

Preparando Selectividad

Solución Selectividad - Modelo 11

Modelo 11. Opción A. Ejercicio 1

Sabiendo que $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1) - a \operatorname{sen}(x) + x \cos(3x)}{x^2}$ es finito, calcula a y el valor del límite.

Evaluamos en el límite y obtenemos indeterminación $\frac{0}{0}$. Podemos aplicar la regla de L'Hôpital, válida para indeterminaciones $\frac{0}{0}$ ó $\frac{\infty}{\infty}$, ya que se cumplen las siguientes condiciones:

Sean $f(x)$ y $g(x)$ dos funciones continuas en un entorno cerrado arbitrario alrededor de x_0 , es decir $[x_0 - \delta, x_0 + \delta]$ con $\delta > 0$. Sean además las dos funciones derivables en $\{(x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}\}$, tales que $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = 0$ ó $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = \infty$.

Sea $g'(x) \neq 0, \forall x \in \{(a, b) - \{x_0\}\}$.

Entonces, si existe $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ también existe $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$ y los límites son iguales. Es decir:

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

El resultado final del límite puede ser un valor $L \in \mathbb{R}$ o infinito. Y el valor x_0 puede ser un valor finito o infinito.

Por lo tanto, derivamos numerador y denominador.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1} - a \cos(x) + \cos(3x) - 3x \operatorname{sen}(3x)}{2x} = \frac{1 - a + 1 - 0}{0} = \frac{2 - a}{0}$$

Si el numerador es no nulo, el límite se disparará a infinito. Para conseguir que sea finito, debemos buscar una nueva indeterminación $\frac{0}{0}$. Por lo tanto $\rightarrow 2 - a = 0 \rightarrow a = 2$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+1} - 2 \cos(x) + \cos(3x) - 3x \operatorname{sen}(3x)}{2x} = \frac{0}{0}$$

Aplicamos nuevamente L'Hôpital, derivando numerador y denominador.

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{(x+1)^2} + 2 \operatorname{sen}(x) - 3 \operatorname{sen}(3x) - 3 \operatorname{sen}(3x) - 9x \cos(3x)}{2} = \frac{-1+0-0-0-0}{2} = \frac{-1}{2}$$

El límite resulta , finalmente, $L = \frac{-1}{2}$ cuando $a = 2$

Modelo 11. Opción A. Ejercicio 2

Halla la ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función $f(x)$ en el punto de abscisa $x=1$ sabiendo que $f(0)=0$ y $f'(x)=\frac{(x-1)^2}{x+1}$ para $x>-1$.

La ecuación punto-pendiente de una recta de pendiente m que pasa por el punto (x_0, y_0) es:

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0}$$

Como la recta buscada es tangente a la función en $x=1$, la pendiente de la recta será igual a la derivada de la función evaluada en $x=1 \rightarrow f'(1) = \frac{(1-1)^2}{1+1} = 0 \rightarrow m=0$.

Si $x_0=1$ entonces $y_0=f(1)$, ya que la función y la recta tangente coinciden en el punto $(1, f(1))$.

Para obtener el valor de la imagen $f(1)$ debemos integrar la función derivada $f'(x) = \frac{(x-1)^2}{x+1}$, para conseguir la función primitiva $f(x)$. La constante de integración inherente al proceso de integración podemos determinarla gracias a la condición del enunciado $f(0)=0$.

$$f(x) = \int \frac{(x-1)^2}{x+1} dx = \int \frac{x^2 - 2x + 1}{x+1} dx$$

Tenemos un cociente de polinomios. Al ser el grado del numerador mayor que el grado del denominador, realizamos la división.

$$\frac{\text{Dividendo}}{\text{divisor}} = \text{Cociente} + \frac{\text{Resto}}{\text{divisor}} \rightarrow \frac{x^2 - 2x + 1}{x+1} = x - 3 + \frac{4}{x+1}$$

$$f(x) = \int (x-3) dx + \int \frac{4}{x+1} dx = \frac{x^2}{2} - 3x + 4 \ln|x+1| + C$$

La constante de integración queda definida de manera única con la condición $f(0)=0 \rightarrow C=0$

$$f(x) = \frac{x^2}{2} - 3x + 4 \ln|x+1|$$

Una vez obtenida la función primitiva, podemos calcular $f(1)$

$$f(1) = \frac{1}{2} - 3 + 4 \ln|2| = \frac{-5}{2} + 4 \ln(2) \simeq 0,27$$

La recta tangente a la función en $x=1$ resulta una recta horizontal (pendiente nula).

$$m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \rightarrow 0 = \frac{y - f(1)}{x - 1} \rightarrow y = f(1) \rightarrow y \simeq 0,27$$

Modelo 11. Opción A. Ejercicio 3

Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix}$

a) Halla la matriz X que verifica $AX+B=2A$.

b) Calcular B^2 y B^{2016} .

$$a) \quad AX+B=2A \rightarrow AX=2A-B \rightarrow A^{-1}AX=A^{-1}(2A-B) \rightarrow X=A^{-1}(2A-B)$$

Donde hemos aplicado matriz inversa de A a la izquierda de cada miembro de la igualdad, y recordado que una matriz multiplicada por su inversa es igual a la matriz identidad.

La matriz A admite inversa siempre que su determinante sea distinto de cero. En efecto:

$$|A| = -1+0+0 - (-2+0+0) = 1 \neq 0 \rightarrow \exists A^{-1}$$

Vamos a obtener la matriz inversa por el método de Gauss-Jordan.

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow F'_3 = F_3 - 2F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow F'_3 = F_3 + F_2 \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow F'_1 = F_1 + F_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow F'_1 = F_1 - F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 1 \end{array} \right) \rightarrow F'_1 = -F_1, \quad F'_3 = -F_3 \rightarrow \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & -1 \end{array} \right) \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

En efecto, se comprueba que $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, siendo I la matriz identidad de orden tres.

$$2A - B = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \\ -4 & 2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 8 & -5 & -4 \\ -12 & 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Y la matriz incógnita resulta:

$$X = A^{-1}(2A - B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 8 & -5 & -4 \\ -12 & 8 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 & -9 & -5 \\ 8 & -5 & -4 \\ 6 & -5 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } B^2 = \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3 & 3 & 2 \\ -8 & 7 & 4 \\ 8 & -6 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow B^2 = I$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = I \cdot B = B$$

Donde recordamos que el producto de una matriz cuadrada por la matriz identidad, resulta la misma matriz.

$$B^4 = B^3 \cdot B = B \cdot B = B^2 = I$$

$$B^3 = B^2 \cdot B = I \cdot B = B$$

$$B^4 = B^3 \cdot B = B \cdot B = B^2 = I$$

En general:

$$\text{Si } n = \text{impar} \rightarrow B^n = B$$

$$\text{Si } n = \text{par} \rightarrow B^n = I$$

$$\text{Como } 2016 \text{ es par} \rightarrow B^{2016} = I$$

Modelo 11. Opción A. Ejercicio 4

Sea el punto $P(1,0,5)$ y la recta $r: \begin{cases} y+2z=0 \\ x=1 \end{cases}$.

- a) Determinar la ecuación del plano que pasa por P y es perpendicular a r .
- b) Calcula la distancia de P a la recta r y el punto simétrico de P respecto a r .

a) Si el plano es perpendicular a la recta, el vector director de la recta será perpendicular al plano. Y con un vector normal al plano y un punto del plano, podemos obtener directamente la ecuación general del plano.

$$r: \begin{cases} y+2z=0 \\ x=1 \end{cases} \rightarrow \text{pasamos a paramétricas} \rightarrow r: \begin{cases} x=1 \\ y=-2\lambda \\ z=\lambda \end{cases} \rightarrow \vec{u}_r=(0,-2,1)$$

$$\Pi: Ax+By+Cz+D=0 \rightarrow \Pi: -2y+z+D=0$$

$$\text{Si } P(1,0,5) \in \Pi \rightarrow 0+5+D=0 \rightarrow D=-5 \rightarrow \Pi: -2y+z-5=0$$

b) Sea $P(1,0,5)$ y sea $Q(1,-2\lambda,\lambda)$ un punto genérico de la recta r , cuyas coordenadas tomamos de la ecuación de la recta en paramétricas.

La distancia del punto P a la recta r será el módulo del vector \vec{PQ} siempre que este vector sea perpendicular al vector director de la recta. Y dos vectores perpendiculares cumplen que su producto escalar es nulo.

$$\vec{PQ}=(0,-2\lambda,\lambda-5) \rightarrow \vec{PQ} \cdot \vec{u}_r=0 \rightarrow 0+4\lambda+\lambda-5=0 \rightarrow \lambda=1 \rightarrow \vec{PQ}=(0,-2,-4)$$

$$d(P,r)=|\vec{PQ}|=\sqrt{0+(-2)^2+(-4)^2}=\sqrt{20} \text{ u}$$

Para $\lambda=1$ se cumple que el punto $Q(1,-2,1) \in r$ es el punto medio del segmento $\overline{PP'}$, siendo $P'(x,y,z)$ el punto simétrico de $P(1,0,5)$ respecto la recta r . Por lo tanto:

$$(1,-2,1)=\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y}{2}, \frac{z+5}{2}\right) \rightarrow \text{Igualo componentes} \rightarrow x=1, y=-4, z=-3 \rightarrow P'(1,-4,-3)$$

Modelo 11. Opción B. Ejercicio 1

Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$.

a) Determina las asíntotas de la gráfica de la función. Calcula los puntos de corte de dichas asíntotas con la gráfica.

b) Halla los intervalos de crecimiento y decrecimiento y los extremos relativos de la función (abscisas donde se obtienen y valores que se alcanzan).

c) Esboza la gráfica de la función.

a) El denominador nunca se anula, por lo que el dominio de la función son todos los reales por ser cociente de polinomios. En consecuencia, no tendremos asíntotas verticales.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x}{x^2+1} = 0 \rightarrow \text{Ya que el grado del denominador es mayor que el grado del numerador}$$

$y=0$ → Es una asíntota horizontal de la función

Al existir asíntota horizontal, tenemos garantía de que no existen asíntotas oblicuas.

La única asíntota que tenemos $y=0$ corta a la gráfica de la función en $\rightarrow \frac{x}{x^2+1} = 0 \rightarrow (0,0)$

b) Para estudiar la monotonía y los extremos, realizamos la derivada.

$$f'(x) = \frac{x^2+1 - x \cdot 2x}{x^2+1} = \frac{1-x^2}{x^2+1}$$

La condición necesaria de extremo relativo es $f'(x) = 0 \rightarrow 1-x^2 = 0 \rightarrow x = \pm 1$

Para determinar el crecimiento, decrecimiento y la existencia de extremos, evaluamos el signo de la primera derivada en los siguientes intervalos.

$$(-\infty, -1) \rightarrow f'(-10) < 0 \rightarrow f(x) \text{ decreciente}$$

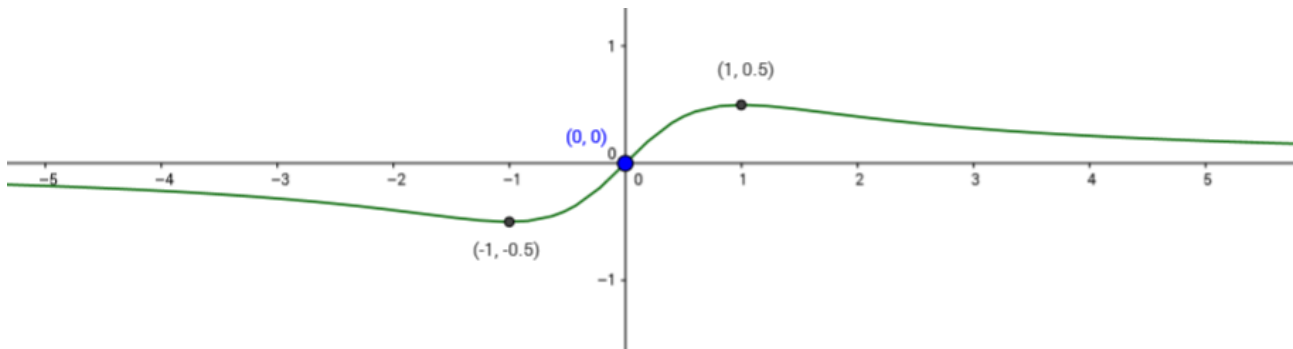
$$(-1, 1) \rightarrow f'(0) > 0 \rightarrow f(x) \text{ creciente}$$

$$(1, \infty) \rightarrow f'(10) < 0 \rightarrow f(x) \text{ decreciente}$$

En $x = -1$ tenemos un mínimo relativo de imagen $f(-1) = \frac{-1}{2} \rightarrow (-1, -\frac{1}{2})$

En $x = 1$ tenemos un máximo relativo de imagen $f(1) = \frac{1}{2} \rightarrow (1, \frac{1}{2})$

c) Sabemos que la función, en el infinito, tiende a la asíntota horizontal $y = 0$. Sabemos que pasa por el origen de coordenadas, hemos estudiado sus intervalos de crecimiento, sus extremos y presenta simetría impar ya que $f(x) = -f(-x)$ (simetría respecto al origen de coordenadas).



Modelo 11. Opción B. Ejercicio 2

Sea $f : (0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $f(x) = \ln(x)$.

- a) Calcula la ecuación de la recta tangente a la gráfica de la función en el punto de abscisa $x=1$.
- b) Esboza el recinto comprendido entre la gráfica de la función, la recta $y=x-1$ y la recta $x=3$. Calcula su área.

a) La recta tangente a la función en $x=1$ tendrá pendiente igual a la derivada evaluada en dicho punto.

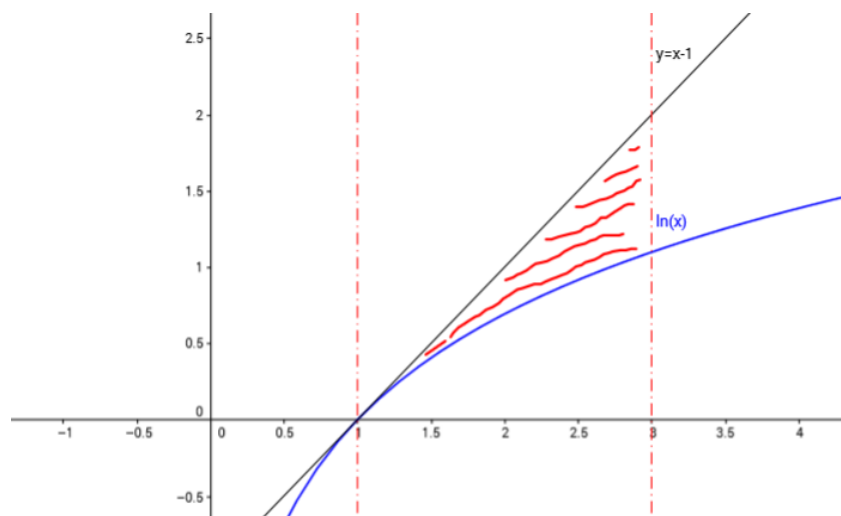
$$f'(x) = \frac{1}{x} \rightarrow f'(1) = 1$$

La imagen de $x=1 \rightarrow f(1) = \ln(1) = 0 \rightarrow (1, 0)$

$$\text{Ecuación punto-pendiente de la recta} \rightarrow m = \frac{y - y_0}{x - x_0} \rightarrow 1 = \frac{y - 0}{x - 1} \rightarrow y = x - 1$$

b) Nos piden obtener el recinto generado por la recta tangente calculada en el apartado anterior $y = x - 1$, la función $f(x) = \ln(x)$ y la recta vertical $x = 3$.

Si en $x=1$ la recta es tangente a la función, ya tendremos un punto de intersección entre ambas curvas. Sabemos que la gráfica del logaritmo es estrictamente creciente y cóncava hacia abajo en su dominio de definición, por lo que si $y = x - 1$ es tangente a la función en $x=1$, siempre permanece por encima de $f(x) = \ln(x)$. De esta forma el área encerrada será:



El área encerrada coincide con la siguiente integral definida:

$$A = \int_1^3 (x - 1 - \ln(x)) dx$$

Primero resuelvo la integral indefinida.

$$I = \int (x - 1 - \ln(x)) dx = \frac{x^2}{2} - x - \int \ln(x) dx$$

Aplicamos partes para resolver la integral del logaritmo.

$$u = \ln(x) \rightarrow u' = \frac{1}{x}$$

$$v' = 1 \rightarrow v = x$$

$$\int \ln(x) dx = x \ln(x) - \int dx = x \ln(x) - x \rightarrow I = \frac{x^2}{2} - x - x \ln(x) + x + C = \frac{x^2}{2} - x \ln(x) + C$$

Para resolver la integral definida aplicamos la regla de Barrow $\rightarrow \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) \rightarrow$ donde $F(x)$ es una primitiva de $f(x)$.

$$A = \int_1^3 (x - 1 - \ln(x)) dx = \left[\frac{x^2}{2} - x \ln(x) \right]_1^3 = \frac{9}{2} - 3 \ln(3) - \frac{1}{2} + \ln(1) = 4 - 3 \ln(3) \approx 0,704 \quad u^2$$

Modelo 11. Opción B. Ejercicio 3

Sea el sistema de ecuaciones lineales
$$\begin{cases} (3\alpha - 1)x + 2y = 5 - \alpha \\ \alpha x + y = 2 \\ 3\alpha x + 3y = \alpha + 5 \end{cases}$$

a) Discútelo según los valores del parámetro α .

b) Resuélvelo para $\alpha = 1$ y determina en dicho caso, si existe, alguna solución donde $x = 4$.

a) La matriz de coeficientes y la matriz ampliada del sistema resultan:

$$A = \begin{pmatrix} 3\alpha - 1 & 2 \\ \alpha & 1 \\ 3\alpha & 3 \end{pmatrix}, \quad A/C = \left(\begin{array}{cc|c} 3\alpha - 1 & 2 & 5 - \alpha \\ \alpha & 1 & 2 \\ 3\alpha & 3 & \alpha + 5 \end{array} \right)$$

Estudiamos el rango de A . Al ser una matriz rectangular de tres filas y dos columnas, el valor máximo de su rango podrá ser dos. Los tres menores de orden dos de la matriz de coeficientes resultan:

$$\begin{vmatrix} 3\alpha - 1 & 2 \\ \alpha & 1 \end{vmatrix} = 3\alpha - 1 - 2\alpha = \alpha - 1$$

$$\begin{vmatrix} 3\alpha - 1 & 2 \\ 3\alpha & 3 \end{vmatrix} = 9\alpha - 3 - 6\alpha = 3\alpha - 3 = 3(\alpha - 1)$$

$$\begin{vmatrix} \alpha & 1 \\ 3\alpha & 3 \end{vmatrix} = 3\alpha - 3\alpha = 0$$

Discusión de casos:

- Si $\alpha \neq 1 \rightarrow$ existe en A al menos un menor de orden dos no nulo $\rightarrow \text{rango}(A) = 2 \rightarrow$ Estudiamos el rango de la matriz ampliada A/C , que como máximo será tres.

Antes de hacer el determinante de A/C , aplicamos transformaciones lineales para simplificar las operaciones.

$$A/C = \left(\begin{array}{cc|c} 3\alpha - 1 & 2 & 5 - \alpha \\ \alpha & 1 & 2 \\ 3\alpha & 3 & \alpha + 5 \end{array} \right) \rightarrow F'_3 = F_3 - 3F_2 \rightarrow A/C = \left(\begin{array}{cc|c} 3\alpha - 1 & 2 & 5 - \alpha \\ \alpha & 1 & 2 \\ 0 & 0 & \alpha - 1 \end{array} \right)$$

$$|A/C| = (3\alpha - 1)(\alpha - 1) + 0 + 0 - (0 + 0 + 2\alpha(\alpha - 1)) = (\alpha - 1)(3\alpha - 1 - 2\alpha) = (\alpha - 1)^2$$

Como $\alpha \neq 1 \rightarrow |A/C| \neq 0 \rightarrow \text{rango}(A/C) = 3 \neq 2 = \text{rango}(A) \rightarrow$ Por el Teorema de Rouché-Frobenius no existe solución al no coincidir los rangos \rightarrow Sistema Incompatible.

- Si $\alpha = 1 \rightarrow \text{rango}(A) = 1$ al anularse todos los menores de orden dos de A y existir al menos un menor de orden uno no nulo. La matriz ampliada queda:

$$A/C = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & 2 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 3 & 6 \end{array} \right)$$

Las filas de esta matriz ampliada cumplen las siguientes relaciones: $F_1 = 2F_2$ y $F_3 = F_1 + F_2$
 \rightarrow Por lo tanto solo existe una fila (vector) linealmente independiente \rightarrow El rango de la matriz ampliada es igual a 1 $\rightarrow \text{rango}(A/C) = 1 = \text{rango}(A) < 2 = \text{número incógnitas} \rightarrow$ Por el Teorema de Rouché Frobenius estamos ante un Sistema Compatible Indeterminado con un grado de libertad.

b) Para $\alpha = 1$ tenemos un Sistema Compatible Indeterminado con un grado de libertad. Nuestras tres ecuaciones con dos incógnitas pueden quedar reducidas a una única ecuación, ya que como hemos deducido en el apartado anterior las dos primeras filas son proporcionales entre sí, y la tercera fila es combinación lineal de las dos primeras.

Si nos quedamos, por ejemplo, con la segunda ecuación:

$$x + y = 2 \rightarrow \text{Llamando } y = \lambda \text{ como parámetro libre} \rightarrow x = 2 - \lambda$$

Si $\lambda = -2 \rightarrow x = 4 \rightarrow$ La solución general que pide el enunciado resulta $x = 4$, $y = -2$

Modelo 11. Opción B. Ejercicio 4

Sean las rectas $r: \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1 \end{cases}$ y $s: \begin{cases} x+2y=-1 \\ z=-1 \end{cases}$

- a) Comprueba que ambas rectas son coplanarias y halla la ecuación del plano que las contiene.
 b) Sabiendo que dos de los lados de un cuadrado están en ambas rectas, calcula su área.

Dos rectas en el espacio tridimensional son coplanarias si son paralelas, secantes o coincidentes.

Si tomamos un vector director de cada recta, y un tercer vector con origen un punto de r y fin un punto de s , y estudiamos el rango de la matriz formada por esos tres vectores, este rango debe ser distinto de 3 para rectas coplanarias (los tres vectores no pueden ser linealmente independientes).

$$r: \begin{cases} x=1+2\lambda \\ y=1-\lambda \\ z=1 \end{cases} \rightarrow \vec{u}_r = (2, -1, 0)$$

$$s: \begin{cases} x+2y=-1 \\ z=-1 \end{cases} \rightarrow \text{Pasamos a paramétricas} \rightarrow s: \begin{cases} x=-1-2\lambda \\ y=\lambda \\ z=-1 \end{cases} \rightarrow \vec{u}_s = (-2, 1, 0)$$

Es directo que ambos vectores directores son proporcionales $\rightarrow \vec{u}_r = -\vec{u}_s$, por lo tanto necesariamente las rectas serán paralelas o coincidentes, por lo que pertenecerán al mismo plano. Son coplanarias.

Para determinar si son paralelas o coincidentes, podemos obtener el vector \vec{AB} con $A \in r$ y $B \in s$. Por ejemplo, de las ecuaciones paramétricas $\rightarrow A(1, 1, 1)$, $B(-1, 0, -1) \rightarrow \vec{AB} = (-2, -1, -2)$.

Es directo comprobar que \vec{AB} no es proporcional a $\vec{u}_r = (2, -1, 0)$, ya que sus respectivas componentes no cumplen la misma regla de proporción $\rightarrow \frac{2}{-2} \neq \frac{-1}{-1} \neq \frac{0}{-2} \rightarrow \vec{AB}$ y \vec{u}_r son linealmente independientes, por lo que las rectas son paralelas.

Con dos vectores linealmente independientes del plano y un punto del plano, podemos aplicar la determinación lineal del plano para obtener su ecuación general.

$$\Pi(\vec{u}_r, \vec{AB}, B) \rightarrow \begin{vmatrix} 2 & -2 & x+1 \\ -1 & -1 & y \\ 0 & -2 & z+1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow -2(z+1) + 0 + 2(x+1) - (0 - 4y + 2(z+1)) = 0$$

$$2(x+1)+4y-4(z+1)=0$$

$$\Pi: 2x+4y-4z-2=0 \rightarrow \text{Simplificamos} \rightarrow \Pi: x+2y-2z-1=0$$

b) Al ser las rectas paralelas y descansar dos lados del cuadrado sobre ambas rectas, y recordando que un cuadrado tiene sus cuatro lados iguales, la longitud de un lado será igual a la distancia entre ambas rectas. Por lo tanto, el área del cuadrado será $[d(r, s)]^2$.

Para obtener la distancia entre ambas rectas tomamos un punto $A(1,1,1) \in r$ y un punto arbitrario de la recta s a partir de su ecuación paramétrica $\rightarrow Q(-1-2\lambda, \lambda, -1) \in s$.

El vector $\vec{AQ} = (-2-2\lambda, \lambda-1, -2)$ será perpendicular al vector director de la recta s si el producto escalar de ambos vectores es nulo. Y si ambos vectores son perpendiculares, el módulo de \vec{AQ} coincidirá con la distancia que separan ambas rectas.

$$\vec{AQ} \cdot \vec{u}_s = (-2-2\lambda, \lambda-1, -2) \cdot (-2, 1, 0) = 0 \rightarrow 4+4\lambda+\lambda-1+0=0$$

$$5\lambda+3=0 \rightarrow \lambda = \frac{-3}{5} \rightarrow \vec{AQ} = (-2+\frac{6}{5}, \frac{-3}{5}-1, -2) = (\frac{-4}{5}, \frac{-8}{5}, -2)$$

$$d(r, s) = |\vec{AQ}| = \sqrt{\frac{16}{25} + \frac{64}{25} + 4} = \sqrt{\frac{180}{25}} = \sqrt{\frac{36}{5}} = \frac{6}{\sqrt{5}} = \frac{6\sqrt{5}}{5} \text{ u}$$

$$\text{Área del cuadrado solución} \rightarrow A = [d(r, s)]^2 = \frac{36}{5} = 7,2 \text{ u}^2$$