Teoría – Tema 7

Ecuaciones y sistemas matriciales

Índice de contenido

Matriz considerada como incógnita

Si todos los coeficientes de una matriz X son incógnitas desconocidas, podemos considerar esa matriz como una incógnita en la ecuación matricial:

$$A \cdot X = B$$

Donde A y B son matrices de coeficientes conocidos, y siendo A una matriz multiplicable por X .

¿Cómo podemos resolver estas ecuaciones matriciales? Despejando la matriz X , y recordando que el cociente de matrices no está definido y debemos trabajar con matrices inversa, de la forma:

$$A \cdot X = B \;\rightarrow\; A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot B \;\rightarrow\; I \cdot X = A^{-1} \cdot B \;\rightarrow\; X = A^{-1} \cdot B$$

Donde hemos aplicado que, si existe la inversa de una matriz, el producto $A^{-1} \cdot A = I$ es igual a la matriz identidad. Fíjate que hemos aplicado la matriz inversa A^{-1} por la izquierda de la matriz A , y esto implica que A^{-1} también se aplica por la izquierda de la matriz B (ya que el producto de matrices no es conmutativo).

Una consecuencia importante: si no existe la matriz inversa A^{-1} , la ecuación matricial no tiene solución.

Ejemplo

Resolver $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix}$.

Donde la inversa de $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ resulta $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Por lo tanto:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{-1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \;\rightarrow\; X = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ \frac{5}{2} & -2 \end{pmatrix}$$

Sistemas de ecuaciones matriciales

Si trabajamos, de manera simultánea, con más de una ecuación matricial hablaremos de sistemas de ecuaciones matriciales.

Estos sistemas se resuelven como los sistemas de ecuaciones lineales clásicos, considerando las propiedades propias de las matrices (tal y como hemos indicado en el apartado anterior sobre ecuaciones matriciales).

Ejemplo

Resuelve el sistema.

$$X+Y=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$2X-Y=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$$

Sumamos ambas ecuaciones.

$$3X=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow 3X=\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow X=\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \rightarrow X=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Una vez obtenido el valor de X podemos obtener el valor de Y de la primera ecuación del sistema de partida.

$$Y=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}-X \rightarrow Y=\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow Y=\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Pasar de sistemas de ecuaciones lineales a sistemas de ecuaciones matriciales

Todos los problemas de ecuaciones lineales, que tradicionalmente hemos resuelto por los métodos de reducción, igualación y sustituición, o aplicando los métodos de Gauss o Gauss-Jordan, son susceptibles de ser tratados matricialmente.

Podemos definir una matriz de coeficientes, otra matriz de incógnitas y una tercera matriz de términos independientes, para obtener una ecuación matricial. Por ejemplo (para sistemas 3×3):

$$\begin{Bmatrix} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z=c_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z=c_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z=c_3 \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \rightarrow A\cdot X=C$$

Si la matriz A admite inversa, el sistema de ecuaciones se resuelve como una ecuación matricial → $X=A^{-1}\cdot C$.

Ejemplo

Resolver el sistema $\begin{Bmatrix} 5x+2y=12 \\ z=-1 \\ 3x+y=7 \end{Bmatrix}$ planteando una ecuación matricial.

$\begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$ → Aplicando matriz inversa → $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}$

Obtenemos como solución única (S.C.D.):

$$x=2$$
$$y=1$$
$$z=-1$$