Teoría – Tema 6

Ecuación lineal

Una ecuación lineal de n-incógnitas es una igualdad de la forma:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \ldots + a_n x_n = c$$

Donde $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, c$ son números reales.

En tres dimensiones suele expresarse $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$.

Sistema de ecuaciones lineales

Un sistema de m-ecuaciones lineales y n-incógnitas es un conjunto de ecuaciones lineales $m \times n$:

$$\left(\begin{array}{c} a_{11} x_1 + a_{12} x_2 + a_{13} x_3 + \ldots + a_{1\mathrm{n}} x_n = c_1 \\ a_{21} x_1 + a_{22} x_2 + a_{23} x_3 + \ldots + a_{2\mathrm{n}} x_n = c_2 \\ a_{31} x_1 + a_{32} x_2 + a_{33} x_3 + \ldots + a_{3\mathrm{n}} x_n = c_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1} x_1 + a_{m2} x_2 + a_{m3} x_3 + \ldots + a_{mn} x_n = c_m \end{array} \right)$$

$a_{ij} \rightarrow$ coeficiente de la ecuación i de de la incógnita j

$c_i \rightarrow$ término independiente de la ecuación i

Notación matricial

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow \text{Forma matricial del sistema}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & c_m \end{array}\right) \rightarrow \text{Matriz ampliada del sistema}$$

Diagonal principal del sistema de ecuaciones

Dado un sistema:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & c_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & c_m \end{array}\right)$$

Su diagonal principal está formada por los coeficientes que tienen el mismo número de fila que de columna:

$$a_{11}, a_{22}, a_{33}, \dots, a_{mm}$$

Clasificación de sistemas de ecuaciones (parte 1 de 2)

Sea un sistema de m ecuaciones y n incógnitas.

Si $m=n$ tendremos una **matriz del sistema cuadrada**, es con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.

Si $m\neq n$ tendremos una **matriz del sistema rectangular**, donde el número de ecuaciones no coincide con el número de incógnitas (puede haber más ecuaciones que incógnitas, o más incógnitas que ecuaciones).

Si todos los términos independientes son nulos, hablaremos de **sistema homogéneo**.

Dos sistemas de ecuaciones con las mismas soluciones son **equivalentes**.

Clasificación de sistemas de ecuaciones (parte 2 de 2)

Si el sistema posee solución, hablamos de **sistema compatible**. Si no hay solución, **sistema incompatible**.

Si existe solución y es única, tendremos **sistema compatible determinado (S.C.D.)**.

Si existen infinitas soluciones posibles, según el valor de al menos un parámetro libre, hablaremos de **sistema compatible indeterminado (S.C.I.)**.

Si no hay solución, por aparecer absurdos matemáticos, tendremos **sistema incompatible (S.I.)**

Los sistemas homogéneros siempre tienen, al menos, la solución trivial: $x=0$, $y=0$, $z=0,\ldots$

Resolución de un sistema por el método de Gauss

Supongamos, por simpleza, un sistema de tres ecuaciones lineales y tres incógnitas.

Resolverlo por Gauss significa aplicar, de manera recurrente, el método de reducción. Hasta conseguir hacer nulos los coeficientes que se encuentran por debajo o por encima de la diagonal principal.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ 0 & a_{22} & a_{33} & c_2 \\ 0 & 0 & a_{33} & c_3 \end{array}\right) \rightarrow \text{Despejar una incógnita de cada fila}$$

Transformaciones lineales permitidas en el método de Gauss (parte 1 de 2)

- Multiplicar una fila por un número real, no nulo
- Cambiar el orden de las ecuaciones. Es decir, cambiar el orden de las filas de la matriz.
- Cambiar el orden de las incógnitas en todas las ecuaciones. Es decir, cambiar el orden de las columnas de la matriz.
- Sumar/Restar dos filas entre sí, multiplicadas cada una por números reales: $F'_i = a \cdot F_i + b \cdot F_j$, $a \neq 0$. **¡Ojo, no aplicar transformaciones con $a=0$!**

Transformaciones lineales permitidas en el método de Gauss (parte 2 de 2)

- Eliminar una fila con todos los términos nulos.
- Si hay dos filas iguales, se puede eliminar una.
- Si hay dos filas proporcionales, se puede eliminar una.
- Si hay tres filas en combinación lineal, se puede eliminar una. **Una ecuación es combinación lineal de las demás cuando puede expresarse como suma de algunas de las otras ecuaciones multiplicadas por números:** $F_i = a \cdot F_j + b \cdot F_k \rightarrow$ F_i es combinación lineal de F_j y F_k .

Rango de un sistema de ecuaciones lineales

El rango de un sistema de ecuaciones, **tras aplicar Gauss y comprobar la ausencia de absurdos matemáticos**, es el número de ecuaciones sin coeficientes nulos.

Ejemplo de absurdo matemático: $1=0$

El rango nunca puede ser mayor que el número de incógnitas del sistema.

Rango y tipos de soluciones de un sistema

Si, tras aplicar Gauss, encontramos al menos una fila con un absurdo matemático, el sistema no tiene solución (S.I.).

Si, tras aplicar Gauss y comprobar la ausencia de absurdos matemáticos, el rango coincide con el número de incógnitas, el sistema tendrá solución única (S.C.D.).

Si, tras aplicar Gauss y comprobar la ausencia de absurdos matemáticos, el rango es inferior al número de incógnitas, el sistema tendrá infinitas soluciones (S.C.I.). Siendo la diferencia entre incógnitas y rango el número de parámetros libres del sistema.

Cada vez que resolvamos por Gauss, no debemos olvidar explicar adecuadamente esta teoría.

Visión geométrica de los parámetros libres en sistemas 3x3

Sea un sistema lineal 3x3 de rango 2. La diferencia 3 - 2 = 1 coincide con el número de parámetros libres del sistema (o grados de libertad). Geométricamente, la solución forma una recta (el grado de libertad es un vector paralelo a la recta).

Sea un sistema lineal 3x3 de rango 1. La diferencia 3 - 1 = 2 coincide con el número de parámetros libres del sistema (o grados de libertad). Geométricamente, la solución forma una plano (los dos grados de libertad son dos vectores paralelos al plano).

Discutir soluciones según el valor de un parámetro que aparece en los coeficientes del sistema

Ejemplo: $$\begin{cases} x+y+(m+1)z=2 \\ x+(m-1)y+2z=1 \\ 2x+my+z=-1 \end{cases}$$

Procedimiento a seguir:

1. Aplicar método de Gauss para obtener la matriz triangular.

2. Igualar a cero todos los coeficientes de la diagonal principal que dependan del parámetro m. Obtener valor de m en esos coeficientes.

3. Si hay fila de coeficientes nulos, donde el término independiente también dependa de m, igualar el coeficiente a cero y obtener el valor de m.

4. Realizar discusión de casos según los valores de m. Ojo con posiles valores que inhabiliten las transformaciones aplicadas en Gauss.

Eliminar parámetros de las soluciones de un sistema (parte 1 de 2)

Estamos acostumbrados a que nos den un sistema de ecuaciones, y debamos calcular su solución, ¿verdad?

Y ya sabemos que, en algunos casos, el sistema posee infinitas soluciones y aparecen uno o más parámetros libres en las soluciones.

Ahora vamos a proceder de manera inversa: **nos dan las soluciones de un sistema SCI y debemos obtener el sistema de partida**. Y en ese sistema no deben aparecer los parámetros libres. ¿Cómo se hace?

Consideramos los parámetros como incógnitas, aplicamos Gauss y exigimos que el sistema sea compatible (es decir, que no posea ningún absurdo matemático).

Eliminar parámetros de las soluciones de un sistema (parte 2 de 2)

Ejemplo:

Eliminar los parámetros del sisguiente sistema:

$$\left\{\begin{array}{c} x=-p+3q \\ y=p-2q \\ z=p+q \\ t=2q \end{array}\right\}$$

Resolver sistema por Gauss-Jordan

El método de Gauss-Jordan consiste en aplicar el método de Gauss tanto por debajo como por encima de la diagonal principal. De esta forma, al tener una matriz de coeficiente diagonal, podremos despejar directamente de cada fila una incógnita.

Matrices (parte 1 de 3)

Una matriz es una entidad matemática formada por coeficientes organizados en filas y columnas.

$$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 7 & 7 & -10 \end{pmatrix}$$

No es un sistema de ecuaciones 3x3, no nos líemos. Es una matriz de 3 filas y 3 columnas.

Cada fila o cada columna de una matriz se pueden ver como las componentes de un vector. Por lo tanto, **una matriz es una forma de expresar un conjunto de vectores**.

Matrices (parte 2 de 3)

Una **matriz cuadrada** tiene mismo número de filas que de columnas. Hablaremos de matrices cuadradas de orden n (donde n es el número de filas y columnas).

Una **matriz rectangular** tiene distinto número de filas que de columnas. Hablaremos de matrices rectangulares de orden $m\times n$ (donde m es el número de filas y n el número de columnas).

Dos matrices son iguales si podeen el mism orden y sus coeficientes son iguales uno a uno. Es decir:

$A=B$ si $(a_{ij})=(b_{ij}), \ \forall i , j$.

Matrices (parte 3 de 3)

Dada la matriz $A=(a_{ij})$ de orden $m \times n$, se llama **traspuesta** de A y la representamos por A^t, a la matriz que se obtiene cambiando filas por columnas.

Una **matriz simétrica** es una matriz cuadrada que coincide con su traspuesta. Es decir: $A=A^t$. Es obvio que solo las matrices cuadradas pueden ser simétricas.

Si $A=-A^t$ se dice que A es **antisimétrica**.

La **matriz identidad o unidad de orden n** es una matriz cuadrada de n-filas y n-columnas, donde todos los coeficientes son nulos, salvo los de la diagonal principal que valen 1. Se representa por la letra I.

Producto de un número por una matriz

Si multiplico un número $k \in \mathbb{R}$ por una matriz A, simplemente debo multiplicar cada coeficiente de la matriz por el número.

Ejemplo:

$$k=2\ ,\ A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 7 & 7 & -10 \end{pmatrix} \rightarrow 2\cdot A=\begin{pmatrix} 4 & -2 & 10 \\ 2 & -2 & 6 \\ 14 & 14 & -20 \end{pmatrix}$$

Suma y resta de matrices

Solo podemos sumar/restar matrices que coincidan en el número de filas y en el número de columnas. Es decir, puedo operar $A+B$ si el número de filas de A coincide con el número de filas de B, y si el número de columnas de A coincide con el número de columnas de B

¿Y cómo se suma/resta?

Término a termino.

Ejemplo:

$A=\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ Calcular $A+B$, $A-B$

Producto de matrices (parte 1 de 2)

El producto de matrices **no es conmutativo**. Es decir, por lo general: $A \cdot B \neq B \cdot A$.

Solo podemos multiplicar matrices donde el número de columnas de la primera coincida con el número de filas de la segunda. El resultado será una nueva matriz con el número de filas de la primera y el número de columnas de la segunda... vaya trabalenguas...

$$A_{m \times n} \cdot B_{n \times p} = C_{m \times p}$$

Producto de matrices (parte 2 de 2)

¿Cómo multiplicar?

Los coeficientes de la primera fila de la primer matriz se multiplican con los coeficientes de la primera columna de la segunda matriz, y se suman los resultados de cada producto.

Y así hasta terminar con todas las filas y columnas.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

División de matrices

No existe la división de matrices.

Jamás de los jamases podemos escribir una división de matrices. Never, never, never.

Escribir un sistema de ecuaciones como una ecuación de matrices

Dado un sistema de ecuaciones, por ejemplo de tres ecuaciones y tres incógnitas, podemos escribirlo como una ecuación de matrices.

$$\begin{cases} 2x+y+3z=1 \\ -2x+y+3z=-2 \\ 4x+6y-z=4 \end{cases} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 1 & 3 \\ 4 & 6 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \rightarrow A \cdot X = C$$

Donde A es la matriz de coeficientes, X la matriz de incógnitas y C la matriz de términos independientes.

Matriz identidad o matriz unidad

Una matriz identidad de orden n, es un matriz cuadrada de n-filas y n-columnas donde todos los coeficientes son nulos, salvo los de la diagonal principal que valen 1.

En dos dimensiones → $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

En tres dimensiones → $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Cualquier matriz multiplicada por la identidad, da la matriz de partida → $A\cdot I=I\cdot A=A$

Matriz inversa de una matriz cuadrada y utilidad para resolver sistemas de ecuaciones SCD con solución única (parte 1 de 3)

Dada una matriz cuadrada de orden n llamada A, se define su matriz inversa A^{-1} como aquella que cumple:

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I \rightarrow$ **Si existe, la inversa es única.**

Es decir: **la matriz A por su inversa A^{-1}, da la matriz identidad. Y la matriz inversa A^{-1} por la matriz A da la matriz identidad**.

Propiedades:

$$\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$$

$$\left(A+B\right)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$$

$$\left(A \cdot B\right)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

Matriz inversa de una matriz cuadrada y utilidad para resolver sistemas de ecuaciones SCD con solución única (parte 2 de 3)

¿Qué utilidad podemos sacar a la matriz inversa?

Para despejar sistemas de ecuaciones que sean SCD.

Si ese sistema se puede expresar con la ecuación matricial:

$$A \cdot X = C$$

Si multiplicamos por la izquierda por A^{-1} (**muyyyyyy importante el lado por donde se multiplica**), podremos despejar la matriz de incógnitas.

$$A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} C \rightarrow I \cdot X = A^{-1} C \rightarrow X = A^{-1} C$$

Matriz inversa de una matriz cuadrada y utilidad para resolver sistemas de ecuaciones SCD con solución única (parte 3 de 3)

Ejemplos:

Practica aplicando matriz inversa para despejar la matriz de incógnitas X .

a) $X \cdot A = C$

b) $A \cdot X + B = C$

c) $(A + B) \cdot X = C$

d) $A \cdot X + X = C$

e) $X \cdot A + X = C$

Rango y matriz inversa (parte 1 de 2)

¿Todas la matrices admiten inversa?

No, solo las matrices cuadradas pueden tener inversa.

¿Todas la matrices cuadradas admiten inversa?

No, **solo aquellas matrices cuadradas de orden n cuyo rango sea igual a n**.

¿Y cómo obtener el rango de una matriz?

Aplicando el método de Gauss y comprobando cuantas filas no nulas quedan tras obtener la matriz triangular.

Es decir, una matriz cuadrada de orden 2 admite inversa si su rango es 2. Una matriz cuadrada de orden 3 admite inversa si su rango es 3. Etc.

Rango y matriz inversa (parte 2 de 2)

Ejemplos:

Comprueba el rango de las siguientes matrices cuadradas y decide si admiten o no inversa:

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & k \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ Discusión de casos según valor de k

Obtener inversa por método directo

Si aplicamos la definición de matriz inversa, podemos plantear un sistema de ecuaciones cuyas incógnitas sean los coeficientes de la matriz inversa.

Este método es especialmente práctico en matrices de dimensión 2.

Ejemplos: Obtener la inversa de las siguientes matrices.

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Obtener inversa por Gauss-Jordan

Este método consiste pasar, mediante transformaciones lineales entre las filas, del par matricial $A|I$ al par matricial $I|A^{-1}$.

Ejemplos:

Obtener la inversa de las siguientes matrices.

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

b) $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Matriz traspuesta

Dada una matriz $A_{m\times n}$ de m-filas y n-columnas, su matriz traspuesta A^t es la resultante de **intercambiar sus filas por sus columnas**.

Cualquier matriz admite traspuesta.

Propiedades:

$$\left(A^{-1}\right)^t=\left(A^t\right)^{-1}$$

$$\left(A+B\right)^t=A^t+B^t$$

$$\left(A\cdot B\right)^t=B^t\cdot A^t$$

$$Rango\left(A\right)=Rango\left(A^t\right)$$

$Si\ \ A^{-1}=A^t \rightarrow$ Se dice que la matriz A es ortogonal

Matriz como conjunto de vectores (parte 1 de 3)

Además de estudiar los sistemas de ecuaciones con notación matricial, hemos definido las matrices como entidades matemáticas de números distribuidos en filas y columnas.

Podemos ver las filas (o las columnas) como vectores. Así, cada coeficiente sería la componente de un vector.

Algunas cosas interesantes a recordar sobre vectores (que ya vimos en 1ºBachillerato y que ampliaremos en el bloque de Geometría tridimensional)

- En vectores de n-componentes, el máximo rango posible es n.

Matriz como conjunto de vectores (parte 2 de 3)

- Si n-vectores tienen rango n, son linealmente independientes. En caso contrario, son linealmente dependientes.
- Si n-vectores con n-componentes tienen rango n, forman una base, que es la forma más compacta posible de representar cualquier vector del espacio vectorial de dimensión n.
- El rango de una matriz coincide con el número de vectores linealmente independientes que la forman.
- En una matriz $A_{m \times n}$ el rango puede ser, como máximo, igual al menor valor entre m y n

Matriz como conjunto de vectores (parte 3 de 3)

Ejemplos:

Estudia el rango de los siguientes vectores según k :

a) $\vec{u}=(1,7)$, $\vec{v}=(k,-10)$

b) $\vec{u}=(1,0,1)$, $\vec{v}=(4,6,0)$ y $\vec{w}=(5,6,k)$

Concepto de submatriz

Dada una matriz A , una submatriz es cualquier matriz contenida dentro de la matriz A .

Si la submatriz es cuadrada con n-filas y n-columnas, se habla de submatriz de orden n.

Por ejemplo:

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Cuántas submatrices de orden 1 posee?

¿Cuánta submatrices de orden 2 posee?

¿Cuánta submatrices de orden 3 posee?

Sistemas de ecuaciones matriciales

Se resuelve como cualquier sistema, sabiendo que las incógnitas son matrices.

Ejemplo:

Resolver el siguiente sistema de ecuaciones matriciales.

$$X+Y=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2X-Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Matriz n-ésima (parte 1 de 2)

Dada una matriz, ¿cuál será la matriz resultante si la elevo a un exponente n?

Para ello, recurrimos a un viejo amigo: la demostración por inducción. Planteamos una hipótesis para A^n y:

1. Comprobamos que se cumple para n=1.
2. Suponemos cierto para n.
3. Demostramos el término (n+1) a partir de término n y del término n=1.

Matriz n-ésima (parte 2 de 2)

Ejemplo: Calcular A^n , con $n \in \mathbb{N}$.

a) $A=\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ b) $A=\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ c) $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Ejemplo: Sea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular $A+A^2+A^3+..+A^n$

Ejemplo: Sea $A=\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Calcular $A+A^2+A^3+..+A^n$