

Problemas – Tema 7

Solución a problemas de repaso y ampliación del Tema 5 y Tema 6 - Hoja 11 - Todos resueltos

Hoja 11. Problema 1

1. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

Calcula:

a) A^{-1}

b) Resolver $A \cdot X = B - A^2$ (obtener matriz X)

a) Aplicamos el método Gauss-Jordan para obtener la inversa:

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & | & 1 & 0 \\ -3 & -1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow F'_1 = F_1 + F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 & 1 \\ -3 & -1 & | & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow F'_2 = F_2 + 3F_1 \rightarrow \\ \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 & 1 \\ 0 & -1 & | & 3 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow F'_2 = -F_2 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & | & 1 & 1 \\ 0 & 1 & | & -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Es decir:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix}$$

Y lo comprobamos:

$$A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

b) Debemos resolver:

$$A \cdot X = B - A^2 \rightarrow X = A^{-1} \cdot (B - A^2)$$

$$B - A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 13 & 3 \\ -9 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & -1 \\ 12 & 6 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -12 & -1 \\ 12 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 5 \\ -12 & -21 \end{pmatrix}$$

Hoja 11. Problema 2

2. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Calcula:

a) ¿Para qué valores de λ existe A^{-1} ?

b) En la ecuación matricial $A \cdot X = B$, obtener X si $\lambda = 4$.

a) Obtenemos matriz triangular por método de Gauss para determinar el número máximo de vectores linealmente independientes existentes en la matriz A .

Este número de vectores es igual al rango. Y si el rango es 3, al ser la matriz de orden 3, significará que existe inversa.

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow F'_2 = F_2 - F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow F'_3 = (1-\lambda)F_3 + F_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

Discusión de casos:

$$\lambda = -1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow 2 \text{ vectores linealmente independientes} \rightarrow \text{Rango} = 2$$

$$\lambda \neq -1 \rightarrow 3 \text{ vectores linealmente independientes} \rightarrow \text{Rango} = 3 \rightarrow \exists A^{-1} \text{ si } \lambda \neq -1$$

b) Resolvemos la ecuación matricial $A \cdot X = B$ con $\lambda = 4$.

$$X = A^{-1} \cdot B$$

En primer lugar obtenemos la inversa de la matriz A .

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow F'_2 = F_2 - F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \rightarrow F'_3 = 3F_3 - F_2 \\ & \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow F'_2 = 5F_2 + 2F_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow \\ & \rightarrow F'_1 = 15F_1 + 4F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 15 & 0 & 0 & 3 & 12 & 24 \\ 0 & -15 & 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -1 & 3 \end{array} \right) \rightarrow F'_1 = \frac{1}{15}F_1, \quad F'_2 = \frac{-1}{15}F_2, \\ & F'_3 = \frac{-1}{5}F_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} & & & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \\ 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{-2}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-3}{5} \end{array} \right) \end{aligned}$$

Es decir:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 20 & 9 & -3 \\ -5 & -1 & 2 \\ -5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Hoja 11. Problema 3

3. Calcula:

a) $\int_0^{\pi} \frac{6 \operatorname{sen}(x)}{5-3 \cos(x)} dx$

b) $\int \frac{10}{x^2-x-6} dx$

a) $I = \int_0^{\pi} \frac{6 \operatorname{sen}(x)}{5-3 \cos(x)} dx = \frac{6}{3} \int_0^{\pi} \frac{3 \operatorname{sen}(x)}{5-3 \cos(x)} dx = 2 [\ln |5-3 \cos(x)|]_0^{\pi}$

$$I = 2 (\ln |5-3 \cos(\pi)| - \ln |5-3 \cos(0)|) = 2 (\ln(8) - \ln(2)) = 2 \ln\left(\frac{8}{2}\right) = 2 \ln(4) = 4 \ln(2)$$

b) $I = \int \frac{10}{x^2-x-6} dx = 10 \int \frac{1}{(x-3)(x+2)} dx$

Por el método de los coeficientes indeterminados:

$$\frac{1}{(x-3)(x+2)} = \frac{A}{x+2} + \frac{B}{x-3} \rightarrow 1 = A(x-3) + B(x+2)$$

Si $x = -2 \rightarrow B = \frac{-1}{5}$

Si $x = 3 \rightarrow A = \frac{1}{5}$

Por lo tanto:

$$I = 10 \int \frac{\frac{1}{5}}{x-3} dx - 10 \int \frac{\frac{1}{5}}{x+2} dx = 2 \ln|x-3| - 2 \ln|x+2| + C = 2 \ln\left|\frac{x-3}{x+2}\right| + C$$

Hoja 11. Problema 4

4. Calcula:

a) El área encerrada por la función $f(x) = \cos(x)$, el eje OX y las rectas verticales $x=0$ y $x=\frac{\pi}{2}$.

b) $\int x^2 \ln(x) dx$

a) En el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$ la función $f(x) = \cos(x)$ es $f(x) \geq 0$. Por lo tanto el área que nos solicitan coincide con la siguiente integral definida:

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x) dx = [\operatorname{sen}(x)]_0^{\frac{\pi}{2}} = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}\right) - \operatorname{sen}(0) = 1 \text{ u}^2$$

b) $I = \int x^2 \ln(x) dx$

Aplicamos el método de integración por partes:

$$u = \ln(x) \rightarrow du = \frac{1}{x}$$

$$dv = x^2 \rightarrow v = \frac{x^3}{3}$$

Sustituyendo $I = u \cdot v - \int v du$

$$I = \frac{x^3 \cdot \ln(x)}{3} - \frac{1}{3} \int x^2 dx = \frac{x^3 \cdot \ln(x)}{3} - \frac{x^3}{9} + C$$