Problemas – Tema 7

Solución a problemas de repaso y ampliación del Tema 5 y Tema 6 - Hoja 10 - Todos resueltos

Hoja 10. Problema 1

1. Calcula:

a) La integral definida $\int_0^1 x\,dx$ **.**

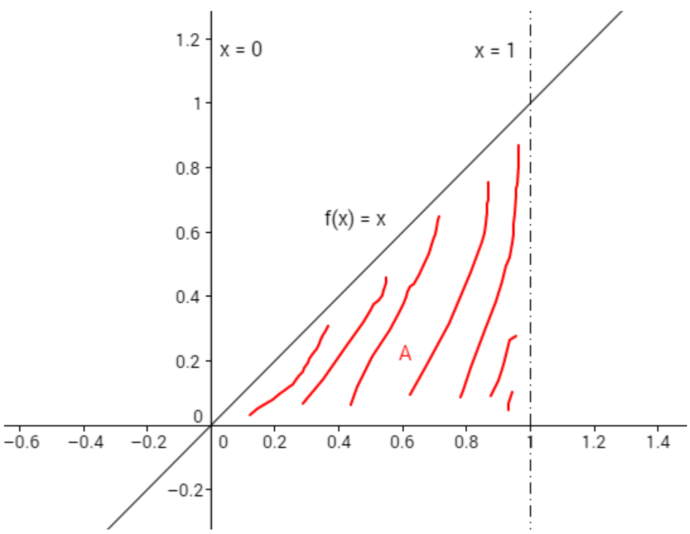
b) El área encerrada por la función $f(x)=x$ **, el eje** OX **y las rectas verticales** $x=0$ **,** $x=1$ **.**

a) $\int_0^1 x\,dx=[F(x)]_0^1=F(1)-F(0)$

$$\int_0^1 x\,dx=\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{1^2}{2}-0=\frac{1}{2}$$

b) La función $f(x)=x$ es positiva en el intervalo $[0,1]$. Por lo tanto, el área encerrada es igual a la integral definida en el apartado anterior.

$$A=\int_0^1 x\,dx=\frac{1}{2}\ u^2$$



Hoja 10. Problema 2

2. Calcula:

a) La integral definida $\int_0^1 x^2\,dx$ **.**

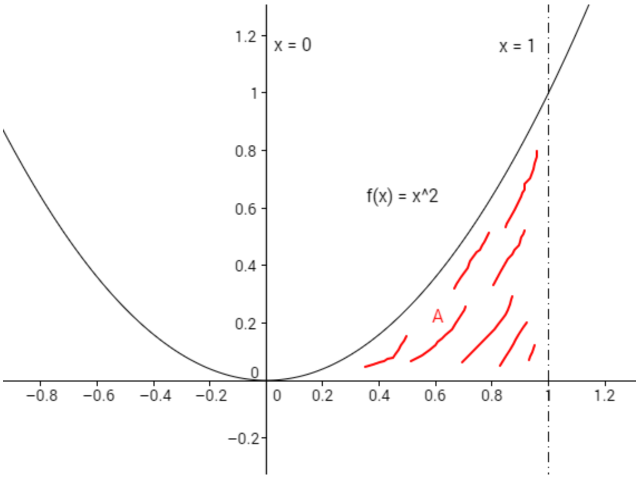
b) El área encerrada por la función $f(x)=x^2$ **, el eje** OX **y las rectas verticales** $x=0$ **,** $x=1$ **.**

a) $\int_0^1 x^2\,dx=[F(x)]_0^1=F(1)-F(0)$

$$\int_0^1 x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^1=\frac{1^2}{3}-0=\frac{1}{3}$$

b) La función $f(x)=x^2$ es positiva en el intervalo $[0,1]$. Por lo tanto, el área encerrada es igual a la integral definida en el apartado anterior.

$$A=\int_0^1 x^2\,dx=\frac{1}{3}\ u^2$$



Hoja 10. Problema 3

3. Calcula:

a) La integral definida $\int_0^4 (5x - x^2) dx$ **.**

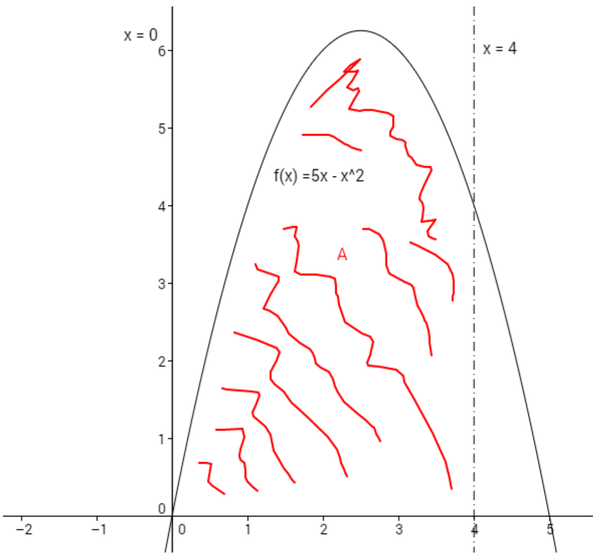
b) El área encerrada por la función $f(x) = 5x - x^2$ **, el eje** OX **y las rectas verticales** $x=0$ **,** $x=4$ **.**

a) $\int_0^4 (5x - x^2) dx = [F(x)]_0^4 = F(4) - F(0)$

$$\int_0^4 (5x - x^2) dx = \left[5\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}\right]_0^4 = 5 \cdot \frac{16}{2} - \frac{64}{3} - (0) = \frac{80}{2} - \frac{64}{3} = \frac{56}{3}$$

b) La función $f(x) = 5x - x^2$ es positiva en el intervalo $[0,4]$. Por lo tanto, el área encerrada es igual a la integral definida en el apartado anterior.

$$A = \int_0^4 (5x - x^2) dx = \frac{56}{3} \ u^2$$



Hoja 10. Problema 4

4. Calcula:

a) La integral definida $\int_0^4 (x^2-3x)\,dx$ **.**

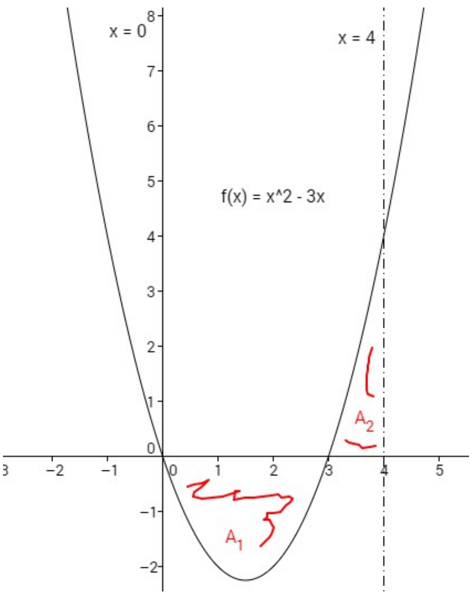
b) El área encerrada por la función $f(x)=x^2-3x$ **, el eje** OX **y las rectas verticales** $x=0$ **,** $x=4$ **.**

a) $\int_0^4 (x^2-3x)\,dx=[F(x)]_0^4=F(4)-F(0)$

$$\int_0^4 (x^2-3x)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}\right]_0^4=\frac{64}{3}-3\cdot\frac{16}{2}-(0)=\frac{64}{3}-24=\frac{-8}{3}$$

b) La función $f(x)=x^2-3x$ corta al eje OX en el intervalo $[0,4]$. Por lo tanto, el área encerrada no es igual a la integral definida en el apartado anterior.

Debemos esbozar su gráfica para comprender el área total.



El punto de corte con el eje de abscisas se produce en $(3,0)$. Por lo tanto (siguiendo la notación de la gráfica:

$$A=A_1+A_2 \quad\rightarrow\quad A_1=-\int_0^3 (x^2-3x)\,dx \quad , \quad A_2=\int_3^4 (x^2-3x)\,dx$$

$$A_1=-\int_0^3 (x^2-3x)\,dx=-[\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}]_0^3=-[\frac{27}{3}-\frac{27}{2}-(0)]=-[\frac{27}{3}-\frac{27}{2}]=\frac{27}{6}=\frac{9}{2}$$

$$A_1=\int_3^4 (x^2-3x)\,dx=[\frac{x^3}{3}-3\frac{x^2}{2}]_3^4=[\frac{64}{3}-\frac{48}{2}-(\frac{27}{3}-\frac{27}{2})]=\frac{64}{3}-24+\frac{27}{6}=\frac{11}{6}$$

Por lo tanto:

$$A=A_1+A_2=\frac{9}{2}+\frac{11}{6}=\frac{19}{3}\quad u^2$$

Hoja 10. Problema 5

5. Calcula:

a) La integral definida $\int_0^{2\pi} sen(x)\,dx$ **.**

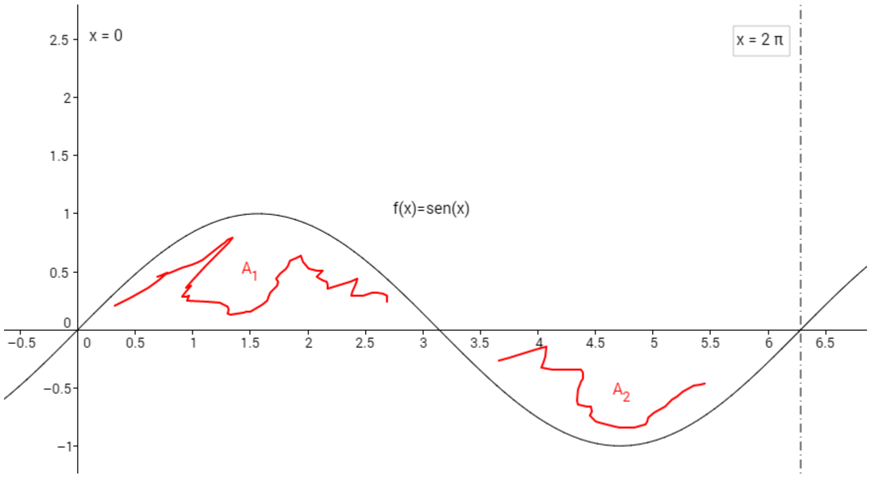
b) El área encerrada por la función $f(x)=sen(x)$ **, el eje** OX **y las rectas verticales** $x=0$ **,** $x=2\pi$ **.**

a) $\int_0^{2\pi} sen(x)\,dx=[F(x)]_0^{2\pi}=F(2\pi)-F(0)$

$$\int_0^{2\pi} sen(x)\,dx=[-\cos(x)]_0^{2\pi}=-\cos(2\pi)+\cos(0)=-1+1=0$$

b) La función $f(x)=sen(x)$ corta al eje OX en el intervalo $[0,2\pi]$. Por lo tanto, el área encerrada no es igual a la integral definida en el apartado anterior.

Debemos esbozar su gráfica para comprender el área total.



El punto de corte con el eje de abscisas se produce en $(\pi,0)$. Por lo tanto (siguiendo la notación de la gráfica:

$A=A_1+A_2$ $\rightarrow$ Las áreas A_1 y A_2 son iguales $\rightarrow$ $A_1=A_2$ $\rightarrow$ $A=2\cdot A_1$

$$A_1=\int_0^{\pi} sen(x)\,dx=[-\cos(x)]_0^{\pi}=-\cos(\pi)+\cos(0)=1+1=2 \quad\rightarrow\quad A=4\ u^2$$