Problemas – Tema 7

Solución a problemas de repaso y ampliación del Tema 5 y Tema 6 - Hoja 08 - Problemas 4, 5

Hoja 8. Problema 4

Resuelto por Javier Vallecillo (abril 2015)

4. Indica si son ortogonales las siguientes matrices.

a) $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ **b)** $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ **c)** $\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

a) Una matriz es ortogonal cuando la inversa coincide con su traspuesta.

$$A=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

$$A\cdot A^{-1}=I \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow \quad \begin{pmatrix} \frac{a\sqrt{3}}{2}+\frac{c}{2} & \frac{b\sqrt{3}}{2}-\frac{d}{2} \\ \frac{a}{2}+\frac{c\sqrt{3}}{2} & \frac{b}{2}+\frac{d\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \rightarrow$$

$\rightarrow$ Igualando componentes:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{a\sqrt{3}}{2}+\frac{c}{2}=1 \\ \frac{b\sqrt{3}}{2}-\frac{d}{2}=0 \\ \frac{a}{2}+\frac{c\sqrt{3}}{2}=0 \\ \frac{b}{2}+\frac{d\sqrt{3}}{2}=1 \end{array}\right\} \rightarrow c=\frac{-1}{2} \quad , \quad a=\frac{\sqrt{3}}{2} \quad , \quad d=\frac{1}{2} \quad , \quad b=\frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Y se cumplento: $A^{-1}=A^{t}$ → La matriz es ortogonal.

b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow A^{-1}=A^{t}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ → Son ortogonales

c) $A=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

$$A\cdot A^{-1}=I \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{a}{2}+\frac{c}{2} & \frac{b}{2}+\frac{d}{2} \\ \frac{-a}{2}+\frac{c}{2} & \frac{-b}{2}+\frac{d}{2} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow$$

→ Igualando componentes:

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{a}{2}+\frac{c}{2}=1 \\ \frac{b}{2}+\frac{d}{2}=0 \\ \frac{-a}{2}+\frac{c}{2}=0 \\ \frac{-b}{2}+\frac{d}{2}=1 \end{array}\right\} \rightarrow c=1 \quad , \quad a=1 \quad , \quad d=1 \quad , \quad b=-1 \rightarrow A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La traspuesta es: $A^t=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$

Por lo tanto: $A^{-1} \neq A^t$ → La matriz no es ortogonal.

Hoja 8. Problema 5

Resuelto por Vicky Torrecillas (abril 2015)

8. Determina la matriz X que satisface la ecuación

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \cdot X + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Suponemos: $X = \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix}$

Primero realizo el producto de matrices del término izquierdo

$$\begin{pmatrix} -x+2z & -y+2t \\ 3x & 3y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

Sumamos a la izquierda:

$$\begin{pmatrix} -x+2z & -y+2t+2 \\ 3x+5 & 3y-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & 8 \\ 8 & 5 \end{pmatrix}$$

E igualamos término a término, fomando un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas:

$$\left\{\begin{matrix} -x+2z=-3 \\ -y+2t+2=8 \\ 3x+5=8 \\ 3y-1=5 \end{matrix}\right\} \rightarrow \left\{\begin{matrix} -x+2z=-3 \\ -y+2t=6 \\ 3x=3 \\ 3y=6 \end{matrix}\right\} \rightarrow x=1 \quad , \quad y=2 \quad , \quad t=4 \quad , \quad z=-2$$

Es decir: $X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$