Problemas – Tema 7

Solución a problemas de repaso y ampliación del Tema 5 y Tema 6 - Hoja 05 - Problemas 1, 3, 4

Hoja 5. Problema 1

Resuelto por Andrés Pineda (abril 2015)

1. Resolver.

a) $\int e^x \cdot \cos(x)\,dx$

b) $\int \frac{3x^2-2x+5}{(x+3)^3}\,dx$

c) $\int x\cdot\sqrt{1+x}\,dx$

a) $\int e^x \cdot \cos(x)\,dx$

Se trata de una integral por partes, la cual se resuelve del siguiente modo: Definimos cada una de las partes "u" y "v" de la integral siguiendo bien la regla de ALPES, bien tratando de discernir sobre que parte de la integral resulta más compleja o más simple, teniendo en cuenta que la integral resultante debiera ser más simple que nuestra integral de partida.

$$u=e^x \rightarrow diferenciamos \rightarrow du=e^x\,dx$$
$$du=\cos(x)\,dx \rightarrow integramos \rightarrow v=-cos(x)$$

Ha llegado el momento de emplear la fórmula de la integración por partes → $\int u\,dv=uv-\int v\,du$

$$I=\int e^x\cdot\cos(x)\,dx=e^x\cdot\sin(x)-\int\sin(x)\cdot e^x$$

Nos encontramos con otra integral cuya resolución es por partes (usaremos el mismo método empleado anteriormente) → $N=\int\sin(x)\cdot e^x$

$$u=e^x \rightarrow derivamos \rightarrow du=e^x\,dx$$
$$dv=\sin(x)\,dx \rightarrow integramos \rightarrow v=-\cos(x)$$

$$N=e^x.-\cos(x)+\int \cos(x).e^x\,dx$$

Sustituimos la solución de la integral N en el resultado de la integral I de partida.

$$I=\int e^x \cdot \cos(x)\,dx=e^x\cdot\sin(x)-e^x\cdot\cos(x)-\int e^x \cdot \cos(x)\,dx$$

Nos damos cuenta la integral de partida I es idéntica a la integral que se ha generado en el término de la derecha. Es decir:

$$I=\int e^x \cdot \cos(x)\,dx=e^x\cdot\sin(x)-e^x\cdot\cos(x)-I$$

$$2I=e^x\cdot\sin(x)-e^x\cdot\cos(x)$$

$$I=\frac{e^x\cdot\sin(x)-e^x\cdot\cos(x)}{2}$$

b) $I=\int \frac{3x^2-2x+5}{(x+3)^3}\,dx$¿

Esta integral es un cociente de polinomios con el grado del denominador mayor que el grado del numerador.

$$\frac{3x^2-2x+5}{(x+3)^3}\,dx=\frac{A}{(x+3)}+\frac{B}{(x+3)^2}+\frac{C}{(x+3)^3}$$

$$\frac{A(x+3)^2+B(x+3)+C}{(x+3)^3}=\frac{3x^2-2x+5}{(x+3)^3}$$

$$A(x+3)^2+B(x+3)+C=3x^2-2x+5$$

$$si\ \ x=-3\rightarrow 0+0+C=27+6+5\,;\ C=38$$

$$si\ \ x=1\rightarrow 16A+4B+38=3-2+5\ \rightarrow\ 16A+4B=-32$$

$$si\ \ x=-1\rightarrow 4A+2B=3+2+5\ \rightarrow\ 4A+2B=-18$$

De las dos últimas ecuaciones nos queda un sistema cuyas soluciones son $A=\frac{1}{2}$ y $B=-10$

Sustituimos en integral $I\ \rightarrow\ I=\frac{1}{2}\ln(x+3)-10\int\frac{1}{(x+3)^2}\,dx+38\int\frac{1}{(x+3)^3}\,dx+C$

$$I=\frac{1}{2}\ln(x+3)+\frac{10}{(x+3)}-\frac{38}{3(x+3)^2}+C$$

c) $I=x\int\sqrt{1+x}\,dx$

$Propongo\ cambio\ de\ variable \rightarrow t^2=1+x \rightarrow 2t\,dt=dx$

$Sustituyo\ en\ la\ integral \rightarrow \int x\cdot t\cdot 2t\ dt$

$Despejo\ x \rightarrow 1+x=t^2 \rightarrow x=t^2-1$

$Sustituyo\ el\ valor\ de\ x\ en\ la\ integral \rightarrow \int (t^2-1)\cdot 2t^2 dt$

$Resuelvo\ la\ integral \rightarrow \int (t^2-1)\cdot 2t^2 dt=\int 2t^4-2t^2 dt=2\int t^4 dt-2\int t^2 dt$

$I=2\frac{t^5}{5}-2\cdot\frac{t^3}{3}+C$ → Deshacemos cambio → $I=2\frac{(1+x)^{\frac{5}{2}}}{5}-2\frac{(1+x)^{\frac{3}{2}}}{3}+C$

Hoja 5. Problema 4

Resuelto por Alberto Jiménez Molina (abril Molina 2015)

3. Resolver.

a) $\int cosec^3(x)\,dx$

b) $\int \frac{e^{4x}+3}{e^{3x}}dx$

c) $\int x^2 \cdot e^x dx$

a) $\int cosec^3(x)\,dx = \int \left(\frac{1}{sen^3(x)}\right)dx$ … pendiente de resolver ...

b) $\int \frac{e^{4x}+3}{e^{3x}}dx$

$$I=\int \left(\frac{e^{4x}+3}{e^{3x}}\right)dx=\int \left(\frac{e^{4x}}{e^{3x}}\right)dx+\int \left(\frac{3}{e^{3x}}\right)dx=\int e^x\,dx+\int \left(3e^{(-3x)}\right)dx=e^x-\int \left(-3e^{(-3x)}\right)dx=e^x-e^{(-3x)}+C$$

c) $I=\int x^2 e^x\,dx$

Aplicamos el método de integración por partes:

$$u=x^2 \quad \rightarrow \quad du=2x\,dx$$
$$dv=e^x dx \quad \rightarrow \quad v=e^x$$

$$I=\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

$$I=\int x^2 e^x\,dx=x^2 e^x-\int e^x 2x\,dx$$

Hago de nuevo por partes la integral resultante

$$u=2x \quad \rightarrow \quad du=2\,dx$$
$$dv=e^x dx \quad \rightarrow \quad v=e^x$$

Es decir:

$$I=\int x^2 e^x\,dx=x^2 e^x-\left(2xe^x-\int e^x 2\,dx\right)=x^2e^x-\left(2xe^x-2e^x\right)+C=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C$$
$$I=e^x\left(x^2-2x+2\right)+C$$

Hoja 5. Problema 4

Resuelto por Ana Jerónimo (marzo 2015)

4. Resolver

a) $\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}dx$

b) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-3)}dx$

c) $\int \frac{x^3\cdot\sqrt{1+x^4}}{1+\sqrt{1+x^4}}dx$

a) $\int \frac{2x^2+5x-1}{x^3+x^2-2x}dx$

$$I=\int \frac{2x^2+5x-1}{x(x^2+x-2)}dx=\int \frac{2x^2+5x-1}{x(x-1)(x+2)}dx$$

$$\frac{2x^2+5x-1}{x(x-1)(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-1)}+\frac{C}{(x+2)}$$

$$2x^2+5x-1=A(x-1)(x+2)+Bx(x+2)+Cx(x-1)$$

$$Si\ \ x=0\rightarrow\ -1=\ -2A\rightarrow\quad A=\frac{1}{2}$$

$$Si\ \ x=1\ \rightarrow 6=\ 3B\rightarrow\quad B=2$$

$$Si\ \ x=-2\rightarrow\ -3=\ 6C\rightarrow\quad C=\frac{-1}{2}$$

$$I=\int \frac{2x^2+5x-1}{x(x-1)(x+2)}dx=\int \frac{1}{2x}dx+\int \frac{2}{(x-1)}dx+\int \frac{-1}{2(x+2)}dx$$

$$I=\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}dx+2\int \frac{1}{(x-1)}dx-\frac{1}{2}\int \frac{1}{(x+2)}dx$$

$$I=\frac{1}{2}ln(x)+2ln(x-1)-\frac{1}{2}ln(x+2)+C$$

b) $\int \frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-3)}dx$

$$\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-3)}=\frac{A}{x+1}+\frac{B}{(x+1)^2}+\frac{C}{(x-3)}$$

$$x^2+1=A(x+1)(x-3)+B(x-3)+C(x+1)^2$$

$$Si\ \ x=-1\rightarrow\ 2=\ -4A\rightarrow\quad A=\frac{-1}{2}$$

$$Si\ \ x=3\rightarrow\ 10=\ 16B\rightarrow\quad B=\frac{5}{8}$$

$$Si\ \ x=0\rightarrow\ 1=\ -3\,\frac{-1}{2}+3\,\frac{5}{8}+C\rightarrow\ C=\frac{-21}{8}$$

$$I=\int\frac{x^2+1}{(x+1)^2(x-3)}dx=\int\frac{-1}{2(x+1)}dx+\int\frac{5}{8(x+1)^2}dx+\int\frac{-21}{8(x-3)}dx$$

$$I=\frac{-1}{2}\int\frac{1}{(x+1)}dx+\frac{5}{8}\int\frac{1}{(x+1)^2}dx-\frac{21}{8}\int\frac{1}{(x-3)}dx$$

$$I=\frac{-1}{2}\ln|x+1|+\frac{5}{8}\cdot\frac{1}{x+1}-\frac{21}{8}\ln|x-3|+C$$

c) $\int\frac{x^3\cdot\sqrt{1+x^4}}{1+\sqrt{1+x^4}}dx$

$$cambio\ variable\ \rightarrow 1+x^4=t^2\ \rightarrow\ 4x^3\ dx=2t\ dt\rightarrow dx=\frac{t}{2x^3}\ dt$$

$$I=\int\frac{x^3\cdot t}{1+t}\cdot\frac{t}{2x^3}dt=\frac{1}{2}\int\frac{t^2}{1+t}dt$$

$$\frac{t^2}{(1+t)}\rightarrow División\ de\ polinomios$$

$$I=\ \frac{1}{2}\int\frac{t^2}{(1+t)}dt=\ \frac{1}{2}\int 1\,dt-\frac{1}{2}\int t\,dt+\frac{1}{2}\int\frac{1}{(1+t)}dt$$

$$I=\frac{1}{2}t-\frac{1}{2}\,\frac{t^2}{2}+\frac{1}{2}ln(1+t)+C$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$I=\frac{1}{2}\sqrt{1+x^4}-\frac{1+x^4}{4}+\frac{1}{2}ln\left((1+\sqrt{1+x^4})\right)+C$$