Problemas – Tema 7

Solución a problemas de repaso y ampliación del Tema 5 y Tema 6 - Hoja 11 - Todos resueltos

Hoja 11. Problema 1

1. Sean las matrices $A=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -3 & -1\end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ **.**

Calcula:

a) A^{-1}

b) Resolver $A\cdot X=B-A^2$ **(obtener matriz** X **)**

a) Aplicamos el método Gauss-Jordan para obtener la inversa:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}4 & 1 & 1 & 0\\ -3 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\rightarrow F'_1=F_1+F_2\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 1\\ -3 & -1 & 0 & 1\end{array}\right)\rightarrow F'_2=F_2+3F_1\rightarrow$$

$$\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & -1 & 3 & 4\end{array}\right)\rightarrow F'_2=-F_2\rightarrow\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -3 & -4\end{array}\right)$$

Es decir:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & -4\end{pmatrix}$$

Y lo comprobamos:

$$A\cdot A^{-1}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ -3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & -4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$$A^{-1}\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 1\\ -3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

b) Debemos resolver:

$$A\cdot X=B-A^2 \quad\rightarrow\quad X=A^{-1}\cdot\left(B-A^2\right)$$

$$B-A^2=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4 & 1\\ -3 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}4 & 1\\ -3 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}13 & 3\\ -9 & -2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-12 & -1\\ 12 & 6\end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix}1 & 1\\ -3 & -4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-12 & -1\\ 12 & 6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 5\\ -12 & -21\end{pmatrix}$$

Hoja 11. Problema 2

2. Sean $A=\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ **y** $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ **.**

Calcula:
a) ¿Para qué valores de λ **existe** A^{-1} **?**
b) En la ecuación matricial $A\cdot X=B$ **, obtener** X **si** $\lambda=4$ **.**

a) Obtenemos matriz triangular por método de Gauss para determinar el número máximo de vectores linealmente independientes existentes en la matriz A .

Este número de vectores es igual al rango. Y si el rango es 3, al ser la matriz de orden 3, significará que existe inversa.

$$\begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow F'_2=F_2-F_1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow F'_3=(1-\lambda)F_3+F_2 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \lambda & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & \lambda+1 \end{pmatrix}$$

Discursión de casos:

$\lambda=-1 \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ → 2 vectores linealmente indepedientes → Rango = 2

$\lambda\neq-1$ → 3 vectores linealmente indepedientes → Rango = 3 → $\exists A^{-1}$ si $\lambda\neq-1$

b) Resolvemos la ecuación matricial $A\cdot X=B$ con $\lambda=4$.

$$X=A^{-1}\cdot B$$

En primer lugar obtenemos la inversa de la matriz A .

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow F'_2 = F_2 - F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow F'_3 = 3F_3 - F_2$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow F'_2 = 5F_2 + 2F_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 4 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -15 & 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow F'_1 = 15F_1 + 4F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 15 & 0 & 0 & 3 & 12 & 24 \\ 0 & -15 & 0 & -3 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow F'_1 = \frac{1}{15} F_1 \ , \ F'_2 = \frac{-1}{15} F_2 \ ,$$

$$F'_3 = \frac{-1}{5} F_3 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{8}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{5} & \frac{-1}{5} & \frac{-2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & \frac{-1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{-3}{5} \end{array}\right)$$

Es decir:

$$A^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto:

$$X = A^{-1} \cdot B \rightarrow X = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 4 & 8 \\ 1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 20 & 9 & -3 \\ -5 & -1 & 2 \\ -5 & -4 & -2 \end{pmatrix}$$

Hoja 11. Problema 3

3. Calcula:

a) $\int_0^{\pi} \frac{6\,sen(x)}{5-3\cos(x)}dx$

b) $\int \frac{10}{x^2-x-6}dx$

a) $I=\int_0^{\pi} \frac{6\,sen(x)}{5-3\cos(x)}dx=\frac{6}{3}\int_0^{\pi} \frac{3\,sen(x)}{5-3\cos(x)}dx=2[\ln|5-3\cos(x)|]_0^{\pi}$

$$I=2(\ln|5-3\cos(\pi)|-\ln|5-3\cos(0)|)=2(\ln(8)-\ln(2))=2\ln(\frac{8}{2})=2\ln(4)=4\ln(2)$$

b) $I=\int \frac{10}{x^2-x-6}dx=10\int \frac{1}{(x-3)(x+2)}dx$

Por el método de los coeficientes indeterminados:

$$\frac{1}{(x-3)(x+2)}=\frac{A}{x+2}+\frac{B}{x-3} \quad \rightarrow \quad 1=A(x-3)+B(x+2)$$

Si $x=-2 \quad \rightarrow \quad B=\frac{-1}{5}$

Si $x=3 \quad \rightarrow \quad A=\frac{1}{5}$

Por lo tanto:

$$I=10\int \frac{\frac{1}{5}}{x-3}dx-10\int \frac{\frac{1}{5}}{x+2}=2\ln|x-3|-2\ln|x+2|+C=2\ln|\frac{x-3}{x+2}|+C$$

Hoja 11. Problema 4

4. Calcula:

a) El área encerrada por la función $f(x)=\cos(x)$, el eje OX y las rectas verticales $x=0$ y $x=\frac{\pi}{2}$.

b) $\int x^2 \ln(x)\, dx$

a) En el intervalo $[0,\frac{\pi}{2}]$ la función $f(x)=\cos(x)$ es $f(x)\geq 0$. Por lo tanto el área que nos solicitan coincide con la siguiente integral definida:

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos(x)\, dx=[sen(x)]_0^{\frac{\pi}{2}}=sen(\frac{\pi}{2})-sen(0)=1 \quad u^2$$

b) $I=\int x^2 \ln(x)\, dx$

Aplicamos el método de integración por partes:

$$u=\ln(x) \quad \rightarrow \quad du=\frac{1}{x}$$

$$dv=x^2 \quad \rightarrow \quad v=\frac{x^3}{3}$$

Sustituyendo $I=u\cdot v-\int v\, du$

$$I=\frac{x^3\cdot \ln(x)}{3}-\frac{1}{3}\int x^2\, dx=\frac{x^3\cdot \ln(x)}{3}-\frac{x^3}{9}+C$$