

## Problemas – Tema 7

### Solución a problemas de repaso y ampliación del Tema 5 y Tema 6 - Hoja 12 - Todos resueltos

#### Hoja 12. Problema 1

1. a) Una matriz es ortogonal si su inversa coincide con su traspuesta. Comprobar si es ortogonal la matriz  $A$ .

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

b) Obtener  $A^3$

a) Una matriz es ortogonal cuando la inversa coincide con su traspuesta.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \rightarrow A^t = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Calculemos la matriz inversa por el método directo:

$$A \cdot A^{-1} = I \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{a\sqrt{3}+c}{2} & \frac{b\sqrt{3}-d}{2} \\ \frac{a-c\sqrt{3}}{2} & \frac{b+d\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando componentes llegamos a un sistema de cuatro ecuaciones y cuatro incógnitas, que debemos resolver.

$$\begin{pmatrix} \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{c}{2} = 1 \\ \frac{b\sqrt{3}}{2} - \frac{d}{2} = 0 \\ \frac{a}{2} + \frac{c\sqrt{3}}{2} = 0 \\ \frac{b}{2} + \frac{d\sqrt{3}}{2} = 1 \end{pmatrix} \rightarrow c = \frac{-1}{2}, \quad a = \frac{\sqrt{3}}{2}, \quad d = \frac{1}{2}, \quad b = \frac{\sqrt{3}}{2} \rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$$

Y se cumple que  $A^{-1} = A^t \rightarrow$  La matriz es ortogonal.

b)  $A^3 = A^2 \cdot A$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

## Hoja 12. Problema 2

2. a) Para qué valores de  $a$  no admite inversa la matriz  $A = \begin{pmatrix} 0 & a-3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix}$

b) Calcular las matrices  $A$  y  $B$  que satisfacen el siguiente sistema matricial:

$$5A + 3B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix}$$

$$3A + 2B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}$$

a) Obtenemos la matriz triangular por Gauss para saber cuántos vectores linealmente independientes hay, como máximo, en la matriz. Si hay 3 vectores linealmente independientes, el rango será 3 y la matriz tendrá inversa.

$$\begin{pmatrix} 0 & a-3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ a & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Reordeno y coloco } F_3 \text{ como primera fila} \rightarrow \begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 0 & a-3 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow F'_3 = (a-3)F_3 - F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} a & -1 & 2 \\ 0 & a-3 & 4 \\ 0 & 0 & -2a+2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Discusión de casos:}$$

$$\text{Si } -2a+2=0 \rightarrow a=1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Rango} = 2$$

El caso  $a-3=0$  no lo contemplo porque anula las transformaciones realizadas por Gauss, donde aplicamos  $F'_3 = (a-3)F_3 - F_2$  en uno de los pasos.

$$\text{Si } a=0 \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow F'_2 = F_2 - 3F_1 + F_3 \rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \text{Su rango es } 2$$

Conclusión: Si  $a=1$  ó  $a=0$  la matriz no admite inversa.

b)

$$5A+3B=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -4 & 15 \end{pmatrix} \rightarrow \text{multiplicar por 2} \rightarrow 10A+6B=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 30 \end{pmatrix}$$

$$3A+2B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \text{multiplicar por 3} \rightarrow 9A+6B=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 27 \end{pmatrix}$$

Restamos ambas ecuaciones matriciales para obtener  $A$  .

$$A=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -8 & 30 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -6 & 27 \end{pmatrix} \rightarrow A=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

Y obtenemos la matriz  $B$  .

$$3A+2B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow B=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 9 \end{pmatrix}-\frac{3}{2}A \rightarrow B=\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{-1}{2} \\ -1 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ -3 & \frac{9}{2} \end{pmatrix}$$

$$B=\begin{pmatrix} -1 & -5 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

## Hoja 12. Problema 3

### 3. Calcula:

a)  $\int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3} dx$

b)  $\int \operatorname{arccos}(x) dx$

a)  $I = \int_1^2 \frac{3-x^2+x^4}{x^3} dx = 3 \int_1^2 \frac{1}{x^3} dx - \int_1^2 \frac{1}{x} dx + \int_1^2 x dx = \frac{-3}{2} \left[ \frac{1}{x^2} \right]_1^2 - [\ln|x|]_1^2 + \frac{1}{2} [x^2]_1^2$

$$I = \frac{-3}{2} \left( \frac{1}{4} - 1 \right) - (\ln(2) - \ln(1)) + \frac{1}{2} [4 - 1] = \frac{9}{8} - \ln(2) + \frac{3}{2} = \frac{21}{8} - \ln(2)$$

b)  $I = \int \operatorname{arccos}(x) dx$

Aplicamos método por partes:

$$u = \operatorname{arccos}(x) \rightarrow du = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} dx$$

$$dv = dx \rightarrow v = x$$

Sustituyendo  $I = u \cdot v - \int v du$

$$I = x \cdot \operatorname{arccos}(x) + \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx = x \cdot \operatorname{arccos}(x) - \frac{2}{2} \int \frac{-2x}{2\sqrt{1-x^2}} dx = x \cdot \operatorname{arccos}(x) - \sqrt{1-x^2} + C$$

## Hoja 12. Problema 4

### 4. Calcula:

a) El área encerrada por la función  $f(x) = -x^2 - 3$ , el eje  $OX$  y las rectas verticales  $x=0$  y  $x=4$ .

b)  $\int (2 \cos^2(x) + 1) dx$

a) En el intervalo  $[0, 4]$  la función  $f(x) = -x^2 - 3$  es  $f(x) \leq 0$ . Por lo tanto el área que nos solicitan coincide con el valor absoluto de la siguiente integral definida:

$$A = \left| \int_0^4 (-x^2 - 3) dx \right| = \left| \left[ -\frac{x^3}{3} - 3x \right]_0^4 \right| = \left| -\frac{64}{3} - 12 - 0 \right| = \frac{100}{3} \text{ u}^2$$

b)  $I = \int (2 \cos^2(x) + 1) dx$

Recordamos la relación fundamental de trigonometría y la fórmula del coseno del ángulo doble.

$$\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\cos^2(x) - \sin^2(x) = \cos(2x)$$

Si sumamos ambas expresiones:

$$2 \cos^2(x) = 1 + \cos(2x)$$

Llevando este resultado a la integral:

$$I = \int (1 + \cos(2x) + 1) dx = \int (\cos(2x) + 2) dx = \int \cos(2x) dx + 2 \int dx$$

$$I = \frac{1}{2} \sin(2x) + 2x + C = \sin(x) \cos(x) + 2x + C$$