rango máximo igual a tres, si la primera del sistema tiene rango tres, la ampliada también tendrá rango tres → Solución única → Sistema Compatible Determinado.

b) Estudiamos si $a=3\ \ ó\ \ a=5$ generan un sistema solución. Para ello estudiamos el rango de la ampliada.

Si $a=3$ → Buscamos un menor de orden dos nulo en la matriz del sistema → $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}=3\neq 0\ \rightarrow$ $rango(A)=2$

Si $a=3\ \rightarrow\ A/B=\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right)\ \rightarrow\ |C_1\,C_2\,C_4|=|C_1\,C_3\,C_4|=|C_2\,C_2\,C_4|=0$ → Todos los menores de orden tres de la matriz ampliada son nulos → $rango(A/B)=2$ → Infinitas soluciones

Si $a=5$ → Buscamos un menor de orden dos nulo en la matriz del sistema → $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 5 \neq 0$ → $rango(A)=2$

Si $a=5$ → $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 & 3 \end{array}\right)$ → $|C_1 C_2 C_3| = \begin{vmatrix} 5 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 3 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 15+0+18-(3+0+60) \neq 0$ → $rango(A/B)=3 \neq 2 = rango(A)$ → No hay solución → Sistema Incompatible

c) Como hemos deducido en el apartado anterior, tendremos al menos dos soluciones en el caso de Sistema Compatible indeterminado (infinitas soluciones) → $a=3$

d) Si nos piden resolver en el caso de sistema compatible, se refiere tanto a determinado como indeterminado.

Si $a=3$ → Sistema Compatible Indeterminado con un grado de libertad (recuerda que el número de rgados de libertad se obtiene como la diferencia entre el número de incógnitas y el rango de la matriz ampliada).

$A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 3 & 4 & 3 & 3 \end{array}\right)$ → **Puedo obviar una ecuación, siempre que no me quede con dos ecuaciones que sean proporcionales entre sí** → Por ejemplo, obvio la tercera ecuación → $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} 3 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{array}\right)$ → $z=\lambda$ → $y=1-2\lambda$ → $x=\frac{-1}{3}+\frac{5\lambda}{3}$

En el caso $A/B = \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & a-2 \\ 3 & 4 & a & 3 \end{array}\right)$ con $a \neq 3$ y $a \neq 5$, estamos en Sistema Compatible Determinado, por lo que podemos obtener la solución única por **Cramer** o bien resolver aplicando el método de **sustitución**, o **triangulando por Gauss (elijo este método, paa no tener que hacer tantos determinantes por Cramer... aunque también va a ser un poco largo y tedioso)**. Pues nada, a vencer la pereza de tener que operar y a resolver se ha dicho.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & a-2 \\ 3 & 4 & a & 3 \end{array}\right) \rightarrow F'_3 = aF_3 - 3F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & a-2 \\ 0 & 4a-6 & a^2+3 & 3a-3 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$F_3{}'=F_3-(4a-6)F_2 \quad \rightarrow \quad \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & a-2 \\ 0 & 0 & a^2-8a+15 & -4a^2+17a-15 \end{array}\right) \rightarrow \text{Factorizamos} \rightarrow$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & a-2 \\ 0 & 0 & (a-3)(a-5) & (a-3)(-4a+5) \end{array}\right)$$

Resolvemos.

$$z=\frac{-4a+5}{a-5} \quad , \quad y=\frac{a(a+1)}{a-5} \quad , \quad x=\frac{-a(2a+5)}{a-5}$$

Rectas y planos en tres dimensiones

■ *Rectas y planos 1*

Considera el sistema

a) Discute

Posiciones relativas entre rectas y planos

■ *Posiciones relativas 1*

Considera el sistema

a) Discute

Puntos pertenecientes a rectas o planos

■ *Puntos 1*

Considera el sistema

a) Discute

Ángulos

■ *Ángulos 1*

Considera el sistema

a) Discute

Simetrías

■ *Simetrías 1*

Sean los puntos $P(2,3,1)$ y $Q(0,1,1)$. Halla la ecuación del plano Π respecto del cual ambos puntos son simétricos.

El plano Π respecto al cual ambos puntos son simétricos, será perpendicular a la recta que une los puntos P y Q .Además, el plano pasará por el punto medio del segmento $\overline{PQ}$.

Es decir, si obtenemos el vector $\vec{PQ}$ tendemos el vector perpendicular al plano. Y si obtenemos el punto medio del segmento $\overline{PQ}$, tendremos un punto del plano. Y podremos escribir la ecuación general del plano.

$$\vec{PQ}=(-2,-2,0) \rightarrow \vec{u_\Pi}=(-2,-2,0) \rightarrow \Pi:-2x-2y+D=0$$

Punto medio $\overline{PQ} \rightarrow A\left(\frac{2+0}{2},\frac{3+1}{2},\frac{1+1}{2}\right)=(1,2,1)$

Si $A\in\Pi \rightarrow -2(1)-2(2)+D=0 \rightarrow D=6$

El plano solución es $\Pi:-2x-2y+6=0$

■ *Simetrías 2*

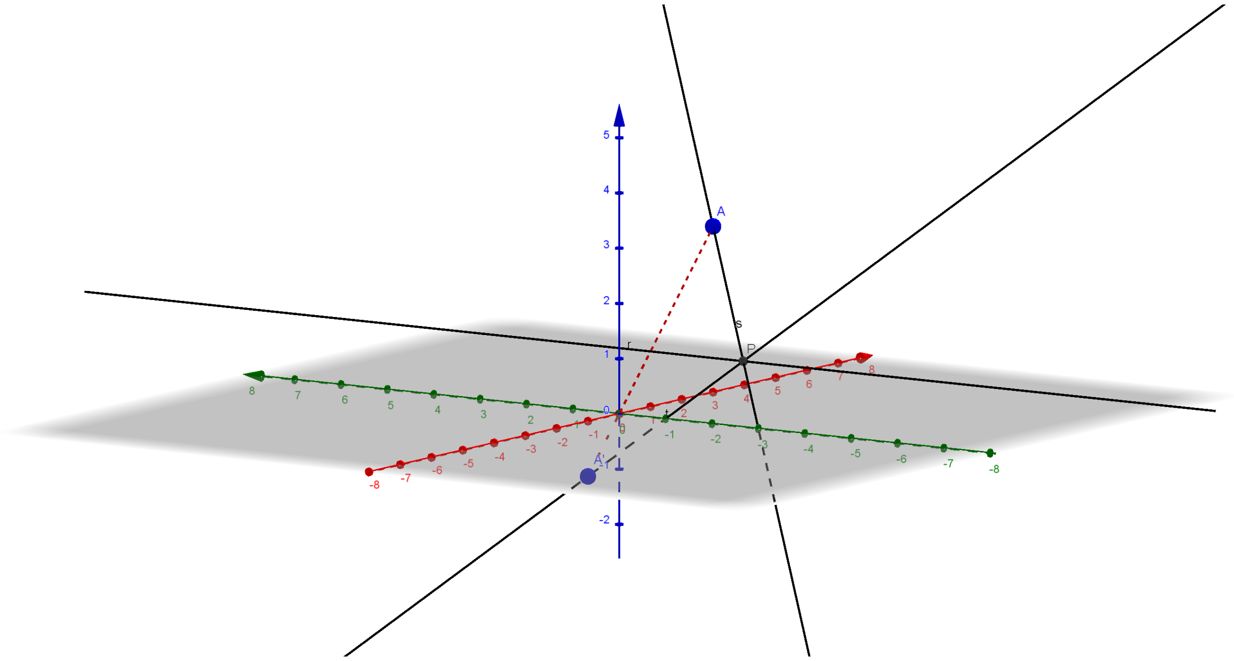
Las rectas $r:\begin{Bmatrix} x=1 \\ y=a \\ z=1 \end{Bmatrix}$ y $s:\begin{Bmatrix} x=1+b \\ y=-2+b \\ z=1+b \end{Bmatrix}$ son secantes en un punto P y forman entre sí un ángulo α . Encontrar la recta t que también pase por P y forme con la recta r el mismo ángulo que forman r y s .

Estos problemas donde aparece el ángulo entre dos rectas, a veces, pueden plantearse de forma más directa usando conceptos de simetría en vez de las fórmulas de ángulos. Si no nos dan el ángulo exacto, la fórmula de ángulo entre dos rectas puede ser difícil de manejar para obtener una solución.

Las tres rectas se cortan en el punto P . Y la recta r será como "un eje de simetría", donde las rectas s y t se reflejan, formando el mismo ángulo con r . Cogeremos un punto de $A\in s$ distinto de P , obtendremos su simétrico respecto a la recta r , y tendremos así un punto de $A'\in t$.

Con los puntos P y A' podremos escribir la recta t.

La siguiente imagen en tres dimensiones, de Geogebra, nos muestra la solución de nuestros problema.



Para obtener punto de corte igualamos las componentes paramétricas de las rectas r y s .

$$\left\{\begin{matrix} 1=1+b \\ a=-2+b \\ 1=1+b \end{matrix}\right\} \rightarrow \quad b=0, a=-2 \quad \rightarrow \quad P(1,-2,1)$$

Ahora obtenemos un punto $A\in s$, dando valores al parámetro libre de la recta.

Por ejemplo $A(3,0,3)$.

Y obtenemos el simétrico de A respecto r .

Para ello cogemos el vector director de $r \rightarrow \vec{u}_r=(0,1,0)$

Tomamos un punto arbitrario de $r \rightarrow B=(1,a,1)$

Creamos el vector $\vec{AB}=(-2,a,-2)$

Y forzamos que este vector $\vec{AB}$ sea perpendicular a $\vec{u}_r$, anulando el producto escalar de ambos.

$$\vec{AB}\cdot\vec{u}_r=0 \quad \rightarrow \quad 0+a+0=0 \quad \rightarrow \quad a=0$$

Con el valor del parámetro sacamos $B(1,0,1)$, que será el punto medio del segmento $\overline{AA'}$. Recordamos que $A(3,0,3)$ y $A'(x,y,z)$ son simétricos respecto a la recta r .

$$1=\frac{3+x}{2} \quad \rightarrow \quad x=-1$$

$$0=\frac{y+0}{2} \quad \rightarrow \quad y=0$$

$$1=\frac{3+z}{2} \quad \rightarrow \quad z=-1$$

Y la recta t pasará por el punto $P(1,-2,1)$ y por $A'(-1,0,-1)$. Su vector director será $\vec{PA'}=(-2,2,-2)$.

$$t:\left\{\begin{matrix} x=1-2\lambda \\ y=-2+2\lambda \\ z=1-2\lambda \end{matrix}\right\}$$

Distancias

■ *Distancias 1*

Sean las siguientes:

$$r:\begin{Bmatrix} x+y=1 \\ y+z=1 \end{Bmatrix} \quad , \quad s:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=z+2$$

a) Comprobar que son cruzadas.

b) Obtener la recta perpendicular a r y s , que corta a ambas rectas a la vez.

c) Obtener la distancia entre ambas rectas.

a) Para estudiar la posición relativa de ambas rectas tengo dos opciones:

- Obtener un vector director de cada recta y un vector formado por dos puntos cualesquiera de ambas rectas, y estudiar el rango de los tres vectores. Ambas rectas serán cruzadas si el rango de esa matriz es 3.
- Pasar todas las rectas a su ecuación general y plantear un sistema de cuatro ecuaciones y tres incógnitas. Ambas rectas serán cruzdas si el rango de la matriz del sistema es 3 y el rango de la matriz ampliada es 4.

Voy a seguir el primer método.

El vector $\vec{u}_r \| r$ podemos obtenerlo **pasando la ecuación general a paramétricas, o bien realizando el producto vectorial de los vectores normales a los planos que aparecen en la ecuación general**.

$$\vec{u}_r=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}=\hat{i}+0+\hat{k}-(0+0+\hat{j})=\hat{i}-\hat{j}+\hat{k}=(1,-1,1)$$

De la ecuación continua de la recta $s \rightarrow \vec{u}_s=(2,-1,1)$

Dando, por ejemplo, el valor $x=0$ en la ecuación general de la recta $r \rightarrow A(0,1,0)\in r$

De la ecuación continua de la recta $s \rightarrow B(1,0,-2)\in s$

$\vec{AB}=(1,-1,-2)$

Estudiamos el rango de la matriz formada por los vectores $(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{AB}) \rightarrow M=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$

$$|M|=2-2-1-(-1-1+4)=-3\neq 0 \rightarrow rango(M)=3$$

Los tres vectores son linealmente independientes → Rectas cruzadas

b) La recta t es perpendicular a ambas rectas del enunciado y las corta de manera perpendicular. Por lo tanto, un vector director de la recta t es igual al producto vectorial de los vectores directores de las rectas del enunciado.

$$\vec{u}_t=\vec{u}_r\times\vec{u}_s=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 1 & -1 & 1\\ 2 & -1 & 1\end{vmatrix}=-\hat{i}+2\hat{j}-\hat{k}-(-2\hat{k}-\hat{i}+\hat{j})=\hat{j}+\hat{k}=(0,1,1)$$

Recuerda que con un vector director de la recta y un punto de la recta, ya podemos trazar la recta. Por lo tanto, nos falta obtener un punto de la recta t .

Para ello vamos a obtener el plano que contiene a la recta r y que es paralelo al vector $\vec{u}_t$. Este plano cortará a la recta s en el punto de intersección de la recta s con la recta t .

El plano lo obtenemos a partir de la determinación lineal, ya que tenemos dos vectores paralelos al plano y podemos tomar un punto de la recta r como punto del plano.

$$\Pi(\vec{u}_r,\vec{u}_t,A) \rightarrow \begin{vmatrix}1 & 0 & x\\ -1 & 1 & y-1\\ 1 & 1 & z\end{vmatrix}=0 \rightarrow z+0-x-(x+y-1+0)=0 \rightarrow \Pi:-2x-y+z+1=0$$

Intersectamos este plano con la recta s . Para ellos sustituimos los valores de la ecuación en paramétricas de la recta dentro de la ecuación general del plano.

$$s:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=z+2 \rightarrow s:\begin{Bmatrix}x=1+2\lambda\\ y=-\lambda\\ z=-2+\lambda\end{Bmatrix} \rightarrow -2(1+2\lambda)+\lambda-2+\lambda+1=0 \rightarrow \lambda=\frac{-3}{2}$$

El punto $P\in s, P\in t$ será → $P\left(1+2\cdot\frac{-3}{2},\frac{3}{2},-2-\frac{3}{2}\right) \rightarrow P\left(-2,\frac{3}{2},-\frac{7}{2}\right)$

Y la recta t solución resulta → $t:\begin{Bmatrix}x=-2\\ y=\frac{3}{2}+\alpha\\ z=\frac{-7}{2}+\alpha\end{Bmatrix}$

Un poco largo, ¿verdad?

Hay **otra forma de resolverlo**... Sí, siempre hay más de una forma para resolver estos problemas de geometría.

Voy a tomar dos puntos arbitrarios de la rectas. Para ello, debo expresarla en paramétricas.

$$r:\begin{Bmatrix} x+y=1 \\ y+z=1 \end{Bmatrix} \rightarrow r:\begin{Bmatrix} x=\alpha \\ y=1-\alpha \\ z=\alpha \end{Bmatrix} \rightarrow A(\alpha, 1-\alpha, \alpha)$$

$$s:\frac{x-1}{2}=\frac{y}{-1}=z+2 \rightarrow s:\begin{Bmatrix} x=1+2\lambda \\ y=-\lambda \\ z=-2+\lambda \end{Bmatrix} \rightarrow B(1+2\lambda, -\lambda, -2+\lambda)$$

Donde uso dos letras distintas para los parámetros libres, ya que son dos rectas distintas.

Realizo el vector entre ambos puntos arbitrarios.

$$\vec{AB}=(1+2\lambda-\alpha, -\lambda-1+\alpha, -2+\lambda-\alpha)$$

Y este vector será el vector director de la recta t solución si es perpendicular a ambas rectas del enunciado. Es decir, el producto escalar de este vector con los vectores directores de las rectas debe ser nulo.

$$\vec{AB}\cdot\vec{u}_r=0 \rightarrow (1+2\lambda-\alpha, -\lambda-1+\alpha, -2+\lambda-\alpha)\cdot(1,-1,1)=0$$

$$1+2\lambda-\alpha+\lambda+1-\alpha-2+\lambda-\alpha=0 \rightarrow 4\lambda-3\alpha=0$$

$$\vec{AB}\cdot\vec{u}_s=0 \rightarrow (1+2\lambda-\alpha, -\lambda-1+\alpha, -2+\lambda-\alpha)\cdot(2,-1,1)=0$$

$$2+4\lambda-2\alpha+\lambda+1-\alpha-2+\lambda-\alpha=0 \rightarrow 6\lambda-4\alpha=-1$$

Y formamos el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{Bmatrix} 4\lambda-3\alpha=0 \\ 6\lambda-4\alpha=-1 \end{Bmatrix} \rightarrow \lambda=\frac{-3}{2} \quad , \quad \alpha=-2$$

Con estos valores → $A(-2, 3, -2)$, $B(-2, \frac{3}{2}, -\frac{7}{2}) \rightarrow \vec{AB}=(0, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$

Este vector es director de la recta t → $\vec{u}_t=\vec{AB}=(0, -\frac{3}{2}, -\frac{3}{2})$

Fíjate que este vector es proporcional a $\vec{u}_t=(0,1,1)$, que es el vector que obtuvimos por el primer método.

Y con el vector director y un punto de la recta t tenemos la recta → $t:\left\{\begin{array}{c} x=-2 \\ y=\frac{3}{2}+\alpha \\ z=\frac{-7}{2}+\alpha \end{array}\right\}$

c) Los dos métodos del apartado anterior son largos. La ventaja del segundo métod es que obtenemos los puntos intersección de la recta solución t con las dos rectas del enunciado. Por lo que la distancia entre ambas rectas será la distancia entre ambos puntos de corte.

$$A(-2,3,-2) \quad , \quad B(-2,\frac{3}{2},-\frac{7}{2}) \quad \rightarrow \quad \vec{AB}=(0,-\frac{3}{2},-\frac{3}{2})$$

$$d(r,s)=d(A,B)=|\vec{AB}|=\frac{3\sqrt{2}}{2} \quad u$$

Si no tenemos ambos puntos de corte, podemos usar la siguiente fórmula para la distancia de dos rectas cruzadas.

$$d(r,s)=\frac{|\vec{AB}\cdot(\vec{u}_r\times\vec{u}_s)|}{|\vec{u}_r\times\vec{u}_s|}$$

Donde $\vec{u}_r,\vec{u}_r$ son los vectores directores de las rectas y $\vec{AB}$ es el vector formado por dos puntos que elijamos de ambas rectas. En nuestro ejemplo:

$$\vec{u}_s=(1,-1,1)$$

$$\vec{u}_s=(2,-1,1)$$

$$A(0,1,0)\in r \quad , \quad B(1,0,-2)\in s \quad \rightarrow \quad \vec{AB}=(1,-1,-2)$$

$$d(r,s)=\frac{|\vec{AB}\cdot(\vec{u}_r\times\vec{u}_s)|}{|\vec{u}_r\times\vec{u}_s|}=\frac{|\vec{AB}\cdot(0,1,1)|}{\sqrt{0^2+1^2+1^2}}=\frac{|(1,-1,-2)\cdot(0,1,1)|}{\sqrt{2}}=\frac{|0-1-2|}{\sqrt{2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2} \quad u$$

Resultado que coincide con el obtenido anteriormente. El problema se merece un **chiste**.

“Panadero, ¿tiene pan integral?”

“No, pero si quieres te derivo a un pan de centeno”... jajajaja!!

■ *Distancias 2*

Obtener punto de la recta $r:\left\{\begin{matrix} x+y=1 \\ z=0 \end{matrix}\right\}$ **que equidiste del punto** $P(0,1,-1)$ **y del plano de ecuación general** $\Pi: x+y-z=4$ **.**

Debemos obtener un punto arbitrario de la recta e igualar su distancia al punto P y al plano Π para determinarlo de forma única.

Pasamos la recta a paramétrica para obtener punto arbitrario.

$$y=\lambda \quad \rightarrow \quad r:\left\{\begin{matrix} x=1-\lambda \\ y=\lambda \\ z=0 \end{matrix}\right\} \quad \rightarrow \quad A(1-\lambda,\lambda,0)$$

Calculamos las distancias.

$$d(A,P)=\sqrt{(\lambda-1)^2+(1-\lambda)^2+(-1)^2}=\sqrt{2\lambda^2-4\lambda+3}$$
$$d(A,\Pi)=\frac{|1\cdot(1-\lambda)+1\cdot\lambda+0-4|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}}=\frac{|-3|}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$$

Igualamos distancias

$$\sqrt{2\lambda^2-4\lambda+3}=\sqrt{3} \quad \rightarrow \quad 2\lambda^2-4\lambda+3=3 \quad \rightarrow \quad 2\lambda^2-4\lambda=0 \quad \rightarrow \quad \lambda=0,\lambda=2$$

Los puntos solución son: $A(1,0,0)$, $A(-1,2,0)$

Producto vectorial, producto mixto, áreas y volúmenes

■ *Producto vectorial y mixto, áreas y volúmenes 1*

Determina todos los vectores $\vec{u}=(a,0,b)$ que tengan módulo 8 y sean perpendiculares a la recta $r:\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases}$.

Una primera condición es que el módulo sea igual a 8 → $\sqrt{a^2+b^2}=8$

La segunda condición es que el vector sea perpendicular a la recta. Es decir, el producto escalar del vector y del vector director de la recta debe ser nulo.

¿Cómo obtener el vector director de la recta? O bien pasando la ecuación a paramétricas o bien haciendo el producto vectorial de los vectores característicos que forman la recta en su ecuación general.

$$r:\begin{cases} x+y+z=0 \\ x-y+z-2=0 \end{cases} \rightarrow \vec{u_{\Pi_1}}=(1,1,1) \quad , \quad \vec{u_{\Pi_2}}=(1,-1,1)$$

$$\vec{u_r}=|\vec{u_{\Pi_1}}\times\vec{u_{\Pi_2}}|=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\hat{i}+\hat{j}-\hat{k}-(\hat{k}+\hat{j}-\hat{i})=2\hat{i}-2\hat{k} \rightarrow \vec{u_r}=(2,0,-2)$$

Anulamos el producto escalar de $\vec{u}=(a,0,b)$ y de $\vec{u}_r=(2,0,-2)$.

$$\vec{u}\cdot\vec{u}_r=0 \rightarrow (a,0,b)\cdot(2,0,-2)=0 \rightarrow 2a-2b=0 \rightarrow a=b$$

Por lo tanto, si $\sqrt{a^2+b^2}=8 \rightarrow \sqrt{2a^2}=8 \rightarrow 2a^2=64 \rightarrow a=\pm\sqrt{32}$

Los vectores solución son:

$$\vec{u}=(\sqrt{32},0,\sqrt{32}) \quad , \quad \vec{u}=(-\sqrt{32},0,-\sqrt{32})$$