Preparando Selectividad

Solución Selectividad - Modelo 03

Modelo 03. Opción A. Ejercicio 1

Sea $f(x)=\dfrac{2}{x^2-5x+6}$ **.**

a) Estudia el dominio y las asíntotas de la función.

b) Estudia la monotonía

c) Realiza un dibujo aproximado de la gráfica.

d) Demuestra que la función $f(x)=x-\sqrt{x}$ **tiene una única solución para** $x>\dfrac{1}{4}$ **.**

a) $Dom(f)=\mathbb{R}-2,3$ por anularse el denominador en los puntos $x=2$ y $x=3$.

Estudiamos las asíntotas verticales en aquellos puntos donde se anula el denominador. Estudiamos los límites laterales para conocer el signo hacia donde se dispara la función en las proximidades de estos puntos.

$$\lim_{x\to 2^-}\frac{2}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2^-}\frac{2}{(x-2)(x-3)}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

$$\lim_{x\to 2^+}\frac{2}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2}{(x-2)(x-3)}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 3^-}\frac{2}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3^-}\frac{2}{(x-2)(x-3)}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

$$\lim_{x\to 3^+}\frac{2}{x^2-5x+6}=\lim_{x\to 3^+}\frac{2}{(x-2)(x-3)}=\frac{2}{0^+}=+\infty$$

La asíntota horizontal aparece al estudiar el comportamiento de la función cuando la variable tiende a infinito.

$$\lim_{x\to\pm\infty}\frac{2}{x^2-5x+6}=0$$

Donde hemos aplicado que el grado del polinomio del denominador es mayor que el rgado del polinomio del numerador. Existe asíntota horizontal en $y=0$.

Y si existe horizontal, no existe asíntota oblicua.

b) Calculamos la primera derivada para estudiar intervalos de crecimiento y decrecimiento, y candidatos a extremos relativos.

$$f(x)=\frac{2}{x^2-5x+6} \rightarrow f'(x)=-2\frac{2x-5}{(x^2-5x+6)^2} \quad , \quad f'(x)=0 \rightarrow x=\frac{5}{2}$$

El punto $(\frac{5}{2}, f(\frac{5}{2}))=(\frac{5}{2},-8)$ es un punto crítico. Estudiamos el signo de la primera derivada en los siguientes intervalos.

$(-\infty,2) \rightarrow x=0 \rightarrow f'(0)>0 \rightarrow f(x)$ creciente

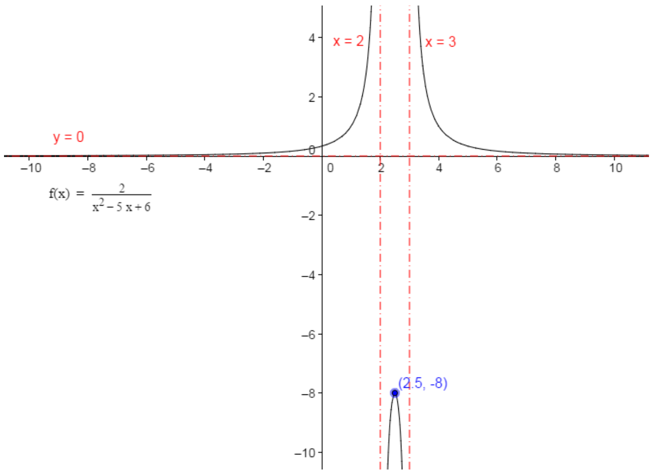
$(2,\frac{5}{2}) \rightarrow x=\frac{9}{4} \rightarrow f'(\frac{9}{4})>0 \rightarrow f(x)$ creciente

$(\frac{5}{2},3) \rightarrow x=\frac{11}{4} \rightarrow f'(\frac{11}{4})<0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$(3,\infty) \rightarrow x=10 \rightarrow f'(3)<0 \rightarrow f(x)$ decreciente

Por lo tanto en $(\frac{5}{2},-8)$ tenemos un máximo relativo por cambiar el crecimiento de creciente a decreciente a ambos lados del punto.

c)



d) En primer lugar demostremos, por el Teorema de Bolzano, que la función $f(x)=x-\sqrt{x}$ tiene al menos una solución real para $x>\frac{1}{4}$. Para ello buscamos un intervalo cerrado donde la función sea continua y cambie de signo al ser evaluada en los extremos del intervalo.

$Si\ \ f(x)\ \ continua\ \ en\ \ [a,b]\ \ y\ \ f(a)\cdot f(b)<0 \implies \exists c\in(a,b)/f(c)=0$

El dominio de la función son todos los números reales positivos más el 0 , por lo que podemos considerar el intervalo:

$$[\frac{1}{4},10] \rightarrow f(\frac{1}{4})<0 \ , \ f(10)>0 \rightarrow \exists c\in(\frac{1}{4},10)/f(c)=0$$

Una vez demostrada la existencia de al menos una solución real para $x>\frac{1}{4}$, demostremos que es única por reducción al absurdo y aplicando el Teorema de Rolle.

Nuestra hipótesis de partida es que existen dos soluciones $x=c_1>\frac{1}{4}$, $x=c_2>\frac{1}{4}$ $\rightarrow$ $f(c_1)=f(c_2)=0$. Como la función es continua en $\mathbb{R}^+ +\{0\}$, será continua en $[c_1,c_2]$ por ser positivos los extremos del intervalo. Además la función es derivable en el intervalo $(0,+\infty)$, por lo que también es derivable en (c_1,c_2) . Así estamos en condiciones de aplicar el Teorema de Rolle.

$Si\ \ f(x)\ \ continua\ \ en\ \ [c_1,c_2]\ ,derivable\ \ en\ \ (c_1,c_2)\ \ y\ \ f(c_1)=f(c_2) \implies$

$\exists\varphi\in(c_1,c_2)/f'(\varphi)=0$

Derivamos la función e igualamos a cero.

$$f(x)=x-\sqrt{x} \rightarrow f'(x)=1-\frac{1}{2\sqrt{x}}=\frac{2\sqrt{x}-1}{2\sqrt{x}} \ , \ f'(\varphi)=0 \rightarrow \varphi=\frac{1}{4}$$

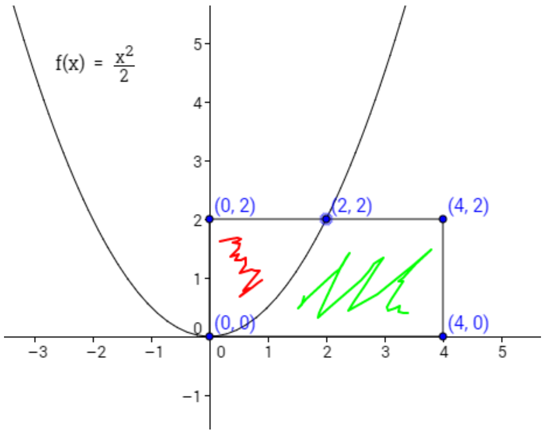
Y llegamos a un absurdo, ya que hemos supuesto que c_1 y c_2 son mayores que $\frac{1}{4}$, por lo que nuestra hipótesis de partida es falsa. Solo existe una única solución para $x>\frac{1}{4}$.

Modelo 03. Opción A. Ejercicio 2

a) La parábola $f(x)=\frac{x^2}{2}$ divide al rectángulo de vértices $(0,0)$, $(4,0)$, $(4,2)$ y $(0,2)$ en dos recintos. Calcular el área de cada recinto.

b) Calcula la siguiente integral en función de a y b . $I=\int \frac{a\,x+b}{x^2-3\,x+2}dx$

a) Podemos realizar un boceto rápido de la curva y del rectángulo.



La curva corta al rectángulo en el punto $(2,2)$. Justo en ese punto, si trazamos una recta vertical para $x=2$, el rectángulo queda dividido en dos cuadrados iguales, de anchura $2\ u$ y altura $2\ u$. Es decir, cada cuadrado tiene $4\ u^2$ de área. Y el rectángulo de partida tiene un área total de $8\ u^2$.

La curva divide al rectángulo en dos áreas, que hemos representado en la gráfica con colores rojo y verde.

El área pintada de rojo será igual a:

$$A_{rojo}=4-\int_0^2 \frac{x^2}{2}dx=4-[\frac{x^3}{6}]_0^2=4-[\frac{8}{6}]=4-\frac{4}{3}=\frac{8}{3}\ u^2$$

Y el área pintada de verde será:

$$A_{verde}=8-A_{rojo}=8-\frac{8}{3}=\frac{16}{3}\ u^2$$

b) $I=\int \frac{a\,x+b}{x^2-3\,x+2}\,dx=\int \frac{a\,x+b}{(x-1)(x-2)}\,dx$

Aplicamos el método de los coeficientes indeterminados.

$$\frac{a\,x+b}{(x-1)(x-2)}=\frac{C}{x-1}+\frac{B}{x-2}$$

$$a\,x+b=C\,(x-2)+B\,(x-1)$$

$$si\quad x=1\;\rightarrow\;a+b=-C\;\rightarrow\;-(a+b)=C$$

$$si\quad x=2\;\rightarrow\;2\,a+b=B$$

Es decir, podemos expresar la integral de la forma:

$$I=\int \frac{a\,x+b}{(x-1)(x-2)}\,dx=\int \frac{-(a+b)}{x-1}\,dx+\int \frac{2\,a+b}{x-2}\,dx=-(a+b)\ln|x-1|+(2\,a+b)\ln|x-2|+cte$$

Modelo 03. Opción A. Ejercicio 3

Sea $A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 2 & 1 & a^2-1 \end{pmatrix}$ **.**

a) Calcular el rango de A **en función del parámetro real** a **.**

b) Decidir si la matriz tiene inversa para $a=1$ **y, en caso afirmativo, calcularla.**

a) Calculamos el determinante de la matriz.

$$|A|=-a(a^2-1)-(2a)=-a^3-a$$

Si el determinante es distinto de cero el rango de la matriz será 3, ya que contará con tres vectores linealmente independientes.

$$-a^3-a=0 \rightarrow -a(a^2+1)=0 \rightarrow a=0$$

Discusión de casos.

$$Si \quad a\neq 0 \rightarrow rango(A)=3$$

$Si \quad a=0 \rightarrow A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |\alpha_{22}|=\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=1-2=-1\neq 0$ → Existe al menos un menor de orden 2 no nulo → $rango(A)=2$

b) Para $a=1$ si existe inversa, ya que el determinante de la matriz es distinto de cero.

$$A=\begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{[adj(A)]^t}{|A|}$$

Calculamos los distintos adjuntos.

$$A_{11}=0 \quad , \quad A_{12}=0 \quad , \quad A_{13}=-2$$

$$A_{21}=1 \quad , \quad A_{22}=-2 \quad , \quad A_{23}=1$$

$$A_{31}=-1 \quad , \quad A_{32}=0 \quad , \quad A_{33}=-1$$

$$adj(A)=\begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow [adj(A)]^t=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}=\frac{[adj(A)]^t}{|A|}=\frac{\begin{pmatrix}0 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -1\end{pmatrix}}{-2}$$

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}0 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & \frac{-1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

Modelo 03. Opción A. Ejercicio 4

Los puntos $A(1,3,-4)$, $B(2,6,7)$ y $C(5,-1,2)$ son tres vértices consecutivos de un paralelogramo.
a) Halla el cuarto vértice D .

b) Halla la ecuación de la recta que pasa por A y C .

c) Halla la ecuación del plano que contine al paralelogramo.

a) El punto medio del segmento que une A y C es:

$M=(3,1,-1)$

Y M también es el punto medio del segmento que une B y D . Por lo tanto, si $D(x,y,z)$:

$$(3,1,-1)=\left(\frac{2+x}{2},\frac{6+y}{2},\frac{7+z}{2}\right) \rightarrow \quad x=4 \quad , \quad y=-4 \quad , \quad z=-9 \quad \rightarrow \quad D(4,-4,-9)$$

b) Para la recta necesitamos un punto y un vector. El punto puede ser, por ejemplo, $A(1,3,-4)$. Y el vector $\vec{AC}=(4,-4,6)$. La ecuación continua de la recta será:

$$r:\frac{x-1}{4}=\frac{y-3}{-4}=\frac{z+4}{6}$$

c) Para el plano necesitamos un punto y dos vectores linealmente independientes. El punto puede ser, por ejemplo, $A(1,3,-4)$. Uno de los vectores $\vec{AC}=(4,-4,6)$. Y el segundo vector $\vec{AB}=(1,3,11)$ .Ambos vectores son linealmente independiente, al tener como extremos finales vérticies distintos del paralelogramo.

Otra forma de ver que son independiente es comprobando que no son proporcionales. Es decir: $\frac{4}{1}\neq\frac{-4}{3}\neq\frac{6}{11}$.

Y la ecuación paramétrica del plano resulta:

$$\Pi:\left\{\begin{array}{c} x=1+4\alpha+\beta \\ y=3-4\alpha+3\beta \\ z=-4+6\alpha+11\beta \end{array}\right\}$$

Modelo 03. Opción B. Ejercicio 1

a) Calcule el número real m que cumple $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+mx)}{sen(2x)}=3$

b) Se desea construir un contenedor con forma de paralelepípedo rectangular de $100\,m^3$ de volumen, de manera que el largo de su base sea $\frac{4}{3}$ de la anchura x de su base. Los precios de m^2 de suelo, de techo y de pared lateral son, respectivamente, $225\,€/m^2$, $300\,€/m^2$ y $256\,€/m^2$. Determinar razonadamente las dimensiones que minimizan el coste de pintura y dicho coste mínimo.

a) $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+mx)}{sen(2x)}=3 \quad \to \quad \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+mx)}{sen(2x)}=\frac{\ln(1)}{sen(0)}=\frac{0}{0}$

Aplicamos la regla de L'Hôpital, derivando numerador y denominador por separado.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+mx)}{sen(2x)}=\lim_{x\to 0} \frac{\frac{m}{1+mx}}{2\cdot\cos(2x)}=\frac{m}{2}$$

Igualamos el límite al valor 3 proporcionado por el enunciado.

$$\frac{m}{2}=3 \quad \to \quad m=6$$

b) Tenemos un paralelepípedo rectangular de anchura x , largo $\frac{4x}{3}$ y altura y . Su volumen será:

$$V=x\cdot\frac{4x}{3}\cdot y=\frac{4}{3}x^2 y$$

Según el enunciado: $V=100\,m^3 \quad \to \quad \frac{4}{3}x^2 y=100 \quad \to \quad y=\frac{75}{x^2}$

El suelo del paralelepípedo tiene una superficie igual a $S_{suelo}=x\cdot\frac{4x}{3}=\frac{4}{3}x^2\ \ u^2$ → El precio por pintar el suelo será → $P_{suelo}=\frac{4}{3}x^2\cdot 225=300x^2\ \ €$.

El techo del paralelepípedo tiene una superficie igual a $S_{techo}=x\cdot\frac{4x}{3}=\frac{4}{3}x^2\ \ u^2$ → El precio por pintar el techo será → $P_{techo}=\frac{4}{3}x^2\cdot 300=400x^2\ \ €$.

Las cuatro paredes laterales del paralelepípedo tienen igual superficie dos a dos, por lo que las cuatro caras forman una superficie igual a $S_{paredes}=2\cdot x\cdot y+2\cdot\frac{4x}{3}\cdot y=2xy+\frac{8}{3}xy=\frac{14}{3}xy$ → El precio por pintar las paredes será → $P_{paredes}=\frac{14}{3}xy\cdot 256=3584\,xy$ € .

El coste total por pintar todo el paralelepípedo será la suma del coste por pintar el suelo, por pintar el techo y por pintar las cuatro paredes laterales.

$$P_{total}=300x^2+400x^2+3584\,xy=700x^2+3584\,xy \quad €$$

Esta es la función que debemos optimizar, para que el coste de pintura sea mínimo. Recordando la relación obtenida del volumen $y=\frac{75}{x^2}$, nos queda:

$$P_{total}=700x^2+3584\,x\frac{75}{x^2}=700x^2+\frac{268800}{x} \quad €$$

Derivamos e igualamos a cero, para obtener los puntos críticos de la función (que es continua en toda la recta real salvo en $x=0$).

$$P'=1400x-\frac{268800}{x^2} \quad , \quad P'=0 \;\rightarrow\; 1400x-\frac{268800}{x^2}=0 \;\rightarrow\; x^3=192$$

$$x=\pm\sqrt[3]{192}=\pm\sqrt[3]{2^6\cdot 3}=\pm 4\sqrt[3]{3}$$

Las distancias tienen sentido físico si son positivas, por lo tanto:

$$x=4\sqrt[3]{3} \quad m$$

Nos falta confirmar que este punto crítico es un mínimo de la función, por lo que podemos evaluar el signo de la derivada en los siguientes intervalos:

$(0,4\sqrt[3]{3}) \;\rightarrow\; P'(1)<0 \;\rightarrow\; P(x)$ decreciente

$(4\sqrt[3]{3},+\infty) \;\rightarrow\; P'(100)>0 \;\rightarrow\; P(x)$ creciente

Por lo tanto confirmamos que en $x=4\sqrt[3]{3}\;m$ tenemos un mínimo relativo de la función precio.

Las dimensiones del paralelepípedo son:

$$Ancho=4\sqrt[3]{3} \quad m$$

$$Largo=\frac{4}{3}\cdot ancho=\frac{16}{3}\sqrt[3]{3} \quad m$$

$$Alto=\frac{75}{ancho^2}=\frac{75}{16\sqrt[3]{3^2}} \quad m$$

Y el coste mínimo de la pintura resulta:

$$P_{total}(4\sqrt[3]{3})=700(4\sqrt[3]{3})^2+\frac{268800}{4\sqrt[3]{3}}=11200\sqrt[3]{3^2}+\frac{67200}{\sqrt[3]{3}}=\frac{33600+67200}{\sqrt[3]{3}}=\frac{100800}{\sqrt[3]{3}}\simeq 69890,82\,€$$

Modelo 03. Opción B. Ejercicio 2

a) Calcule a y b para que la función $f(x)=x^3+ax^2+bx+2$ pase por el punto $(-1,6)$ y su recta tangente en $x=1$ forme un ángulo de 45^o con el eje OX.

b) Calcule una primitiva de $I=\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$.

a) Si la función pasa por el punto $(-1,6)$ se cumple la relación:

$$f(-1)=6 \quad \rightarrow \quad -1+a-b+2=6 \quad \rightarrow \quad a-b=5$$

La derivada de la función en $x=1$ es igual a $tg(45^o)=1$, por ser éste el valor de la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto. Es decir:

$$f'(x)=3x^2+2ax+b \quad , \quad f'(1)=3+2a+b \quad , \quad f'(1)=1 \quad \rightarrow \quad 3+2a+b=1 \quad \rightarrow \quad 2a+b=-2$$

Obtenemos el siguiente sistema de dos ecuaciones y dos incógnitas:

$$\left\{ \begin{array}{c} a-b=5 \\ 2a+b=-1 \end{array} \right\} \rightarrow \text{Sumamos ambas ecuaciones} \rightarrow \quad 3a=4 \quad \rightarrow \quad a=\frac{4}{3}$$

Llevando este valor a la primera ecuación del sistema:

$$b=a-5=\frac{4}{3}-5=\frac{-11}{3}$$

b) $I=\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx$

Integramos por partes.

$$u=\ln(x) \quad \rightarrow \quad du=\frac{1}{x}dx$$

$$dv=\frac{1}{\sqrt{x}}dx \quad \rightarrow \quad v=2\sqrt{x}$$

$$I=\int \frac{\ln(x)}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\ln(x)-2\int \frac{\sqrt{x}}{x}dx=2\sqrt{x}\ln(x)-2\int \frac{1}{\sqrt{x}}dx=2\sqrt{x}\ln(x)-4\sqrt{x}+C$$

$$I=2\sqrt{x}(\ln(x)-2)+C$$

Modelo 02. Opción B. Ejercicio 3

Sea A una matriz cuadrada de orden 3 con elementos reales, tal que $A^2=I$ (siendo I la matriz identidad de orden 3).
a) Prueba que la matriz A tiene inversa y dé dicha inversa

b) Obtener A^n para cualquier número natural n .

c) Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$, calcula el valor del número real a para que se cumpla $A^2=I$

a) Una matriz A tiene inversa A^{-1} , y esta es única, si se cumplen las siguientes relaciones:

$$A^{-1}\cdot A=A\cdot A^{-1}=I$$

Se demuestra la existencia de la matriz inversa A^{-1} si el determinante de A es no nulo. Y de las condiciones del enunciado:

$$A^2=I \quad \rightarrow \quad A\cdot A=I \quad \rightarrow \quad |A\cdot A|=|I|$$

El determinante del producto es el producto de los determinantes. Y el determinante de la matriz identidad es igual a la unidad

$$|A\cdot A|=|I| \quad \rightarrow \quad |A|\cdot|A|=1 \quad \rightarrow \quad (|A|)^2=1 \quad \rightarrow \quad |A|=\pm 1\neq 0$$

Al ser el determinante no nulo, se demuestra la existencia de la matriz inversa A^{-1} y su valor es $A^{-1}=A$ ya que la propia matriz A cumple $A\cdot A=I$.

b) $A=A$

$$A^2=I$$

$$A^3=A\cdot A^2=A\cdot I=A$$

$$A^4=A^2\cdot A^2=I\cdot I=I$$

Con estos primeros resultados podemos inferir:

$$A^n=A\,,\ \ si\ \ n\ \ es\ \ impar$$

$$A^n=I\,,\ \ si\ \ n\ \ es\ \ par$$

Demostremos esta expresión de A^n por inducción matemática.

Comprobamos para $n=1 \quad \rightarrow \quad A=A$

Suponemos cierta para $n \quad \rightarrow \quad A^n=A\,,\ si\ \ n\ \ es\ \ impar \quad , \quad A^n=I\,,\ si\ \ n\ \ es\ \ par$

Demostramos para $n+1$ a partir de los resultados anteriores de A^n y A^n .

Si $n+1$ es par → n es impar → $A^{n+1}=A^n\cdot A=A\cdot A=A^2=I$.

Si $n+1$ es impar → n es par → $A^{n+1}=A^n\cdot A=I\cdot A=A$.

Como queríamos demostrar.

c) $A^2=I \rightarrow \begin{pmatrix}1&1&1\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\0&a&0\\0&0&a\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Operamos e igualamos a cada término m_{ij} de la matriz identidad:

$m_{11} \rightarrow 1=1$

$m_{12} \rightarrow 1+a=0 \rightarrow a=-1$

$m_{13} \rightarrow 1+a=0 \rightarrow a=-1$

$m_{21} \rightarrow 0=0$

$m_{22} \rightarrow a^2=1 \rightarrow a=\pm 1$

$m_{23} \rightarrow 0=0$

$m_{31} \rightarrow 0=0$

$m_{32} \rightarrow 0=0$

$m_{33} \rightarrow a^2=1 \rightarrow a=\pm 1$

Por lo tanto, la condición que cumple todas las igualdades es $a=-1$.

Modelo 02. Opción B. Ejercicio 4

Sean las rectas $r:\begin{cases} x-y+z=2 \\ 2x-2y+z=2 \end{cases}$ **y** $s:\begin{cases} x+y=0 \\ z=1 \end{cases}$ **.**

a) Determina la posición relativa de ambas rectas.

b) Hallar, si es posible, la ecuación de un plano paralelo a r **que contiene a** s **.**

c) Obtener la mínima distancia entre ambas rectas.

a) Para estudiar la posición relativa de dos rectas podemos hacerlo estudiando el sistema de los cuatro planos que aparecen en la forma implícita de ambas rectas, o bien pasar a paramétrica y trabajar con los vectores directores.

Como tenemos las rectas en forma implícita, estudiaremos la solución del siguiente sistema (en notación matricial).

$$M=\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow M/D=\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Estudiamos el rango de M , con el siguiente menor de orden 3.

$$|F_2 F_3 F_4|=\begin{vmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}=2+0+0-(0+0-2)=4\neq 0 \rightarrow rango(M)=3$$

Estudiamos el rango de M/D con el siguiente determinante de orden 4.

$$|M/D|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & -2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} \rightarrow C'_4=C_4-C_3 \rightarrow |M/D|=\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

Desarrollamos el determinante por la fila F_4 .

$$|M/D|=-1\cdot\begin{vmatrix}1 & -1 & 1\\ 2 & -2 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{vmatrix}=-(0-1+2-(-2+1+0))=-(1+1)=-2\neq 0 \quad\rightarrow\quad rango(M/D)=3$$

Si $rango(M)=3\neq 4=rango(M/D)$ → No hay solución → Sistema Incompatible → Las rectas son cruzadas.

Para practicar, vamos a comprobar que obtenemos el mismo resultado si pasamos las ecuaciones de las rectas a paramétricas y trabajamos con los vectores directores.

$$r:\begin{Bmatrix}x-y+z=2\\ 2x-2y+z=2\end{Bmatrix} \quad\rightarrow\quad z=\lambda \quad\rightarrow\quad r:\begin{Bmatrix}x-y=2-\lambda\\ 2x-2y=2-\lambda\end{Bmatrix} \quad\rightarrow\quad r:\begin{Bmatrix}2x-2y=4-2\lambda\\ 2x-2y=2-\lambda\end{Bmatrix}$$

Igualamos ambas ecuaciones.

$$4-2\lambda=2-\lambda \quad\rightarrow\quad \lambda=2 \quad\rightarrow\quad z=2$$

Tomamos otra incógnita como parámetro. Por ejemplo $y=\lambda$. Así:

$$x-\lambda+2=2 \quad\rightarrow\quad x=\lambda$$

La recta r en paramétricas resulta:

$r=\begin{Bmatrix}x=\lambda\\ y=\lambda\\ z=2\end{Bmatrix}$ → Punto de la recta $A(0,0,2)$. Vector director $\vec{u}_r=(1,1,0)$.

Trabajamos ahora con la segunda recta.

$$s:\begin{Bmatrix}x+y=0\\ z=1\end{Bmatrix} \quad\rightarrow\quad y=\lambda \quad\rightarrow\quad x=-\lambda$$

La recta s en paramétricas resulta:

$s=\begin{Bmatrix}x=-\lambda\\ y=\lambda\\ z=1\end{Bmatrix}$ → Punto de la recta $B(0,0,1)$. Vector director $\vec{u}_s=(-1,1,0)$.

El vector formado por los puntos obtenidos de las rectas resulta: $\vec{AB}=(0,0,-1)$.
Así, debemos estudiar el rango de la matriz formada por los vectores columnas $\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{AB}$.

$$\{\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{AB}\} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow |\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{AB}| = -1+0+0-(0+0+1) = -2 \neq 0$$

Es decir: $rango(\vec{u}_r, \vec{u}_s, \vec{AB}) = 3$ → Los tres vectores son linealmente independientes → Las rectas son cruzadas.

b) Debemos obtener un plano paralelo a r que contiene a s .
Para obtener la ecuación paramétrica de un plano necesitamos un punto y dos vectores linealmente independientes pertenecientes al plano.
Un punto puede ser $B(0,0,1)$, calculado en el apartado anterior y que pertenece a s .
Un vector puede ser el vector director de $s \rightarrow \vec{u}_s = (-1,1,0)$. Un segundo vector será el vector director de $r \rightarrow \vec{u}_r = (1,1,0)$. Ambos sean linealmente independientes, como demostramos en el apartado anterior, y además garantizamos obtener un plano paralelo a la recta r .
Por la determinación lineal del plano, podemos obtener la ecuación general resolviendo el siguiente determinante.

$$\Pi(\vec{u}_r, \vec{u}_s, B) \rightarrow \begin{vmatrix} 1 & -1 & x \\ 1 & 1 & y \\ 0 & 0 & z-1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow z-1+0+0-(0+0+1-z) = 0 \rightarrow 2z-2=0$$

$$\Pi(\vec{u}_r, \vec{u}_s, B): z=1$$

c) La distancia mínima entre ambas rectas coincide con la distancia medida desde la recta r al plano obtenido en el apartado anterior, que es paralelo a r y contiene a la recta s .
Podemos tomar cualquier punto de la recta r y obtener la distancia al plano $\Pi: z=1$.
El punto $A(0,0,2) \in r$ y podemos hacer uso de la expresión general de la distancia de un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ a un plano $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$:

$$d(P, \Pi) = \frac{|A x_0 + B y_0 + C z_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}} \rightarrow d(A, \Pi) = \frac{|1 \cdot 2 - 1|}{\sqrt{1}} = 1 \ u$$