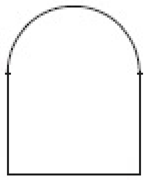
Preparando Selectividad

Solución Selectividad - Modelo 12

Modelo 12. Opción A. Ejercicio 1

Se quiere hacer una puerta rectangular coronada por un semicírculo, como el de la figura. El hueco de la puerta tiene que tener 16 metros cuadrados. Si es posible, determina la base x para que el perímetro sea mínimo. La altura de la parte rectangular es h .



Sea la base $x=2r$, ya que coincide con el diámetro del semicírculo.

Con esto, el perímetro de la puerta será:

$$P=2r+2h+\frac{2\pi r}{2}=2r+2h+\pi r \quad \rightarrow \quad P=(2+\pi)r+2h$$

Esta función perímetro depende de dos variables, que relacionamos con el dato del área de la puerta.

$$16=Área_{rectángulo}+Área_{semicírculo}=2rh+\frac{\pi r^2}{2} \quad \rightarrow \quad h=\frac{32-\pi r^2}{4r}$$

Sustituimos esta relación en el perímetro.

$$P=(2+\pi)r+2\frac{32-\pi r^2}{4r}=(2+\pi)r+\frac{32-\pi r^2}{2r}=(2+\pi)r+\frac{16}{r}-\frac{\pi}{2}r=\frac{4+\pi}{2}r+\frac{16}{r}$$

Y ya tenemos la función de una sola variable a optimizar.

Aplicamos la condición necesaria de extremo relativo: primera derivada nula.

$$P'=\frac{4+\pi}{2}-\frac{16}{r^2} \quad , \quad P'=0 \quad \rightarrow \quad \frac{4+\pi}{2}-\frac{16}{r^2}=0 \quad \rightarrow \quad r=\pm\sqrt{\frac{32}{4+\pi}}=\pm 4\sqrt{\frac{2}{4+\pi}}$$

El extremo que buscamos tiene sentido si es positivo, por tratarse el radio de una distancia. Por lo tanto comprobamos si $r=4\sqrt{\frac{2}{4+\pi}}$ cumple alguna condición suficiente de mínimo de la función perímetro. Para ello evaluamos la segunda derivada en este valor crítico.

$P''=\frac{32}{r^3} \rightarrow P''\left(r=4\sqrt{\frac{2}{4+\pi}}\right)>0 \rightarrow r=4\sqrt{\frac{2}{4+\pi}}$ minimiza la función prímetro.

Como $x=2r \rightarrow r=8\sqrt{\frac{2}{4+\pi}}\simeq 4{,}23\,m$

Modelo 12. Opción A. Ejercicio 2

Considere la región limitada por las curvas $y=x^2$ e $y=-x^2+4x$.
a) Esboza la gráfica de la región dada, hallando los puntos de corte de ambas curvas.

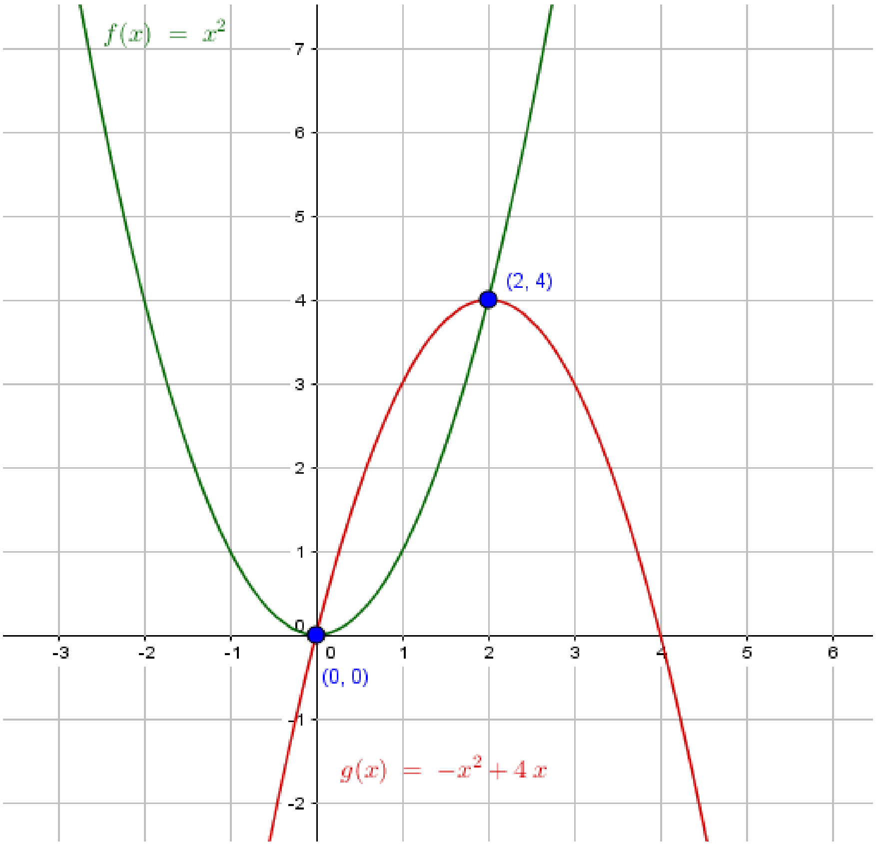
b) Expresa el área como una integral.

c) Calcula el área.

a) La gráfica de la función $y=x^2$ es bien conocida. Es cóncava hacia arriba en toda la recta real, con un mínimo relativo y absoluto en el origen de coordenadas.

La gráfica de $y=-x^2+4x$ es cóncava hacia abajo en toda la recta real. Sus puntos de corte con el eje horizontal son $-x^2+4x=0 \rightarrow x=0$, $x=4 \rightarrow (0,0)$, $(4,0)$. Su máximo relativo y absoluto aparece en $y'=0 \rightarrow -2x+4=0 \rightarrow x=2 \rightarrow (2,4)$.

Los cortes entre ambas curvas los obtenemos igualando sus ecuaciones → $x^2=-x^2+4x \rightarrow x=0$, $x=2$.



b) El área encerrada por ambas curvas será igual a la integral definida entre los límites de integración $x=0$ y $x=2$, de la curva superior menos la curva inferior. Es decir.

$$A=\int_0^2 [(-x^2+4x)-(x^2)]\,dx=\int_0^2 (-2x^2+4x)\,dx$$

c) $A=\int_0^2 (-2x^2+4x)\,dx=-2\int_0^2 x^2\,dx+4\int_0^2 x\,dx=-2\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2+4\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2$

Que resolvemos aplicando la regla de Barrow → $\int_a^b f(x)\,dx=F(b)-F(a)$, siendo $F(x)$ una primitiva de la función $f(x)$.

$$A=-2\left[\frac{8}{3}-0\right]+4\left[\frac{4}{2}-0\right]=\frac{-16}{3}+8=\frac{8}{3}u^2$$

Modelo 12. Opción A. Ejercicio 3

Considera $A=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}$ **y** $X=\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}$

a) Determina los valores de λ para los que la matriz $A+\lambda I$ no tiene inversa (I es la matriz identidad).

b) Resuelve $A\,X=-3\,X$. Determina, si existe, alguna solución con $x=1$.

a) Operamos matricialmente.

$$A+\lambda I=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\lambda & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+\lambda & -2 & 0\\ -2 & 1+\lambda & 0\\ 0 & 0 & -2+\lambda\end{pmatrix}$$

Una matriz admite inversa si y solo si su determinante es distinto de cero. Por lo tanto:

$$|A+\lambda I|=(-2+\lambda)(1+\lambda)(-2+\lambda)-4(-2+\lambda)$$

Sacamos factor común e igualamos a cero.

$$(-2+\lambda)[(1+\lambda)(-2+\lambda)-4]=0$$

En un producto igualado a cero, al menos uno de los términos debe anularse. Es decir:

$$(-2+\lambda)=0 \;\rightarrow\; \lambda=2$$

$$[(1+\lambda)(-2+\lambda)-4]=0 \;\rightarrow\; \lambda^2-\lambda-6=0 \;\rightarrow\; \lambda=-2 \;\;,\;\; \lambda=3$$

En conclusión. Existe inversa siempre y cuando se cumpla que $\lambda\neq-2$, $\lambda\neq2$ y $\lambda\neq3$

b) Operamos e igualamos.

$$A\,X=\begin{pmatrix}-2 & -2 & 0\\ -2 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x-2y\\ -2x+y\\ -2z\end{pmatrix} \quad , \quad -3X=-3\cdot\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3x\\ -3y\\ -3z\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2x-2y \\ -2x+y \\ -2z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3x \\ -3y \\ -3z \end{pmatrix}$$

Dos matrices son iguales si sus coeficientes son iguales, por lo que obtenemos un sistema 3x3.

$$\left\{\begin{matrix} -2x-2y=-3x \\ -2x+y=-3y \\ -2z=-3z \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{De la tercera ecuación} \rightarrow \quad z=0$$

De las dos primeras ecuaciones:

$$\left\{\begin{matrix} x-2y=0 \\ -2x+4y=0 \end{matrix}\right\}$$

La segunda ecuación es -2 veces la primera, por lo que podemos obviarla.

$x-2y=0 \rightarrow x=2y$ → Una incógnita será un parámetro libre. Por ejemplo: $y=\alpha$. De esta forma, tenemos un sistema compatible indeterminado con un parámetro libre. Sus infinitas soluciones son:

$$\left\{\begin{matrix} x=2\alpha \\ y=\alpha \\ z=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{Si} \quad \alpha=\frac{1}{2} \rightarrow \left\{\begin{matrix} x=1 \\ y=\frac{1}{2} \\ z=0 \end{matrix}\right\} \rightarrow \text{solución general con} \quad x=1$$

Modelo 12. Opción A. Ejercicio 4

Considera el punto $P(1,-1,0)$ **y la recta** $r:\left\{\begin{matrix} x=1+3t \\ y=-2 \\ z=t \end{matrix}\right\}$ **.**

a) Determinar la ecuación del plano que pasa por P **y contiene a** r **.**

b) Halla las coordenadas del punto simétrico de P **respecto de** r **.**

a) La determinación lineal del plano afirma que un plano queda definido de manera única con un punto perteneciente al plano y dos vectores linealmente independientes y paralelos al plano.

El punto nos lo da el enunciado: $P(1,-1,0)$

Si el plano contiene a la recta del enunciado, su vector director será paralelo al plano: $\vec{u}_r=(3,0,1)$

El segundo vector podemos formarlo con el vector $\vec{AP}$, donde $A\in r$. Mirando la ecuación paramétrica de la recta, ese punto puede ser: $A(1,-2,0) \rightarrow \vec{AP}=(0,1,0)$.

Comprobamos que ambos vectores son independientes dividiendo las respectivas componentes entre si y verificando que no son vectores proporcionales → $\frac{3}{0}\neq\frac{0}{1}\neq\frac{1}{0}$

Igualando a cero determinante asociado a la determinación lineal del plano, obtendremos la ecuación general del plano solución:

$$\begin{vmatrix} 0 & 3 & x-1 \\ 1 & 0 & y+1 \\ 0 & 1 & z \end{vmatrix}=0 \rightarrow (x-1)-(3z)=0 \rightarrow \Pi: x-3z-1=0$$

b) Sea $P(1,-1,0)$ y $P'(x,y,z)$ su simétrico respecto la recta r .

Consideramos un punto arbitrario de la recta, cuyas componentes coinciden con las componentes paramétricas de la recta. Es decir: $B(1+3t,-2,t)\in r$.

Formamos el vector $\vec{BP}=(-3t,1,-t)$. El punto B será el punto medio del segmento $\overline{PP'}$ siempre que el vector $\vec{BP}$ y el vector director de la recta $\vec{u}_r=(3,0,1)$ sean perpendiculares.

Dos vectores perpendiculares cumplen que su producto escalar es nulo. Por lo tanto:

$$\vec{BP}\cdot\vec{u}_r=0 \rightarrow (-3t,1,-t)\cdot(3,0,1)=0 \rightarrow -9t+0-t=0 \rightarrow t=0$$

De donde concluimos que $B=(1,-2,0)$. Recordamos que las coordenadas del punto medio de un segmento se obtiene como la semisuma de las coordenadas de los extremos. Es decir:

$$(1,-2,0)=\left(\frac{x+1}{2},\frac{y-1}{2},\frac{z-0}{2}\right)$$

Igualamos componentes → $x=1$, $y=-3$, $z=0$ → $P'(1,-3,0)$ es el punto solución.

Modelo 12. Opción B. Ejercicio 1

Sea la función definida por $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$ **para** $x\neq 1$ **.**

a) Estudia y determina las asíntotas de la gráfica de la función.

b) Estudia y determina los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

a) Los candidatos a asíntotas verticales son valores que anulan al denominador. Es decir, $x=1$.

$\lim_{x\to 1}\frac{x^2}{x-1}=\infty$ → Hacemos límites laterales → $\lim_{x\to 1^-}\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{0^-}=-\infty$, $\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2}{x-1}=\frac{1}{0^+}=+\infty$

Por lo tanto $x=1$ es una asíntota vertical. Por definición, la asíntota horizontal existe si el siguiente límite es finito:

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1}=\infty$ → Ya que el grado del polinomio del numerador es mayor que el grado del polinomio del denominador → Por lo tanto no existe asíntora horizontal, por lo que podemos tener oblicua del tipo $y=mx+n$, que calculamos de la forma:

$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x^2-x}=\frac{1}{1}=1$ → Como el grado de los polinomios del numerador y del denominador coincide, el límite converge al cociente de coeficientes que acompañan a la máxima potencia.

$n=\lim_{x\to\infty}[f(x)-mx]=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2}{x-1}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x-1}=\frac{1}{1}=1$ → Donde nuevamente los grados de los polinomios en el numerador y en el denominador coinciden. La asíntota oblicua resulta → $y=x+1$

b) La monotonía la estudiamos con la primera derivada.

$$f(x)=\frac{x^2}{x-1} \quad\to\quad f'(x)=\frac{2x(x-1)-x^2}{(x-1)^2}=\frac{x^2-2x}{(x-1)^2}$$

La condición necesaria de extremo relativo es primera derivada igual a cero, por lo que:

$f'(x)=0 \rightarrow x^2-2x=0 \rightarrow x=0 \;,\; x=2$ → Puntos críticos

Evaluamos la primera derivada en los intervalos formados en la recta real al considerar los puntos críticos y los puntos donde la función no está definidad: $x=0$, $x=1$, $x=2$.

$(-\infty,0) \rightarrow f'(-100)>0 \rightarrow f(x)$ creciente

$(0,1) \rightarrow f'(\frac{1}{2})<0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$(1,2) \rightarrow f'(\frac{3}{2})<0 \rightarrow f(x)$ decreciente

$(2,\infty) \rightarrow f'(100)>0 \rightarrow f(x)$ creciente

En consecuencia $x=0$ es un máximo relativo de imagen $f(0)=0 \rightarrow (0,0)$.

Y $x=2$ es un mínimo relativo de imagen $f(2)=4 \rightarrow (2,4)$.

Modelo 12. Opción B. Ejercicio 2

Calcula $\int_1^{16} \frac{d\,x}{\sqrt{x}+\sqrt[4]{x}}$ **(sugerencia:** $t=\sqrt[4]{x}$ **)**

Diferenciamos el cambio de variable → $t=x^{1/4} \rightarrow dt=\frac{1}{4}\cdot x^{-3/4}dx \rightarrow 4\cdot x^{3/4}dt=dx$

Si $t=x^{1/4} \rightarrow t^3=x^{3/4}$ → Por lo tanto $4\cdot t^3 dt=dx$

Si $t=x^{1/4} \rightarrow t^2=x^{1/2}$

Llevamos todos estos resultados a la integral definida.

$$\int_1^{16}\frac{4t^3}{t^2+t}dt=4\int_1^{16}\frac{t^3}{t^2+t}dt=4\int_1^{16}\frac{t^2}{t+1}dt$$

Tenemos un cociente de polinomios, con grado del numerador mayor que el grado del numerador, por lo que debemos realizar la división de polinomios.

$$\frac{t^2}{t+1}=t-1+\frac{1}{t+1}$$

$$4\int_1^{16}[t-1+\frac{1}{t+1}]dt=4[\int_1^{16}t\,dt-\int_1^{16}dt+\int_1^{16}\frac{1}{t+1}dt]=4[[\frac{t^2}{2}]_1^{16}-[t]_1^{16}+[\ln|1+t|]_1^{16}]$$

Que resolvemos aplicando la regla de Barrow → $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$, siendo $F(x)$ una primitiva de la función $f(x)$. Pero antes de evaluar por Barrow, deshacemos el cambio de variable $t=\sqrt[4]{x}$.

$$4[[\frac{\sqrt{x}}{2}]_1^{16}-[\sqrt[4]{x}]_1^{16}+[\ln|1+\sqrt[4]{x}|]_1^{16}]=4[(\frac{4}{2}-\frac{1}{2})-(2-1)+(\ln|3|-\ln|2|)]=4[\frac{1}{2}+\ln(\frac{3}{2})]=2+4\ln(\frac{3}{2})$$

Modelo 12. Opción B. Ejercicio 3

Sabemos que el coste de 3 lápices, 1 rotulador y 2 carpetas es de 15€, mientras que el de 2 lápices, 4 rotuladores y 1 carpeta es de 20€.
a) Sabiendo que 1 lápiz y 7 rotuladores cuestan 25€, ¿podemos deducir el precio de cada uno de los artículos? Razona tu respuesta.

b) Si por el precio de una carpeta se pueden comprar 10 lápices, ¿cuánto cuesta cada uno de los artículos?

a) Llamaremos al precio de un lápiz L, al precio de un rotulador R y al precio de una carpeta C. Por lo que las dos ecuaciones primeras del enunciado resultan:

$$\begin{Bmatrix} 3L+R+2C=15 \\ 2L+4R+C=20 \end{Bmatrix} \rightarrow \text{Si añadimos la tercera condición} \rightarrow \begin{Bmatrix} 3L+R+2C=15 \\ 2L+4R+C=20 \\ L+7R=25 \end{Bmatrix}$$

O bien resolvemos por Gauss o bien nos damos cuenta que $F_3=2F_2-F_1$ → Podemos obviar la tercera ecuación, por ser combinación lineal de las otras dos.

$\begin{Bmatrix} 3L+R+2C=15 \\ 2L+4R+C=20 \end{Bmatrix}$ → Las dos ecuaciones no son proporcionales, por lo que tendremos un parámetro libre. Por ejemplo, $C=\lambda$. El sistema resulta:

$\begin{Bmatrix} 3L+R=15-2\lambda \\ 2L+4R=20-\lambda \end{Bmatrix} \rightarrow F_1'=-4F_1 \rightarrow \begin{Bmatrix} -12L-4R=-60+8\lambda \\ 2L+4R=20-\lambda \end{Bmatrix}$ → Sumamos ambas ecuaciones → $-10L=-40+7\lambda \rightarrow L=4-\frac{7}{10}\lambda$

Y el precio del rotulador podremos escribirlo como → $3\left(4-\frac{7}{10}\lambda\right)+R=15-2\lambda \rightarrow R=3+\frac{1}{10}\lambda$

Es decir, tenemos un sistema compatible indeterminado, con infinitas soluciones dependientes del parámetro libre.

$\begin{Bmatrix} L=4-\frac{7}{10}\lambda \\ R=3+\frac{1}{10}\lambda \\ C=\lambda \end{Bmatrix}$ → Los precios no están definidos de manera única. Dependen de un parámetro libre.

b) El nuevo sistema que tendremos es → $\left\{\begin{array}{c} 3L+R+2C=15 \\ 2L+4R+C=20 \\ C=10L \end{array}\right\}$

Llevamos el resultado $C=10L$ a las dos primeras ecuaciones → $\left\{\begin{array}{c} 23L+R=15 \\ 12L+4R=20 \end{array}\right\}$ → $F_1'=-4F_1$ → $\left\{\begin{array}{c} -92L-4R=-60 \\ 12L+4R=20 \end{array}\right\}$ → Sumamos ambas ecuaciones → $-80L=-40$ → El precio de un lápiz resulta $L=0{,}5€$.

El precio del rotulador es → $R=15-23L$ → $R=3{,}5€$.

El precio del cuaderno es → $C=10L$ → $C=5€$

En esta ocasión sí podemos determinar de manera única el precio de los tres artículos.

Modelo 12. Opción B. Ejercicio 4

Sean los vectores $\vec{u}=(1,0,1)$, $\vec{v}=(0,2,1)$, $\vec{w}=(m,1,n)$.
a) Halla m y n sabiendo que los tres vectores son linealmente dependientsy que $\vec{w}$ es ortogonal a $\vec{u}$.

b) Para n=1, halla los valores de m para que el tetraedro determinado por los tres vectores tenga volumen 10 unidades cúbicas.

a) Tres vectores linealmente dependientes no tienen rango igual a 3. Por lo tanto, el determinante formado por los tres vectores debe anularse.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ m & 1 & n\end{pmatrix} \rightarrow |A|=0 \rightarrow 2n+0+0-(2m+0+1)=0 \rightarrow 2n-2m=1$$

Una segunda condición la sacamos de los vectores que son ortogonales entre sí, es decir, que son perpendiculares. El producto escalar de dos vectores perpendiculares es igual a 0.

$$\vec{u}\cdot\vec{w}=0 \rightarrow (1,0,1)\cdot(m,1,n)=0 \rightarrow m+n=0 \rightarrow m=-n$$

Con ambas condiciones tenemos un sistema 2x2. Llevamos $m=-n$ a la primera condición.

$$2n-2m=1 \rightarrow 4n=1 \rightarrow n=\frac{1}{4} \ , \ m=\frac{-1}{4}$$

b) El volumen de un tetraedro es un sexto del valor absoluto del producto mixto de los tres vectores.

$$V=\frac{1}{6}|\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})|$$

El producto mixto podemos obtenerlo de forma directa mediante el siguiente determinante:

$$\vec{u}\cdot(\vec{v}\times\vec{w})=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 1\\ m & 1 & 1\end{vmatrix}=2-(2m+1)=1-2m$$

Por lo tanto:

$$10=\frac{1}{6}|1-2m| \quad \rightarrow \quad 60=|1-2m|$$

Es una ecuación con valor asboluto, por lo que debo considerar la opción positiva y la opción negativa en argumento del valor absoluto.

$$60=1-2m \quad \rightarrow \quad m=\frac{-59}{2}$$

$$60=2m-1 \quad \rightarrow \quad m=\frac{61}{2}$$