Preparando Selectividad

Solución Selectividad - Modelo 07

Modelo 07. Opción A. Ejercicio 1

Se quiere construir un depósito abierto de base cuadrada y paredes verticales con capacidad para 13,5 metros cúbicos. Para ello se dispone de una chapa de acero de grosor uniforme. Calcula las dimensiones del depósito para que el gasto en chapa sea al mínimo posible.

La función que debemos optimizar es la cantidad de chapa utilizada, que será suma de la chapa empleada para la base cuadrada más la chapa empleada en las cuatro paredes verticales. En cada caso, la cantidad de chapa será igual al volumen de chapa necesaria para construir cada parte.

Si la base es cuadrada supondremos x el valor del lado. Las paredes serán rectangulares, de base x y de altura y .

El grosor de la chapa, que es uniforme (es decir, constante), lo llamaremos d .

$$Volumen \ \ chapa \ \ base \ = x \cdot x \cdot d = x^2 \cdot d$$

$$Volumen \ \ chapa \ \ paredes \ = 4 \cdot x \cdot y \cdot d$$

$$Volumen \ \ total \ \ chapa \ = x^2 \cdot d + 4 \cdot x \cdot y \cdot d = d\,(x^2 + 4 \cdot x \cdot y) \ \rightarrow \ V = d\,(x^2 + 4 \cdot x \cdot y)$$

Donde recordamos que el grosor d es un valor constante. En la práctica, al ser el grosor uniforme, lo que buscamos optimizar es la superficie total de chapa empleada.

La función V obtenida depende de dos variables: x, y . Con el dato del volumen del enunciado podemos relacionar ambas variables.

$$13{,}5 \ \ m^3 = x \cdot x \cdot y \ \rightarrow \ 13{,}5 = x^2 \cdot y \ \rightarrow \ y = \frac{13{,}5}{x^2}$$

Llevamos este valor a la función $V \ \rightarrow \ V = d\,(x^2 + 4 \cdot x \cdot y) = d\,(x^2 + 4 \cdot x \cdot \frac{13{,}5}{x^2}) = d\,(x^2 + \frac{54}{x})$

El dominio de esta función es $Dom(V)=\mathbb{R}-\{0\}$. Solo tienen sentido físico distancias positivas, por lo que exigiremos valores positivos de la variable x .

El gasto mínimo de chapa se produce para aquel valor de la variable que minimiza la función $V(x)$. Por lo tanto, deberemos derivarla, igualarla a cero para obtener los puntos críticos, y demostrar que punto crítico es un mínimo relativo.

$V=d(x^2+\frac{54}{x})$ $\rightarrow$ d es una constante $\rightarrow$ $V'=d(2x-\frac{54}{x^2})$ $\rightarrow$ $V'=d(\frac{2x^3-54}{x^2})$

$$V'=0 \rightarrow d(\frac{2x^3-54}{x^2})=0 \rightarrow \frac{2x^3-54}{x^2}=0 \rightarrow 2x^3-54=0 \rightarrow x^3=27 \rightarrow x=3$$

Vamos a determinar si el punto crítico $x=3$ es un mínimo relativo. Para ello evaluamos el signo de la primera derivada en los siguientes intervalos.

$(0,3) \rightarrow V'(1)<0 \rightarrow V(x)$ decreciente
$(3,+\infty) \rightarrow V'(10)>0 \rightarrow V(x)$ creciente

Por lo tanto, en $x=3$ encontramos un mínimo relativo.

Si $x=3 \rightarrow y=\frac{13,5}{x^2}=\frac{13,5}{9}=\frac{3}{2}$

Las dimensiones solicitadas son: una base cuadrado de lado $x=3\ m$ y paredes verticales de base $x=3\ m$ y altura $y=\frac{3}{2}\ m$.

El volumen de chapa mínimo es igual a $V(3)=d(x^2+\frac{54}{x})=27\cdot d\ m^3$, que lógicamente resulta en función del grosor desconocido d .

Modelo 07. Opción A. Ejercicio 2

Calcula $\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}dx$ **.**

Tenemos un cociente de polinomios con igual grado en numerador y denominador.

Podemos dividir el polinomio numerador entre el polinomio denominador, para obtener un nuevo polinomio más un cociente de polinomios donde el grado del numerador sea menor que el grado del denominador (y así poder aplicar, por ejemplo, el método de integración de los coeficientes indeterminados).

O bien podemos llegar al mismo resultado razonando de la siguiente forma:

$$I=\int \frac{-x^2}{x^2+x-2}dx=-\int \frac{x^2}{x^2+x-2}dx=-\int \frac{x^2+(x-2)-(x-2)}{x^2+x-2}dx=-\int \frac{x^2+x-2}{x^2+x-2}dx+\int \frac{x-2}{x^2+x-2}dx$$

$$I=-\int dx+\int \frac{x-2}{x^2+x-2}dx=-x+\int \frac{x-2}{(x-1)(x+2)}dx$$

Aplicamos en la integral que nos queda el método de los coeficientes indeterminados.

$$\frac{x-2}{(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x-1}+\frac{B}{x+2} \quad \rightarrow \quad x-2=A(x+2)+B(x-1)$$

Damos valores para obtener los coeficientes.

$$x=1 \quad \rightarrow \quad -1=3A+0 \quad \rightarrow \quad A=\frac{-1}{3}$$

$$x=-2 \quad \rightarrow \quad -4=0-3B \quad \rightarrow \quad B=\frac{4}{3}$$

Sustituimos.

$$I=-x-\frac{1}{3}\int \frac{1}{x-1}dx+\frac{4}{3}\int \frac{1}{x+2}dx \quad \rightarrow \quad I=-x-\frac{1}{3}\ln|x-1|+\frac{4}{3}\ln|x+2|+C$$

Modelo 07. Opción A. Ejercicio 3

Considera el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{matrix} \lambda x+y-z=-1 \\ \lambda x+\lambda z=\lambda \\ x+y-\lambda z=0 \end{matrix}\right\}$

a) Discute el sistema según los valores de λ **.**

b) Resuelve el sistema para $\lambda=0$ **.**

a) La matriz del sistema y la matriz ampliada son:

$$A=\begin{pmatrix} \lambda & 1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda \\ 1 & -1 & \lambda \end{pmatrix} \quad , \quad A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & -1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & -1 & \lambda & 0 \end{array}\right)$$

Por el Teorema de Roché-Frobenius, el sistema tendrá solución si el rango de ambas matrices coincide. En caso contrario, será incompatible.

Si ambos rangos coinciden y son iguales al número de incógnitas del sistema (tres en nuestro caso), la solución será única y estaremos ante un sistema compatible determinado.

Si ambos rangos coinciden y su valor es menor que le número de incógnitas, estaremos ante infinitas soluciones y el sistema será compatible indeterminado (con tantos parámetros libres como la diferencia entre el número de incógnitas y el rango).

Para estudiar el rango de la matriz A , calculamos su determinante.

$$|A|=0+\lambda-\lambda-(0+\lambda^2-\lambda^2)=0$$

El determinante de A se anula independientemente del valor del parámetro λ . Por lo tanto, el rango de A nunca será 3 . Como máximo, podrá ser 2 .

El rango de A será 2 si existe al menos un menor de orden 2 no nulo. Si estudiamos todos los menores de orden dos posibles:

$$|\alpha_{11}|=-\lambda \quad , \quad |\alpha_{12}|=-\lambda^2-\lambda=-\lambda(\lambda+1) \quad , \quad |\alpha_{13}|=\lambda$$

$$|\alpha_{21}|=-\lambda+1 \quad , \quad |\alpha_{22}|=-\lambda^2+1=(1+\lambda)(1-\lambda) \quad , \quad |\alpha_{23}|=\lambda-1$$

$$|\alpha_{31}|=\lambda \quad , \quad |\alpha_{32}|=\lambda^2+\lambda=\lambda(\lambda+1) \quad , \quad |\alpha_{33}|=-\lambda$$

Viendo estos nueve menores de orden dos, no hay ningún valor único del parámetro λ que anule a todos. Por lo tanto, el rango de A será 2 independientemente del valor del parámetro λ .

Ahora estudiamos el rango de la matriz ampliada A/C . Como máximo su rango será 3 , ya que es un matriz rectangular de tres filas y cuatro columnas.

En primer lugar comprobamos si A/C contiene alguna submatriz cuadrada de orden tres con determinante no nulo.

$$A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} \lambda & 1 & -1 & -1 \\ \lambda & 0 & \lambda & \lambda \\ 1 & -1 & \lambda & 0 \end{array}\right)$$

$$|C_1 C_2 C_4|=\lambda(2+\lambda) \quad , \quad |C_1 C_2 C_4|=0 \rightarrow \lambda=0 \quad , \quad \lambda=-2$$

$$|C_1 C_3 C_4|=\lambda^2(1-\lambda) \quad , \quad |C_1 C_3 C_4|=0 \rightarrow \lambda=0 \quad , \quad \lambda=1$$

$$|C_2 C_3 C_4|=\lambda^2 \quad , \quad |C_2 C_3 C_4|=0 \rightarrow \lambda=0$$

Si $\lambda\neq 0$ y $\lambda\neq 1$ y $\lambda\neq -2$ → $rango(A/C)=3\neq 2=rango(A)$ → Sistema incompatible → No existe solucion.

Si $\lambda=-2$ → $|C_2 C_3 C_4|=\lambda^2=4\neq 0$ → $rango(A/C)=3\neq 2=rango(A)$ → Sistema incompatible → No existe solucion.

Si $\lambda=1$ → $|C_2 C_3 C_4|=\lambda^2=1\neq 0$ → $rango(A/C)=3\neq 2=rango(A)$ → Sistema incompatible → No existe solucion.

Si $\lambda=0$ → $rango(A/C)\neq 3$ por anularse el determinante de todas las submatrices de orden tres → $A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ → Encontramos al menos un menor de orden dos no nulo → $\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}=-1\neq 0$ → $rango(A/C)=2=rango(A)<3=número\ de\ incógnitas$ → Sistema compatible indeterminado → Infinitas soluciones con $3-2=1$ parámetro libre.

b) Debemos resolver el sistema para $\lambda=0$, donde ya sabemos (por el apartado anterior), que estamos ante un sistema compatible indeterminado (infinitas soluciones) con un parámetro libre.

$A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ → Podemos obviar la segunda fila por tener todos los términos nulos → $A/C=\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \end{array}\right)$ → Tomamos como parámetro libre $y=\alpha$

De la primera ecuación del nuevo sistema → $z=1+\alpha$

De la segunda ecuación del nuevo sistema → $x=\alpha$

La solución final, en función de un parámetro, resulta:

$$\left\{\begin{array}{c} x=\alpha \\ y=\alpha \\ z=1+\alpha \end{array}\right\}$$

Modelo 07. Opción A. Ejercicio 4

Sean los puntos $A(0,1,1)$ **,** $B(2,1,3)$ **,** $C(-1,2,0)$ **y** $D(2,1,m)$

a) Calcula m **par** $A,B,C\ y\ D$ **estén en un mismo plano.**

b) Determina la ecuación del plano respecto los puntos A **y** B **son simétricos.**

c) Calcula el área del triángulo de vértices $A,B\ y\ C$ **.**

a) Los cuatro puntos son coplanarios si los tres vectores que podemos formar tomando uno de los puntos como origen común (por ejemplo el punto A), pertenecen a un mismo plano. Es decir, los tres vectores debe ser linealmente dependientes (por ser coplanarios). Por lo tanto, el rango de la matriz cuadrada 3×3 que forman los tres vectores no puede ser tres: el determinante de esa matriz debe ser nulo.

$$\vec{AB}=(2,0,2)\ ,\ \vec{AC}=(-1,1,-1)\ ,\ \vec{AD}=(2,0,m-1)$$

$$\begin{pmatrix}2 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & m-1\end{pmatrix} \rightarrow \begin{vmatrix}2 & -1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ 2 & -1 & m-1\end{vmatrix}=0 \rightarrow 2m-6=0 \rightarrow m=3$$

Los cuatro puntos pertenecen al mismo plano siempre que $m=3$.

b) Buscamos un plano de ecuación general $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$ que cumpla que la recta r que une los puntos $A(0,1,1)$ y $B(2,1,3)$, corte al plano de manera perpendicular justo en el punto medio del segmento $\overline{AB}$.

Con el vector director $\vec{u_r}$ de la recta tendremos el vector normal al plano $\vec{u_\Pi}=(A,B,C)$. Y con el punto medio del segmento $\overline{AB}$ tendremos las coordenadas de un punto del plano, por lo que podremos obtener el término independiente de la ecuación general $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$.

$$\vec{AB}=\vec{u_r}=(2,0,2) \rightarrow \vec{u_\Pi}=(2,0,2)\perp\Pi$$

$$P=\ punto\ \ medio\ \ \overline{AB}\ =(\frac{0+2}{2},\frac{1+1}{2},\frac{1+3}{2})=(1,1,2)$$

$$\Pi: 2x+2z+D=0\ ,\ P(1,1,2)\in\Pi \rightarrow 2+4+D=0 \rightarrow D=-6$$

$\Pi: 2x+2z-6=0$ $\rightarrow$ Podemos simplificar a $\rightarrow$ $\Pi: x+z-3=0$

c) Nuestro triángulo tiene por vértices $A(0,1,1)$, $B(2,1,3)$, $C(-1,2,0)$. Si recordamos una de las aplicaciones del producto vectorial, el área del triángulo de vértices conocidos cumple la siguiente relación:

$$A_{Triángulo}=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|$$

El módulo del producto vectorial podemos obtenerlo de la siguiente relación.

$$|\vec{AB}\times\vec{AC}|=|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|\cdot sen(\alpha)$$

Siendo α el ángulo formado por ambos vectores.

O bien podemos directamente el vector resultante del producto vectorial, y luego aplicar su módulo. Vamos a tomar esta segunda opción.

$$\vec{AB}=(2,0,2) \quad , \quad \vec{AC}=(-1,1,-1)$$

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=0-2\hat{j}+2k-(0+\hat{2}\hat{i}-2\hat{j})=-2\hat{i}+2\hat{k}$$

$$|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\sqrt{2^2+2^2}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$

Siendo el área del triángulo finalmente:

$$A_{Triángulo}=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\frac{2\sqrt{2}}{2}=\sqrt{2}\quad u^2$$

Modelo 07. Opción B. Ejercicio 1

Sabiendo que $\lim_{x\to 0}\frac{a\,x^2+b\,x+1-\cos(x)}{sen(x^2)}$ **es finito e igual a uno, calcula los valores de** a **y** b **.**

$\lim_{x\to 0}\frac{a\,x^2+b\,x+1-\cos(x)}{sen(x^2)}=\frac{0}{0}$ → Indeterminación → L'Hôpital → Derivamos numerador y denominador por separado.

$\lim_{x\to 0}\frac{a\,x^2+b\,x+1-\cos(x)}{sen(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\,a\,x+b+sen(x)}{2\,x\cos(x^2)}=\frac{b}{0}$ → Para que el límite sea finito, necesitamos que el numerador también tienda a 0 → $b=0$.

$\lim_{x\to 0}\frac{2\,a\,x+sen(x)}{2\,x\cos(x^2)}=\frac{0}{0}$ → Indeterminación → L'Hôpital → Derivamos numerador y denominador por separado.

$\lim_{x\to 0}\frac{2\,a\,x+sen(x)}{2\,x\cos(x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{2\,a+\cos(x)}{2[\cos(x^2)+x\cdot(-2\cdot x\cdot sen(x^2))]}=\frac{2\,a+1}{2[1+0]}=\frac{2\,a+1}{2}$ → Según el enunciado el límite debe converger a 1 → $\frac{2\,a+1}{2}=1$ → $2\,a+1=2$ → $a=\frac{1}{2}$.

Modelo 07. Opción B. Ejercicio 2

Determina la función $f:(0,\infty)\rightarrow \mathbb{R}$ sabiendo que $f''(x)=\ln(x)$ y que su gráfica tiene tangente horizontal en el punto $P(1,2)$ ($\ln$ denota la función logaritmo neperiano).

Nos dan la segunda derivada de la función: $f''(x)=\ln(x)$.

Para obtener la función $f(x)$ deberemos integrar dos veces. En cada integración obtendremos una constante de integración. El valor de cada constante lo obtendremos aplicando las dos condiciones que nos da el enunciado.

$$f''(x)=\ln(x) \quad \rightarrow \quad f'(x)=\int \ln(x)\,dx$$

Aplicamos partes:

$$u=\ln(x) \quad \rightarrow \quad du=\frac{1}{x}dx$$

$$dv=dx \quad \rightarrow \quad v=x$$

$$f'(x)=x\cdot\ln(x)-\int dx=x\cdot\ln(x)-x+C$$

La constante de integración C la obtenemos del dato de que la función posee tangente horizontal en $P(1,2)$. Es decir, en $x=1$ la derivada de la función es nula (por ser 0 la pendiente de la recta tangente).

$$f'(1)=0 \quad \rightarrow \quad 1\cdot\ln(1)-1+C=0 \quad \rightarrow \quad C=0 \quad \rightarrow \quad f'(x)=x\cdot\ln(x)-x$$

Nuevamente integramos, para obtener la función buscada $f(x)$.

$$f(x)=\int f'(x)\,dx \qquad f(x)=\int (x\cdot\ln(x)-x)\,dx \quad \rightarrow \quad f(x)=\int x\cdot\ln(x)\,dx-\int x\,dx$$

$$f(x)=\int x\cdot\ln(x)\,dx-\frac{x^2}{2}$$

Nuevamente debemos aplicar partes para la integral que nos aparece.

$$u=\ln(x) \quad \rightarrow \quad d\,u=\frac{1}{x}dx$$

$$d\,v=x\,d\,x \quad \rightarrow \quad v=\frac{x^2}{2}$$

$$f(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x)-\int\frac{x}{2}dx-\frac{x^2}{2}=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x)-\frac{x^2}{4}-\frac{x^2}{2}+D$$

$$f(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x)-\frac{3x^2}{4}+D$$

La constante de integración D la obtenemos del dato de que la función pasa por el punto $P(1,2)$.

$$f(1)=2 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{2}\cdot\ln(1)-\frac{3\cdot 1}{4}+D \quad \rightarrow \quad D=\frac{3}{4}$$

Finalmente la función buscada resulta:

$$f(x)=\frac{x^2}{2}\cdot\ln(x)-\frac{3x^2}{4}+\frac{3}{4}=\frac{x^2}{2}\cdot(\ln(x)-\frac{3}{2})+\frac{3}{4}$$

Modelo 07. Opción B. Ejercicio 3

Considera las matrices $A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & m \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & m & 0 \\ 3 & 2 & m \end{pmatrix}$ **.**

a) Encuentra el valor, o los valores, de m para los que A y B tienen el mismo rango.

b) Determina, si existen, los valores de m para los que A y B tienen el mismo determinante.

a) Debemos estudiar el rango de cada matriz, y comprobar si existen valores comunes del parámetro m en la discusión de casos en ambas matrices. Para estudiar el rango, comenzamos planteando el determinante de cada matriz cuadrada y comprobando donde se anula.

$|A|=-m-4$, $|A|=0 \rightarrow m=-4$

Si $m\neq-4 \rightarrow |A|\neq0 \rightarrow rango(A)=2$, ya que tendremos dos vectores linealmente independientes formando la matriz.

Si $m=-4 \rightarrow |A|=0 \rightarrow rango(A)=1$, ya que existe al menos un menor de orden uno no nulo. Por ejemplo $|\alpha_{22}|=-1\neq0$.

$|B|=m^2+4m$, $|B|=0 \rightarrow m=0$, $m=-4$

Si $m\neq0$ y $m\neq-4 \rightarrow |B|\neq0 \rightarrow rango(B)=3$, ya que tendremos tres vectores linealmente independientes formando la matriz.

Si $m=0 \rightarrow B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow rango(B)=2$, ya que existe al menos un menor de orden dos no nulo. Por ejemplo $|\alpha_{33}|=4\neq0$.

Si $m=-4 \rightarrow B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -2 & -4 & 0 \\ 3 & 2 & -4 \end{pmatrix} \rightarrow rango(B)=2$, ya que existe al menos un menor de orden dos no nulo. Por ejemplo $|\alpha_{13}|=8\neq0$.

Comparando sendas discusiones de casos, concluimos: Si $m=0$ el rango de ambas matrices coincide y es igual a 2 .

b) En este apartado debemos igualar sendos determinantes y obtener los valores de m solución.

$$|A|=|B| \quad , \quad |A|=-m-4 \quad , \quad |B|=m^2+4m \quad \rightarrow \quad -m-4=m^2+4m \quad \rightarrow \quad m^2+5m+4=0$$

$$m=\frac{-5\pm\sqrt{25-16}}{2}=\frac{-5\pm 3}{2} \quad \rightarrow \quad m=-1 \quad , \quad m=-4$$

Modelo 07. Opción B. Ejercicio 4

Sea el plano $\Pi: 2x+y-z+8=0$ **.**

a) Calcula el punto P' **, simétrico del punto** $P(2,-1,5)$ **respecto del plano** Π **.**

b) Calcula la recta r' **, simétrico de la recta** $r: \frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{1}$ **respecto del plano** Π **.**

a) La recta s que une los puntos simétricos P y P' es perpendicular al plano $\Pi: 2x+y-z+8=0$, y lo corta en el punto medio del segmento $\overline{PP'}$.

Si $\Pi: 2x+y-z+8=0 \rightarrow \vec{u_\Pi}=(2,1,-1)\perp\Pi \rightarrow \vec{u_\Pi}=\vec{u_s}$, siendo $\vec{u_s}$ el vector director de la recta que une ambos puntos simétricos. Y con vector director y un punto, tenemos la ecuación de la recta:

$$s: \left\{ \begin{matrix} x=2+2t \\ y=-1+t \\ z=5-t \end{matrix} \right\}$$

Si llevamos estas ecuaciones paramétricas a la ecuación general del plano,obtenemos el punto de corte de ambos.

$$2(2+2t)+(-1+t)-(5-t)+8=0 \rightarrow t=-1 \rightarrow M=(0,-2,6)\equiv punto \quad medio \quad \overline{PP'}$$

Si $P(2,-1,5)$ y $P'(x,y,z) \rightarrow (0,-2,6)=(\frac{x+2}{2},\frac{-1+y}{2},\frac{5+z}{2}) \rightarrow$ Igualamos cada componente: $x=-2$, $y=-3$, $z=7$.

El punto simétrico buscado es $P'(-2,-3,7)$.

b) Debemos estudiar la posición relativa de la recta r sobre el plano, ya que la recta simétrica r' dependerá de si r es paralela, secante o coincidente con el plano.

Si pasamos la recta a paramétricas, podremos sustituir directamente en la ecuación general del plano y decidir sobre el resultado que obtengamos.

$$r:\frac{x-2}{-2}=\frac{y+1}{3}=\frac{z-5}{1} \rightarrow r:\begin{Bmatrix} x=2-2t \\ y=-1+3t \\ z=5+t \end{Bmatrix} \rightarrow 2(2-2t)+(-1+3t)-(5+t)+8=0 \rightarrow t=3$$

Obtenemos un punto solución, que será el punto de corte de la recta r con el plano. Este punto de corte es $Q(-4,8,8)\in r'$. La recta simétrica r' también corta al plano en ese punto.

Viendo las ecuaciones paramétricas de la recta, es directo que el punto $P(2,-1,5)$ pertenece a r . Y en el apartado anterior obtuvimos el simétrico de este punto respecto al plano: $P'(-2,-3,7)\in r'$. Este punto $P'(-2,-3,7)$ pertenece a la recta simétrica buscada r' .

Contamos con dos puntos de la recta simétrica r' , por lo que podemos sacar un vector director:

$$\vec{P'Q}=\vec{u_{r'}}=(-2,11,1)$$

Y con un punto y un vector director, tenemos la ecuación de la recta simétrica r' .

$$r':\begin{Bmatrix} x=-2-2t \\ y=-3+11t \\ z=7+t \end{Bmatrix}$$