Preparando Selectividad

Solución Selectividad - Modelo 08

Modelo 08. Opción A. Ejercicio 1

Estudia y representa gráficamente $f(x)=\frac{x}{\ln(x)}$

El dominio de la función resulta: $Dom(f)=(0,+\infty)-1$

La función no presenta simetrías.

No existe puntos de corte con los ejes:

$$\begin{array}{l} Corte\ eje\ OX \ \rightarrow\ f(x)=0\ \rightarrow\ x=0\notin Dom(f) \\ Corte\ eje\ OY\ \rightarrow\ x=0\notin Dom(f) \end{array}$$

Estudiamos las asintotas.

Asíntota Vertical → $\lim_{x\to 1-}\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)=-\infty$, $\lim_{x\to 1+}\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)=+\infty$

Asíntota Horizontal → $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x}{\ln(x)}\right)=\infty$ → No existen asíntotas horizontales (en el infinito, al comparar el polinomio del numerado con el logaritmo del denominador, la función va a infinito.)

Asíntota Oblicua → $\lim_{x\to\infty}\left(\frac{\frac{x}{\ln(x)}}{x}\right)=0\ \rightarrow\ m=0$ → no existen asíntotas oblicuas

Estudiamos el crecimiento y los extremos relativos a través de la primera derivada.

$$f(x)=\frac{x}{\ln(x)}\ \rightarrow\ f'(x)=\frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)}$$

$f'(x)=0\ \rightarrow\ \ln(x)-1=0\ \rightarrow\ x=e\ ,\ f(e)=e\ \rightarrow\ (e,e)$ punto crítico

Estudiamos el crecimiento de la función en los siguientes intervalos.

Función $f(x)$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\downarrow$	$f(x)\uparrow$
Intervalos	$(0,1)$	$(1,e)$	$(e,+\infty)$
Derivada $f'(x)$	$f'(\frac{1}{2})<0$	$f'(2)<0$	$f'(10)>0$

Por lo tanto, en el punto (e,e) existe punto crítico por pasar la función de decreciente a creciente a ambos lados.

Para estudiar la concavidad obtenemos la segunda derivada.

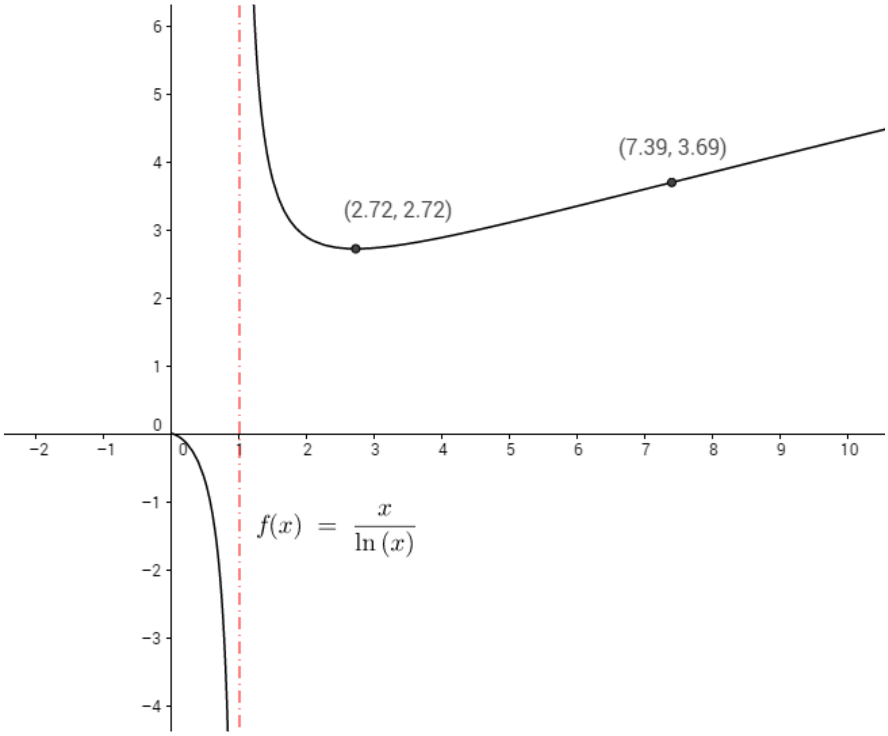
$$f'(x)=\frac{\ln(x)-1}{\ln^2(x)} \quad \rightarrow \quad f''(x)=\frac{2-\ln(x)}{x\cdot\ln^3(x)}$$

$f''(x)=0 \quad \rightarrow \quad 2-\ln(x)=0 \quad \rightarrow \quad x=e^2 \quad , \quad f(e^2)=\frac{e^2}{2} \quad \rightarrow \quad (e^2,\frac{e^2}{2})$ candidato a punto de inflexión

Función $f(x)$	$f(x)\cap$	$f(x)\cup$	$f(x)\cap$
Intervalos	$(0,1)$	$(1,e^2)$	$(e^2,+\infty)$
Segunda Derivada $f''(x)$	$f''(\frac{1}{2})<0$	$f''(2)>0$	$f''(10)<0$

Se confirma que $(e^2,\frac{e^2}{2})$ es un punto de inflexión, por cambiar la curvatura a ambos lados de cóncava hacia arriba a cóncava hacia abajo.

$f(x)=\dfrac{x}{\ln(x)}$, *mínimo relativo en* (e, e), *punto de inflexión en* $(e^2, e^2/2)$



Modelo 08. Opción A. Ejercicio 2

Calcula $\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}dx$ **.**

Tenemos un cociente de polinomios con igual grado en numerador y denominador.

Podemos dividir el polinomio numerador entre el polinomio denominador, para obtener un nuevo polinomio más un cociente de polinomios donde el grado del numerador sea menor que el grado del denominador (y así poder aplicar, por ejemplo, el método de integración de los coeficientes indeterminados).

O bien podemos llegar al mismo resultado razonando de la siguiente forma:

$$I=\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}dx=-\int \frac{x^2}{x^2+x-2}dx=-\int \frac{x^2+(x-2)-(x-2)}{x^2+x-2}dx=-\int \frac{x^2+x-2}{x^2+x-2}dx+\int \frac{x-2}{x^2+x-2}dx$$

$$I=-\int dx+\int \frac{x-2}{x^2+x-2}dx=-x+\int \frac{x-2}{(x-1)(x+2)}dx$$

Aplicamos en la integral que nos queda el método de los coeficientes indeterminados.

$$\frac{x-2}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2} \quad \rightarrow \quad x-2=A(x+2)+B(x-1)$$

Damos valores para obtener los coeficientes.

$$x=1 \quad \rightarrow \quad -1=3A+0 \quad \rightarrow \quad A=\frac{-1}{3}$$

$$x=-2 \quad \rightarrow \quad -4=0-3B \quad \rightarrow \quad B=\frac{4}{3}$$

Sustituimos.

$$I=-x-\frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx+\frac{4}{3}\int \frac{1}{x+2}dx \quad \rightarrow \quad I=-x-\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{4}{3}\ln|x+2|+C$$

Modelo 08. Opción A. Ejercicio 3

Dado el sistema de ecuaciones $f(x)=\left\{\begin{matrix} kx+2y=3 \\ -x+2kz=-1 \\ 3x-y-7z=k+1 \end{matrix}\right\}$

a) Estudiar las posibles soluciones según el valor de k **.**

b) Resolver para $k=1$ **.**

a) Tenemos la siguiente matriz del sistema y su matriz ampliada asociada.

$$A=\begin{pmatrix} k & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 2k \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix} \quad , \quad A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} k & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2k & -1 \\ 3 & -1 & -7 & k+1 \end{array}\right)$$

El sistema tendrá solución siempre y cuando el rango de ambas matrices coincida, según el teorema de Roché-Frobenius.

Para estudiar el rango de la matriz A vemos para que valores de k se anula su determinante.

$$|A|=2k^2+12k-14 \quad , \quad |A|=0 \quad \rightarrow \quad k^2+6k-7=0 \quad \rightarrow \quad k=1,-7$$

Discusión de casos:

Si $k\neq 1,-7 \Rightarrow |A|\neq 0 \Rightarrow rango(A)=3=rango(A/C)=número\ de\ incógnitas$ → Estamos ante un sistema compatible determinado → Solución única.

Si $k=-7\Rightarrow|A|=0\Rightarrow rango(A)\neq 3$ → Estudiemos el rango de A y de A/C .

$A=\begin{pmatrix} -7 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -14 \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix}$ → $rango(A)=2$ por existir al menos un menor de orden dos no nulo; por ejemplo $\begin{vmatrix} -7 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=2\neq 0$. Estudiamos rango de la matriz ampliada $A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} -7 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & -14 & -1 \\ 3 & -1 & -7 & -6 \end{array}\right)$ comprobando si existe al menos un menor de orden tres no nulo. En efecto, $|C_1 C_2 C_4| = 13 \neq 0 \Rightarrow rango(A/C) = 3 \neq 2 = rango(A)$ → Sistema incompatible → No hay solución.

Si $k=1 \Rightarrow |A| = 0 \Rightarrow rango(A) \neq 3$ → Estudiemos el rango de A y de A/C .

$A = \begin{pmatrix} -7 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -14 \\ 3 & -1 & -7 \end{pmatrix}$ → $rango(A) = 2$ por existir al menos un menor de orden dos no nulo; por ejemplo $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} = 2 \neq 0$. Estudiamos rango de la matriz ampliada $A/C = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & -7 & 2 \end{array}\right)$ comprobando si existe al menos un menor de orden tres no nulo. Todos los menores de orden tres se anulan: $|C_1 C_2 C_4| = 0$, $|C_1 C_3 C_4| = 0$, $|C_2 C_3 C_4| = 0$ → $rango(A) = 2 = rango(A/C) < 3 = número\ de\ incógnitas$ → Sistema compatible indeterminado con un parámetro libre → Infinitas soluciones.

b) Para $k=1$ hemos justificado en el apartado anterior que estamos ante un sistema compatible indeterminado con un parámetro libre → Infinitas soluciones. Por ejemplo, si consideramos $z=\lambda$ como parámetro libre:

$f(x) = \begin{Bmatrix} x+2y=3 \\ -x+2z=-1 \\ 3x-y-7z=2 \end{Bmatrix}$ → $f(x) = \begin{Bmatrix} x+2y=3 \\ -x=-1-2\lambda \\ 3x-y=2+7\lambda \end{Bmatrix}$ → De la segunda ecuación obtenemos $x=1+2\lambda$. Y llevando este resultado a la primera ecuación $y=1-\lambda$.

La solución de nuestro sistema, dependiente de un parámetro, resulta $\begin{Bmatrix} x=1+2\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=\lambda \end{Bmatrix}$.

Modelo 08. Opción A. Ejercicio 4

Sean los puntos $A(0,1,1)$, $B(2,1,3)$, $C(-1,2,0)$ y $D(2,1,m)$

a) Calcula m par $A,B,C\ \ y\ \ D$ estén en un mismo plano.

b) Determina la ecuación del plano respecto los puntos A y B son simétricos.

c) Calcula el área del triángulo de vértices $A,B\ \ y\ \ C$.

a) Los cuatro puntos son coplanarios si los tres vectores que podemos formar tomando uno de los puntos como origen común (por ejemplo el punto A), pertenecen a un mismo plano. Es decir, los tres vectores debe ser linealmente dependientes (por ser coplanarios). Por lo tanto, el rango de la matriz cuadrada 3×3 que forman los tres vectores no puede ser tres: el determinante de esa matriz debe ser nulo.

$$\vec{AB}=(2,0,2)\ \ ,\ \ \vec{AC}=(-1,1,-1)\ \ ,\ \ \vec{AD}=(2,0,m-1)$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & m-1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & m-1 \end{vmatrix}=0 \rightarrow 2m-6=0 \rightarrow m=3$$

Los cuatro puntos pertenecen al mismo plano siempre que $m=3$.

b) Buscamos un plano de ecuación general $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$ que cumpla que la recta r que une los puntos $A(0,1,1)$ y $B(2,1,3)$, corte al plano de manera perpendicular justo en el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

Con el vector director $\vec{u_r}$ de la recta tendremos el vector normal al plano $\vec{u_\Pi}=(A,B,C)$. Y con el punto medio del segmento $\overline{AB}$ tendremos las coordenadas de un punto del plano, por lo que podremos obtener el término independiente de la ecuación general $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$.

$$\vec{AB}=\vec{u_r}=(2,0,2) \rightarrow \vec{u_\Pi}=(2,0,2)\perp\Pi$$

$$P=\ \ punto\ \ medio\ \ \overline{AB}\ \ =\left(\frac{0+2}{2},\frac{1+1}{2},\frac{1+3}{2}\right)=(1,1,2)$$

$$\Pi: 2x+2z+D=0\ \ ,\ \ P(1,1,2)\in\Pi \rightarrow 2+4+D=0 \rightarrow D=-6$$

$\Pi: 2x+2z-6=0$ → Podemos simplificar a → $\Pi: x+z-3=0$

c) Nuestro triángulo tiene por vértices $A(0,1,1)$, $B(2,1,3)$, $C(-1,2,0)$. Si recordamos una de las aplicaciones del producto vectorial, el área del triángulo de vértices conocidos cumple la siguiente relación:

$$A_{Triángulo}=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|$$

El módulo del producto vectorial podemos obtenerlo de la siguiente relación.

$$|\vec{AB}\times\vec{AC}|=|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|\cdot sen(\alpha)$$

Siendo α el ángulo formado por ambos vectores.

O bien podemos directamente el vector resultante del producto vectorial, y luego aplicar su módulo. Vamos a tomar esta segunda opción.

$$\vec{AB}=(2,0,2) \quad , \quad \vec{AC}=(-1,1,-1)$$

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix}\hat{i} & \hat{j} & \hat{k}\\ 2 & 0 & 2\\ -1 & 1 & -1\end{vmatrix}=0-2\hat{j}+2k-(0+\hat{2}\hat{i}-2\hat{j})=-2\hat{i}+2\hat{k}$$

$$|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

Siendo el área del triángulo finalmente:

$$A_{Triángulo}=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\quad u^2$$

Modelo 08. Opción B. Ejercicio 1

Sabiendo que $\lim_{x\to 0} \frac{a x^2+b x+1-\cos(x)}{sen(x^2)}$ **es finito e igual a uno, calcula los valores de** a **y** b **.**

$\lim_{x\to 0} \frac{a x^2+b x+1-\cos(x)}{sen(x^2)}=\frac{0}{0}$ → Indeterminación → L'Hôpital → Derivamos numerador y denominador por separado.

$\lim_{x\to 0} \frac{a x^2+b x+1-\cos(x)}{sen(x^2)}=\lim_{x\to 0} \frac{2 a x+b+sen(x)}{2 x \cos(x^2)}=\frac{b}{0}$ → Para que el límite sea finito, necesitamos que el numerador también tienda a 0 → $b=0$.

$\lim_{x\to 0} \frac{2 a x+sen(x)}{2 x \cos(x^2)}=\frac{0}{0}$ → Indeterminación → L'Hôpital → Derivamos numerador y denominador por separado.

$\lim_{x\to 0} \frac{2 a x+sen(x)}{2 x \cos(x^2)}=\lim_{x\to 0} \frac{2 a+\cos(x)}{2[\cos(x^2)+x\cdot(-2\cdot x\cdot sen(x^2))]}=\frac{2 a+1}{2[1+0]}=\frac{2 a+1}{2}$ → Según el enunciado el límite debe converger a 1 → $\frac{2 a+1}{2}=1$ → $2 a+1=2$ → $a=\frac{1}{2}$.

Modelo 08. Opción B. Ejercicio 2

Calcula una función primitiva de $f'(x)=x\cdot\ln(x^2+1)$ **que pase por el punto** $(0,1)$ **.**

Nos dan la derivada de la función: $f'(x)=x\cdot\ln(x^2+1)$.

Para obtener la función $f(x)$ deberemos integrar. El valor de la constante lo obtendremos aplicando la condición que nos da el enunciado.

$$f'(x)=x\cdot\ln(x^2+1) \rightarrow f(x)=\int x\cdot\ln(x^2+1)\,dx$$

Aplicamos integración por partes.

$$u=\ln(x^2+1) \rightarrow du=\frac{2x}{x^2+1}dx$$

$$dv=x\,dx \rightarrow v=\frac{x^2}{2}$$

$$f(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x^2+1)-\int\frac{x^2}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}dx=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x^2+1)-\int\frac{x^3}{x^2+1}dx+C$$

Obtenemos una integral como cociente de dos polinomios, con grado del numerador mayor que el grado del denominador. Ejecutamos la división.

$$\frac{x^3}{x^2+1}=x-\frac{x}{x^2+1}$$

$$f(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x^2+1)-\int x\,dx+\int\frac{x}{x^2+1}dx+C$$

$$f(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x^2+1)-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\int\frac{2x}{x^2+1}dx+C$$

$$f(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x^2+1)-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+C$$

Según el enunciado la función pasa por el punto $(0,1)$.

$$f(0)=1 \rightarrow f(0)=C \rightarrow C=1$$

Finalmente la función buscada resulta:

$$f(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x^2+1)-\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\ln(x^2+1)+1=\frac{1}{2}((x^2+1)\ln(x^2+1)-x^2)+1$$

Modelo 08. Opción B. Ejercicio 3

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} m+2 & 0 & 0 \\ -3 & m+1 & 1 \\ 1 & 0 & m-1 \end{pmatrix}$ **.**

a) Obtener $|A^{10}|$ **.**

b) Para $m=0$ **calcular, si es posible, la matriz inversa de** A **.**

a) $|A^{10}|=|A\cdot A\cdot A\cdot ...\cdot A|=|A|\cdot|A|\cdot|A|\cdot ...\cdot|A|=10\cdot|A|$

$|A|=(m+2)(m^2-1) \quad \rightarrow \quad |A^{10}|=10\cdot(m+2)(m^2-1)$

b) Si $m=0 \quad \rightarrow \quad |A|=(0+2)(0-1)=-2\neq 0$ → Existe la matriz inversa.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{[adj(A)]^t}{|A|}$$

Obtenemos los nueve adjuntos.

$A_{11}=-1$, $A_{12}=-2$, $A_{11}=-1$

$A_{21}=0$, $A_{22}=-2$, $A_{23}=0$

$A_{31}=0$, $A_{32}=-2$, $A_{33}=2$

$$[adj(A)]^t=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & -2 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Efectivamente, esta es la matriz inversa, ya que satisface: $A\cdot A^{-1}=A^{-1}\cdot A=I$

Modelo 08. Opción B. Ejercicio 4

Sea el plano $\Pi: 2x+y-z+8=0$ **.**

a) Calcula el punto P' **, simétrico del punto** $P(2,-1,5)$ **respecto del plano** Π **.**

b) Calcula la recta r' **, simétrico de la recta** $r: \frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{1}$ **respecto del plano** Π **.**

a) La recta s que une los puntos simétricos P y P' es perpendicular al plano $\Pi: 2x+y-z+8=0$, y lo corta en el punto medio del segmento $\overline{PP'}$.

Si $\Pi: 2x+y-z+8=0 \rightarrow \vec{u_\Pi}=(2,1,-1)\perp\Pi \rightarrow \vec{u_\Pi}=\vec{u_s}$, siendo $\vec{u_s}$ el vector director de la recta que une ambos puntos simétricos. Y con vector director y un punto, tenemos la ecuación de la recta:

$$s: \left\{ \begin{array}{c} x=2+2t \\ y=-1+t \\ z=5-t \end{array} \right\}$$

Si llevamos estas ecuaciones paramétricas a la ecuación general del plano,obtenemos el punto de corte de ambos.

$$2(2+2t)+(-1+t)-(5-t)+8=0 \rightarrow t=-1 \rightarrow M=(0,-2,6)\equiv punto \quad medio \quad \overline{PP'}$$

Si $P(2,-1,5)$ y $P'(x,y,z) \rightarrow (0,-2,6)=(\frac{x+2}{2},\frac{-1+y}{2},\frac{5+z}{2}) \rightarrow$ Igualamos cada componente: $x=-2$, $y=-3$, $z=7$.

El punto simétrico buscado es $P'(-2,-3,7)$.

b) Debemos estudiar la posición relativa de la recta r sobre el plano, ya que la recta simétrica r' dependerá de si r es paralela, secante o coincidente con el plano.

Si pasamos la recta a paramétricas, podremos sustituir directamente en la ecuación general del plano y decidir sobre el resultado que obtengamos.

$$r:\frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{1} \quad\rightarrow\quad r:\begin{Bmatrix} x=2-2t \\ y=-1+3t \\ z=5+t \end{Bmatrix} \quad\rightarrow\quad 2(2-2t)+(-1+3t)-(5+t)+8=0 \quad\rightarrow\quad t=3$$

Obtenemos un punto solución, que será el punto de corte de la recta r con el plano. Este punto de corte es $Q(-4,8,8)\in r'$. La recta simétrica r' también corta al plano en ese punto.

Viendo las ecuaciones paramétricas de la recta, es directo que el punto $P(2,-1,5)$ pertenece a r . Y en el apartado anterior obtuvimos el simétrico de este punto respecto al plano: $P'(-2,-3,7)\in r'$. Este punto $P'(-2,-3,7)$ pertenece a la recta simétrica buscada r' .

Contamos con dos puntos de la recta simétrica r' , por lo que podemos sacar un vector director:

$$\vec{P'Q}=\vec{u_{r'}}=(-2,11,1)$$

Y con un punto y un vector director, tenemos la ecuación de la recta simétrica r' .

$$r':\begin{Bmatrix} x=-2-2t \\ y=-3+11t \\ z=7+t \end{Bmatrix}$$