Preparando Selectividad

Solución Selectividad - Modelo 18

Modelo 18. Opción A. Ejercicio 1

Sea $f(x)=\frac{x^2+3x+4}{2x+2}$ **para** $x\neq -1$

a) [1,5 puntos] Estudia y halla las asíntotas de las gráficas de $f(x)$ **.**

b) [1 punto] Determina los intervalos de crecimiento y de decrecimiento de $f(x)$ **.**

a) El dominio de un cociente de polinomios son todos los reales menos los valores que anulan al denominador. Por lo tanto:

$Dom(f)=\mathbb{R}-\{-1\}$

El valor que no pertenece al dominio es el candidato a asíntota vertical.

$\lim_{x\to -1}\frac{x^2+3x+4}{2x+2}=\frac{2}{0}$ → indeterminación → Límites laterales

$\lim_{x\to -1^-}\frac{x^2+3x+4}{2x+2}=\frac{2}{0^-}=-\infty$

$\lim_{x\to -1^+}\frac{x^2+3x+4}{2x+2}=\frac{2}{0^+}=+\infty$

Tenemos Asíntota vertical en $x=-1$.

Como el grado del numerador supera en una unidad al grado del denominador, no tendremos Asíntota Horizontal pero sí Asíntota Oblicua.

Además, al ser cociente de polinomios, la asíntota oblicua en $+\infty$ coincide con la asíntora oblicua en $-\infty$.

La asíntota oblicua es una recta de ecuación explícita $y=mx+n$, donde los coeficientes se determinan con los siguientes límites.

$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x+4}{2x^2+2x}=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación → Dividimos por la máxima potencia x^2 y simplificamos → $m=\lim_{x\to\infty}\frac{1+3/x+4/x^2}{2+2/x}=\frac{1}{2}$ → $m=\frac{1}{2}$

$n=\lim_{x\to\infty}(f(x)-mx)=\lim_{x\to\infty}(\frac{x^2+3x+4}{2x+2}-\frac{1}{2}x)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+4}{2x+2}=\frac{\infty}{\infty}$ → Indeterminación → Dividimos por la máxima potencia x y simplificamos → $n=\lim_{x\to\infty}\frac{2+4/x}{2+2/x}=1$ → $n=1$

Tenemos Asíntotota Oblicua $y=\frac{1}{2}x+1$ en x tendiendo a $\pm\infty$

b) $f(x)=\frac{x^2+3x+4}{2x+2}$

La condición necesaria de extremos relativo implica primera derivada nula.

$$f'(x)=\frac{(2x+3)(2x+2)-(x^2+3x+4)2}{(2x+2)^2}=\frac{4x^2+4x+6x+6-2x^2-6x-8}{(2x+2)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x^2+4x-2}{(2x+2)^2} \rightarrow f'(x)=0 \rightarrow 2x^2+4x-2=0 \rightarrow x^2+2x-1=0$$

Las soluciones son los puntos críticos (candidatos a extremos relativos):

$x_1=-1+\sqrt{2}$, $x_2=-1-\sqrt{2}$

Para conocer la monotonía, evaluamos la primera derivada en los intervalos formado en la recta real por el punto que no pertenece al dominio y los puntos críticos:

$(-\infty,-1-\sqrt{2}) \rightarrow f'(-10)>0 \rightarrow f(x)$ estrictamente creciente

$(-1-\sqrt{2},-1) \rightarrow f'(-2)<0 \rightarrow f(x)$ estrictamente decreciente

$(-1,-1+\sqrt{2}) \rightarrow f'(-0)<0 \rightarrow f(x)$ estrictamente decreciente

$(-1+\sqrt{2},+\infty) \rightarrow f'(10)>0 \rightarrow f(x)$ estrictamente creciente

Modelo 18. Opción A. Ejercicio 2

Sea la función $f(x):(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\frac{1+e^x}{1-e^x}$. Halla la primitiva de la función cuya gráfica pasa por el punto $(1,1)$ (Sugerencia: cambio de variable $t=e^x$).

Debemos resolve la siguiente integral indefinida:

$$I=\int\frac{1+e^x}{1-e^x}dx \;\to \text{cambio } t=e^x \;\to \text{diferenciamos } dt=e^x dx \;\to\; dx=\frac{dt}{t} \;\to \text{sustituimos}$$

$$I=\int\frac{1+t}{1-t}\frac{dt}{t}=\int\frac{1+t}{(1-t)t}dt \;\to \text{Cociente de polinomios con grado numerador < grado denominador}$$

Como el denominador ya está descompuesto en dos raíces simples, aplicamos el método de los coeficientes indeterminados.

$$\frac{1+t}{(1-t)t}=\frac{A}{1-t}+\frac{B}{t} \;\to \text{m.c.m. e igualamos numeradores} \to\; 1+t=At+B(1-t)$$

Damos valores:

$$t=0 \;\to\; 1=B$$
$$t=1 \;\to\; 2=A$$

La integral queda:

$$I=\int\frac{A}{1-t}dt+\int\frac{B}{t}dt=-2\ln|1-t|+\ln|t|+C$$

Deshacemos el cambio de variable $t=e^x \;\to\; I=-2\ln|1-e^x|+\ln|e^x|+C=-2\ln|1-e^x|+x+C$

Aplicamos condición de contorno $F(1)=1$ siendo $F(x)$ la primitiva buscada.

$$-2\ln|1-e|+1+C=1 \quad \rightarrow \quad C=2\ln|1-e|\simeq 1{,}08$$

Por lo que la primitiva solución es: $F(x)=-2\ln|1-e^x|+x+1{,}08$

Modelo 18. Opción A. Ejercicio 3

Calcula todas las matrices $X=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **tales que** $a+d=1$ **, tienen determinante 1 y cumple** $A\,X=X\,A$ **, siendo** $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ **.**

El enunciado nos ofrece varias condiciones:

$$a+d=1$$
$$|X|=1 \;\rightarrow\; a\,d-b\,c=1$$
$$A\,X=X\,A \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; \begin{pmatrix} -c & -d \\ a & b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} b & -a \\ d & -c \end{pmatrix}$$

Dos matrices son iguales si sus coeficientes son iguales. Por lo tanto, obtenemos cuatro nuevas condiciones:

$\left\{\begin{matrix} -c=b \\ -d=-a \\ a=d \\ b=-c \end{matrix}\right\}$ → Hay dos ecuaciones proporcionales, por lo que el sistema queda → $\left\{\begin{matrix} a=d \\ b=-c \end{matrix}\right\}$

Por lo tanto: Si $a+d=1$ y $a=d \;\rightarrow\; a=\frac{1}{2}$, $d=\frac{1}{2}$

Si $a\,d-b\,c=1$ y $b=-c \;\rightarrow\; \frac{1}{4}+b^2=1 \;\rightarrow\; b=\frac{\pm\sqrt{3}}{2}$

En consecuencia, tenemos dos matrices que cumplen las condiciones:

$$X=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \;,\; X=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Modelo 18. Opción A. Ejercicio 4

Sean las rectas $r: \frac{x-2}{-1} = \frac{y-2}{3} = \frac{z-1}{1}$ **y los planos** $\Pi_1: x=0$ **y** $\Pi_2: y=0$ **.**

a) [1,25 puntos] Halla los puntos de la recta r **que equidistan de los planos** Π_1 **y** Π_2 **.**

b) [1,25 puntos] Determina la posición relativa de la recta r **y la recta interseccióndе los planos** Π_1 **y** Π_2 **.**

a) Tomamos un punto arbitrario de la recta, que es un punto que tiene por coordenadas las ecuaciones paramétricas de la recta.

$$r: \begin{Bmatrix} x = 2-a \\ y = 2+3a \\ z = 1+a \end{Bmatrix} \quad \rightarrow \quad P(2-a, 2+3a, 1+a)$$

Debemos imponer la condición de que la distancia de este punto arbitrario a ambos planos sea la misma. Recordamos la expresión que nos da la distancia de un punto $P(x_0, y_0, z_0)$ a un plano de ecuación general $\Pi: Ax+By+Cz+D=0$:

$$d(P, \Pi) = \frac{|A x_0 + B y_0 + C z_0 + D|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

En nuestro ejercicio:

$$d(P, \Pi_1) = \frac{|2-a|}{1} \quad , \quad d(P, \Pi_2) = \frac{|2+3a|}{1}$$

Igualamos ambas distancias:

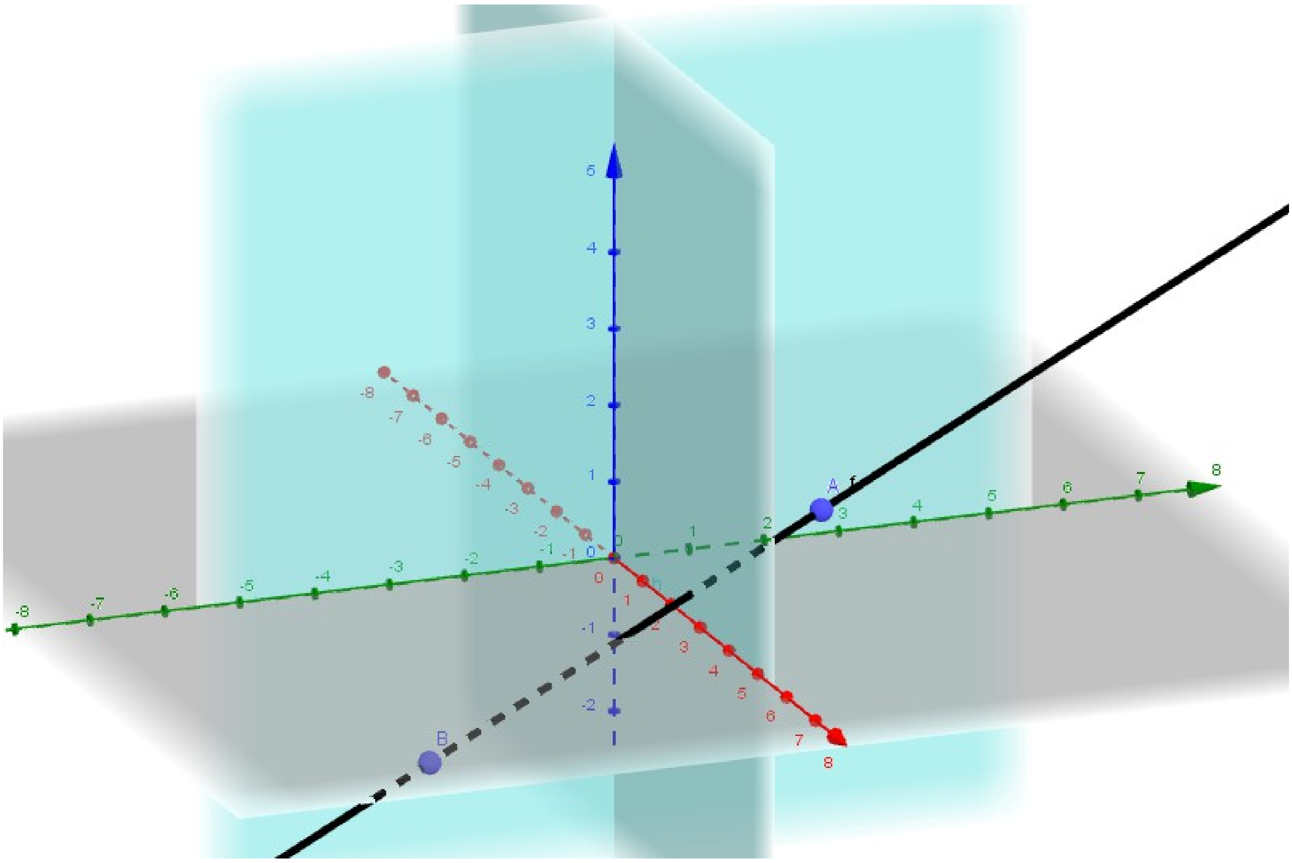
$$|2-a| = |2+3a|$$

Cuando tenemos una igualdad de dos valores absolutos, lo más sencillo para romper los valores absolutos es colocar un + o un – delante de uno de los términos.

$2-a = 2+3a \quad \rightarrow \quad a=0$ → Punto solución: $P(2,2,1)$

$2-a = -2-3a \quad \rightarrow \quad a=-2$ → Punto solución: $P(4,-4,-1)$

Representamos en Geogebra la solución de este apartado.



b) La recta formada por el corte de los dos planos, en forma general, es directamente → $s:\begin{Bmatrix} x=0 \\ y=0 \end{Bmatrix}$

Si la pasamos a paramétrica, la incógnita que no aparece en la ecuación general es el parámetro libre, por lo tanto → $s:\begin{Bmatrix} x=0 \\ y=0 \\ z=\lambda \end{Bmatrix}$

Del apartado anterior sabemos que $r:\begin{Bmatrix} x=2-a \\ y=2+3a \\ z=1+a \end{Bmatrix}$

Para estudiar la posición relativa de dos rectas necesitamos un vector director de cada recta y un punto de cada recta.

$\vec{u}_r=(-1,3,1)$, $A(2,2,1)\in r$, $\vec{v}_s=(0,0,1)$, $B(0,0,0)\in s$

$\vec{BA}=(2,2,1)$

Y estudiamos el rango de la matriz formada por los dos vectores directores y por el vector $\vec{BA}$. El rango lo vamos a estudiar por determinantes, recordando que el rango coincide con la dimensión del mayor menor no nulo.

$$|M|=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$ → Resolvemos por Sarrus → $|M|=0+0+6-(0+0-2)=8\neq 0$

El rango es 3, por lo que los tres vectores son linealmente independientes. Las rectas son cruzadas.

Modelo 18. Opción B. Ejercicio 1

Sea la función $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x)=(x-a)e^x$.
a) [1,25 puntos] Determina a sabiendo que la función tiene un punto crítico en $x=0$.

b) [1,25 puntos] Para $a=1$, calcula los puntos de inflexión de la gráfica de la función.

a) La condición necesaria de punto crítico es primera derivada nula.

$f'(x)=1 \cdot e^x+(x-a)e^x=e^x(1+x-a)$

Si en $x=0$ hay punto crítico --> $f'(0)=0 \rightarrow e^0(1+0-a)=0$ --> $a=1$

b) La condición necesaria de punto de inflexión es segunda derivada igual a cero.

Si $a=1 \rightarrow f'(x)=e^x(x) \rightarrow f''(x)=e^x(x)+e^x \cdot 1=e^x(x+1)$

$f''(x)=0 \rightarrow e^x(x+1)=0 \rightarrow e^x=0$ o bien $x+1=0$

La exponencial nunca se anula, por lo que el único candidato a punto de inflexión es $x=-1$

Aplicamos condición suficiente de punto de inflexión, evaluando el candidato en la tercera derivada.

$f''(x)=e^x(x+1) \rightarrow f'''(x)=e^x(x+1)+e^x \cdot 1=e^x(x+1+1)=e^x(x+2)$

$f'''(-1)=e^{-1}(-1+2)>0 \rightarrow x=-1$ es punto de inflexión, donde la función pasa de convexa a cóncava.

Modelo 18. Opción B. Ejercicio 2

Considera las funciones $f(x):(-2,+\infty)\rightarrow\mathbb{R}$ **definida por** $f(x)=\ln(x+2)$ **y** $g(x):\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$ **definida por** $g(x)=\frac{1}{2}(x-3)$ **.**

a) [1 punto] Esboza el recinto que determinan la gráfica de f **, la gráfica de** g **, la recta** $x=1$ **y la recta** $x=3$ **. (No es necesario calcular los puntos de corte entre las dos gráficas).**

b) [1,5 puntos] Determina el área del recinto anterior.

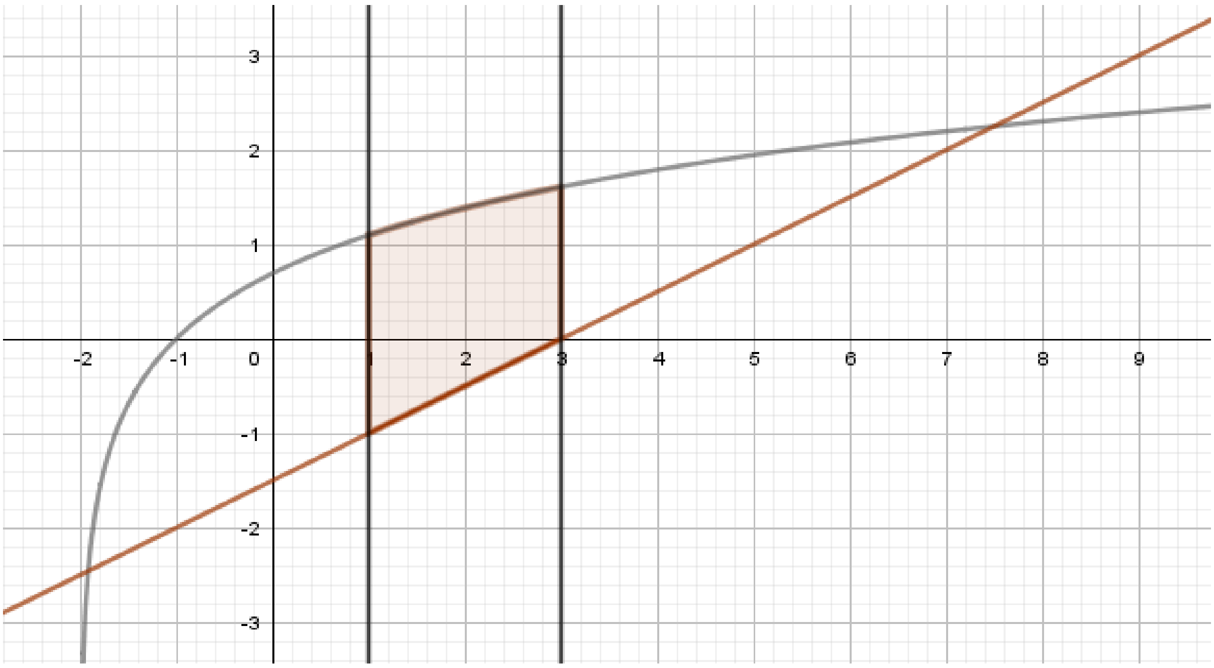
a) La gráfica de $\ln(x)$ es bien conocida, por lo que $f(x)=\ln(x+2)$ implica desplazar horizontalmente a la izquierda la curva de $\ln(x)$.

Para dibujar la recta, nos bastan dos puntos:

$x=0$ --> $g(0)=\frac{-3}{2}$

$x=3$ --> $g(3)=0$

No nos piden los puntos de corte de las funciones entre sí, por lo que el boceto resulta:



b) El área encerrada por ambas gráficas en el intervalo $[1,3]$ será la integral definida entre la función superior menos la función inferior del boceto del apartado anterior:

$$Área=\int_1^3 \left(\ln(x+2)-\frac{1}{2}(x-3)\right)dx$$

Resolvemos en primer lugar la integral indefinida, y luego aplicamos los límites de integración.

$$I=\int \ln(x+2)\,dx-\frac{1}{2}\int x\,dx+\frac{3}{2}\int dx=\int \ln(x+2)\,dx-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x$$

La integral del logaritmo la resolvemos aplicando partes:

$$u(x)=\ln(x+2) \quad \text{-->} \quad u'=\frac{1}{x+2}$$

$$v'(x)=1 \quad \text{-->} \quad v=x$$

$$\int \ln(x+2)\,dx=x\ln|x+2|-\int \frac{x}{x+2}dx$$

Realizamos cociente de polinomios en la integral que nos queda, o bien razonamos:

$$\int \frac{x}{x+2}dx=\int \frac{x+2-2}{x+2}dx=\int \frac{x+2}{x+2}dx-\int \frac{2}{x+2}dx=x-2\ln|x+2|$$

Por lo tanto:

$$\int \ln(x+2)\,dx=x\ln|x+2|-x+2\ln|x+2|$$

Y la integral indefinida resulta:

$$I=x\ln|x+2|-x+2\ln|x+2|-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x+C$$

Para obtener el área aplicamos la regla de Barrow:

$\int_a^b f(x)\,dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$, siendo $F(x)$ primitiva de $f(x)$

$$Área=\left[x\ln|x+2|-x+2\ln|x+2|-\frac{1}{4}x^2+\frac{3}{2}x\right]_1^3$$

$$Área=3\ln(5)-3+2\ln(5)-\frac{1}{4}\cdot 9+\frac{3}{2}\cdot 3-\left(\ln(3)-1+2\ln(3)-\frac{1}{4}+\frac{3}{2}\right)$$

$$Área=5\ln(5)-3+\frac{9}{4}-\left(3\ln(3)-1+\frac{5}{4}\right)=5\ln(5)-3\ln(3)-2+\frac{4}{4}=5\ln(5)-3\ln(3)-1\simeq 3{,}75\ u^2$$

Modelo 18. Opción B. Ejercicio 3

Dadas las matrices $A=\begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}$ **,** $X=\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 2m^2-1 \\ m \\ 1 \end{pmatrix}$ **, considera el sistema de ecuaciones lineales dado por** $X^t A=B^t$ **. Discútelo según los distintos valores de** m **.**

En primer lugar, aplicamos traspuesta:

$$X^t=\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \quad , \quad B^t=\begin{pmatrix} 2m^2-1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 2-m & 1 & 2m-1 \\ 1 & m & 1 \\ m & 1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2m^2-1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

¡Ojito! No mezcles el orden al multiplicar matrices. Y el resultado del producto de matrices del término d ela izquierda es una matriz de 1 fila y 3 columnas.

$$\begin{pmatrix} (2-m)x+y+mz & x+my+z & (2m-1)x+y+z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2m^2-1 & m & 1 \end{pmatrix}$$

Dos matrices son iguales si sus coeficiente son iguales. Por lo tanto, igualamos coeficientes y llegamos al sistema:

$$\begin{Bmatrix} (2-m)x+y+mz=2m^2-1 \\ x+my+z=m \\ (2m-1)x+y+z=1 \end{Bmatrix}$$

Vamos a resolver por Gauss, por lo que planteamos notación matricial del sistema.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-m & 1 & m & 2m^2-1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 2m-1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

Intercambiamos la posición de las columnas 1 y 3: $C_1 \Leftrightarrow C_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 2-m & 2m^2-1 \\ 1 & m & 1 & m \\ 1 & 1 & 2m-1 & 1 \end{array}\right)$$

$F'_2 = mF_2 - F_1$ (ojo: $m=0$ inhabilita Gauss), $F'_3 = F_3 - F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 1 & 2-m & 2m^2-1 \\ 0 & m^2-1 & 2m-2 & 1-m^2 \\ 0 & 1-m & 2m-2 & 1-m \end{array}\right)$$

Intercambiamos la columna 2 y ala columna 3: $C_2 \Leftrightarrow C_3$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 2-m & 1 & 2m^2-1 \\ 0 & 2m-2 & m^2-1 & 1-m^2 \\ 0 & 2m-2 & 1-m & 1-m \end{array}\right)$$

$F'_3 = F_3 - F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} m & 2-m & 1 & 2m^2-1 \\ 0 & 2m-2 & m^2-1 & 1-m^2 \\ 0 & 0 & -m^2-m+2 & -m+m^2 \end{array}\right)$$

Igualamos a cero los coeficientes de la diagonal princial que dependen del parámetro.

$m=0$ (inhabilita una transformación de Gauss, como ya hemos indicado anteriormente)

$2m-2=0 \rightarrow m=1$

$-m^2-m+2=0 \rightarrow m=1 \ , \ m=-2$

Realizamos discursión de casos.

Si $m=0$ → Sustituimos este valor antes de la transformación no permitida de Gauss

$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right)$ → El determinante de la matriz del sistema es: $|A|=0+1+2-(0+0-1)=4\neq 0$

Por lo tanto, el rango de la matriz del sistema es 3, y eso implica que el rango de la matriz ampliada también es 3. Por el Teorema de Rouché-Frobenius, al coincidir el rango de ambas matrices y ser igual al número de incógnitas, estamos ante Sistema Compatible Determinado de solución única.

Si $m=1$ → Sustituimos en la matriz final de Gauss

$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ → Queda una única ecuación no nula tras aplicar Gauss, sin absurdos matemáticos

Al tener 3 incógnitas, estamos ante Sistema Compatible Indeterminado con 2 parámetros libres. Infinitas soluciones.

Si $m=-2$ → Sustituimos en la matriz final de Gauss

$\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 4 & 1 & 7 \\ 0 & -6 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 6 \end{array}\right)$ → En la tercera fila aparece un absurdo: $0=6$

Sistema Incompatible, sin solución

No olvidar el caso complementario: Si $m=\{-2,0,1\}$

Tras aplicar Gauss, eliminar filas proporcionales y comprobar que no hay absurdos matemáticos, quedan tres ecuaciones no nulas y tres incógnitas. Sistema Compatible Determinado, solución única.

Modelo 18. Opción B. Ejercicio 4

Considera el triángulo cuyos vértices son los puntos $A(1,1,0)$, $B(1,0,2)$ y $C(0,2,1)$.
a) [1,25 puntos] Halla el área de dicho triángulo.

b) [1,25 puntos] Calcula el coseno del ángulo en el vértice A .

a) El área de un triángulos se obtiene como la mitad del módulo del producto vectorial de dos vectores con vértice en común.

El producto vectorial da un vector perpendicular al plano formado por los otros dos. Se puede calcular las componentes de este vector con ayuda de un determinante.

$$\vec{AB}=(0,-1,2) \quad , \quad \vec{AC}=(-1,1,1)$$

$$Área=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}| \quad \rightarrow \quad \vec{AB}\times\vec{AC}=\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Aplicamos regla de Sarrus para resolver el determinante:

$$\vec{AB}\times\vec{AC}=-\hat{i}-2\hat{j}+0-(\hat{k}+2\hat{i}+0)=-3\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k} \quad \rightarrow \quad \vec{AB}\times\vec{AC}=(-3,-2,-1)$$

Obtenemos módulo del vector → $|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\sqrt{9+4+1}=\sqrt{14} \quad \rightarrow \quad Área=\frac{1}{2}|\vec{AB}\times\vec{AC}|=\frac{\sqrt{14}}{2}\ u^2$

b) El ángulo del vértice A será un ángulo comprendido entre 0º y 180º que podemos obtener con ayuda del producto escalar. Ojo, no es el ángulo entre dos rectas, sino entre dos vectores; por lo tanto, no aplicamos el valor absoluto al numerador

$$\cos(\hat{A})=\frac{\vec{AB}\cdot\vec{AC}}{|\vec{AB}|\cdot|\vec{AC}|} \quad \rightarrow \quad \cos(\hat{A})=\frac{0-1+2}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{15}} \quad \rightarrow \quad \hat{A}\simeq 75{,}04^{o}$$