Problemas – Tema 6

Solución a problemas de repaso y ampliación del Tema 5 y Tema 6 - Hoja 06 - Problemas 1, 2, 4

Hoja 6. Problema 1

Resuelto por Isabel Navarro-Pelayo Torres (marzo 2015)

1. Resolver

a) $\int \frac{1}{\cos^4(x)} dx$

b) $\int \frac{1}{\cos^2(x) \cdot sen^2(x)} dx$

c) $\int \frac{1}{2+\cos(x)} dx$

a) $\int \frac{1}{\cos^4(x)} dx$

Integral par en el producto seno · coseno → cambio de variable tg(x) = t

$$tg(x)=t \quad \rightarrow \quad dx=\frac{dt}{1+t^2}$$

$$\cos(x)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

Sustituimos en la integral de partida

$$I=\int \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^4} \cdot \frac{dt}{1+t^2}=\int \frac{(1+t^2)^2}{1+t^2} dt=\int (1+t) dt=t+\frac{t^2}{2}+C$$

Deshacemos el cambio: $I=tg(x)+\frac{tg^2(x)}{2}+C$

b) $\int \frac{1}{\cos^2(x)\cdot sen^2(x)}dx$

Par en el producto seno · coseno → cambio de variable tg(x)= t → $dx=\frac{dt}{1+t^2}$

$\cos(x)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$, $sen(x)=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$

Sustituimos en la integral de partida.

$$I=\int \frac{1}{\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^2}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int \frac{(1+t^2)\cdot(1+t^2)}{t^2}\cdot\frac{dt}{1+t^2}=\int \frac{1+t^2}{t^2}dt$$

$$I=\int \frac{1}{t^2}dt+\int dt=\frac{-1}{t}+t+C$$

Deshacemos el cambio: $I=\frac{-1}{tg(x)}+tg(x)+C$

c) $\int \frac{1}{2+\cos(x)}dx$

Cambio de variable: tg(x/2) = t → $dx=\frac{2}{1+t^2}dt$; $\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

$$I=\int \frac{1}{2+\frac{1-t^2}{1+t^2}}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt=\int \frac{2}{2(1+t^2)+1-t^2}dt=2\int \frac{1}{t^2+3}dt=2\int \frac{1}{3\left(1+\frac{t^2}{3}\right)}dt=\frac{2}{3}\int \frac{1}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}dt$$

$$I=\frac{2\sqrt{3}}{3}\int \frac{1/\sqrt{3}}{1+\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)^2}dt=\frac{2\sqrt{3}}{3}arctg\left(\frac{t}{\sqrt{3}}\right)+C$$

Deshacemos el cambio: $I=\frac{2\sqrt{3}}{3}arctg\left(\frac{tg(\frac{x}{2})}{\sqrt{3}}\right)+C$

Hoja 6. Problema 2

Resuelto por Carmen Martín Rubio (marzo 2015)

2. Resolver.

a) $\int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx$

b) $\int x^2 \cdot \ln(x) dx$

c) $\int x^2 \cdot sen(3\text{x}) dx$

a) $\int \frac{1+e^x}{1-e^x} dx$

Cambio de variable $e^x = t \rightarrow e^x\, dx = dt \rightarrow dx = \frac{dt}{t}$

$$\int \frac{1+t}{1-t} \frac{dt}{t} = \int \frac{1+t}{t(1-t)} dt$$

Método de coeficientes indeterminados

$$\frac{1+t}{t(1-t)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{(1-t)}$$

1 + t = A(1-t) + Bt

Si t = 1 → 2 = 0 + B → B = 2

Si t = 0 → 1 = A + 0 → A = 1

$$\int \frac{1+t}{t(1-t)} dt = \int \frac{1}{t} + \frac{2}{1-t} dt = \int \frac{1}{t} dt + 2\int \frac{1}{1-t} dt$$

$$Ln\ |t| - 2\ Ln\ |t-1| + C$$

Deshago cambio de variable

$$I = \ln(e^x) - 2\ln(e^x - 1) + C = x - 2\ln(e^x - 1) + C$$

b) $\int x^2 \cdot \ln(x) dx$

Integro por partes

u = ln(x) → du = $\frac{1}{x} dx$

dv = $x^2 dx$ → v = $\frac{x^3}{3}$

$$\int u\ dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int x^2 \cdot \ln(x) dx = \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3} \cdot \frac{1}{x} dx$$

$$\int x^2 \cdot \ln(x) dx = \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \int \frac{x^3}{3x} dx$$

$$\int x^2 \cdot \ln(x) dx = \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{1}{3} \int x^2\ dx$$

$$\int x^2 \cdot \ln(x) dx = \ln(x) \cdot \frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{9}$$

$$\int x^2 \cdot \ln(x) dx = \frac{1}{3} x^3 \left(\ln(x) - \frac{1}{3} \right) + C$$

c) $\int x^2 \cdot sen(3x) dx$

Integramos por partes

u = x^2 → *du = 2x dx*

dv = sen (3x) dx → *v =* $\frac{-1}{3}$ *cos (3x)*

$$\int u\ dv = u \cdot v - \int v \cdot du$$

$$\int x^2 \cdot sen(3x) dx = x^2 \cdot \frac{-1}{3} \cdot cos(3x) - \int \frac{-1}{3} \cdot cos(3x) \cdot 2x\ dx$$

$$\int x^2 \cdot sen(3x) dx = x^2 \cdot \frac{-1}{3} \cdot cos(3x) + \frac{2}{3} \underbrace{\int cos(3x) \cdot x\ dx}_{I'}$$

Realizamos la integral por partes I’

u = x → du = dx
dv = cos (3x) dx → v = $\frac{1}{3}$ · sen (3x)

$$\int u\ dv = u\cdot v - \int v\cdot du$$

$$\int cos\ (3x)\cdot x\ dx = x\cdot\ \frac{1}{3}\ \cdot\ sen\ (3x) - \int \frac{1}{3}\ \cdot\ sen\ (3x)\cdot dx$$

$$\int cos\ (3x)\cdot x\ dx = x\cdot\ \frac{1}{3}\ \cdot\ sen\ (3x) - \frac{1}{3}\int sen\ (3x)\cdot dx$$

$$\int cos\ (3x)\cdot x\ dx = x\cdot\ \frac{1}{3}\ \cdot\ sen\ (3x) - \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{-1}{3}\right)\int (-\ 3)\cdot\ sen\ (3x)\cdot dx$$

$$\int cos\ (3x)\cdot x\ dx = x\cdot\ \frac{1}{3}\ \cdot\ sen\ (3x) + \frac{1}{9}\cdot\cos\ (3x) + C$$

Por tanto sustitituyo este valor en la integral de partida:

$$I = x^2\cdot\frac{-1}{3}\ \cdot\ cos\ (3x) + \frac{2}{3}\left(x\cdot\ \frac{1}{3}\ \cdot\ sen\ (3x) + \frac{1}{9}\cdot\cos\ (3x)\right) + C$$

$$I = \frac{-\ x^2\ \cdot\ cos\ (3x)}{3} + \frac{2x\cdot sen\ (3x)}{9} + \frac{\cos\ (3x)}{27} + C$$

$$I = \frac{-\ 9x^2\ \cdot\ 9cos\ (3x) +\ 6x\ \cdot\ 3sen\ (3x)\ + \cos\ (3x)}{27}\ + C$$

Hoja 6. Problema 4

Resuelto por Carmen Jiménez (marzo 2015)

1. Resolver

a) $\int \frac{3^x}{1+3^x} dx$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$

c) $\int \sqrt{\frac{x+2}{x-1}} dx$

a) $\int \frac{3^x}{1+3^x} dx = \frac{1}{\ln(3)} \int \frac{\ln(3)\cdot 3^x}{1+3^x} dx = \frac{1}{\ln(3)} \cdot \ln|1+3^x| + C$

b) $\int \frac{1}{\sqrt{4-x^2}} dx$

Proponemos el cambio de variable $x=2\text{sen}(t) \rightarrow dx=2\cos(t)\,dt$

$$I=\int \frac{1}{\sqrt{4-4\,sen^2(t)}} 2\cos(t)\,dt = \int dt = t+C$$

Deshacemos el cambio de variable.

$$I=arcosen\left(\frac{x}{2}\right)+C$$

c) $\int \sqrt{\frac{x+2}{x-1}} dx$

Aplicamos el cambio de variable $\frac{x+2}{x-1}=t^2 \rightarrow \frac{x-1-(x+2)}{(x-1)^2} dx = 2t\,dt \rightarrow \frac{-3}{(x-1)^2} dx = 2t\,dt \rightarrow$

$\rightarrow \; dx = \frac{-2t}{3}(x-1)^2\,dt$

$$I=\int \sqrt{\frac{x+2}{x-1}} dx = \int t \cdot \frac{-2t}{3}(x-1)^2\,dt$$

Debemos expresar x en función de t $\rightarrow \frac{x+2}{x-1}=t^2 \rightarrow x+2=x\cdot t^2-t^2 \rightarrow 2+t^2=x\cdot t^2-x \rightarrow$

$\rightarrow \quad 2+t^2=x(t^2-1) \quad \rightarrow \quad x=\frac{2+t^2}{t^2-1}$

Sustituimos

$$I=\int \frac{-2t^2}{3}\left(\frac{2+t^2}{t^2-1}-1\right)^2 dt=\int \frac{-2t^2}{3}\left(\frac{3}{t^2-1}\right)^2 dt=-6\int \frac{t^2}{(t^2-1)^2}dt=-6\int \frac{t^2}{(t+1)^2\cdot(t-1)^2}dt$$

Aplicamos el método de los coeficientes indeterminados:

$$\frac{t^2}{(t+1)^2\cdot(t-1)^2}=\frac{A}{t+1}+\frac{B}{(t+1)^2}+\frac{C}{(t-1)}+\frac{D}{(t-1)^2}$$

$$I=-6\left(A\ln|t+1|-B\frac{1}{t+1}+C\ln|t-1|-D\frac{1}{t-1}\right)$$

Dando valores, obtenemos:

$A=\frac{-1}{4}$

$B=\frac{1}{4}$

$C=\frac{1}{4}$

$D=\frac{1}{4}$

Por lo que la integral queda:

$$I=-6\left(\frac{-1}{4}\ln|t+1|-\frac{1}{4}\frac{1}{t+1}+\frac{1}{4}\ln|t-1|-\frac{1}{4}\frac{1}{t-1}\right)$$

Deshacemos el cambio de variable $\frac{x+2}{x-1}=t^2 \rightarrow \sqrt{\frac{x+2}{x-1}}=t$

$$I=\frac{3}{2}\ln\left|\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}+1\right|+\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}+1}-\frac{3}{2}\ln\left|\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}-1\right|+\frac{3}{2}\frac{1}{\sqrt{\frac{x+2}{x-1}}-1}+C$$