Teoría – Tema 6

Rango de una matriz

Índice de contenido

Concepto de rango

Ya sabemos que podemos ver una matriz como una composición de filas, y cada fila como un vector. O lo que es lo mismo: podemos ver la matriz como una composición de columnas, y cada como columna como un vector.

Una matriz A de orden $m \times n$ podemos verla formada por m vectores fila o por n vectores columna.

Ejemplo

Los vectores $\vec{u}=(0,2,1)$ y $\vec{v}=(2,3,1)$ dan lugar a una matriz de vectores filas $A=\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ o bien a una matriz de vectores columnas $A^t=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$.

El rango de una matriz es el número máximo de vectores linealmente independientes que la forman. Y este estudio podemos hacerlo por filas o por columnas, es indistinto, ya que el rango en ambos casos coincide. Es decir: **el rango de una matriz coincide con el rango de su traspuesta**.

$$rango(A)=rango(A^t)$$

Normalmente estudiaremos el rango por filas si el número de filas es menor que el de columnas, y el rango por columnas en caso contrario.

Si recordamos la definición de vectores linealmente independientes, llegamos a un sistema de ecuaciones homogéneo. Un conjunto de vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$,..., $\vec{u}_n$ de un espacio vectorial son **linealmente independientes** si cumplen:

$\alpha \cdot \vec{u}_1 + \beta \cdot \vec{u}_2 + \gamma \cdot \vec{u}_3 + ... + \delta \cdot \vec{u}_n = \vec{0}$ $\rightarrow$ con $\alpha=\beta=\gamma=...=\delta=0$ $\rightarrow$ Todos los coeficientes nulos.

El sistema homogéneo resultante podemos resolverlo por Gauss, y el número de filas (o columnas) independientes darán lugar al rango de la matriz asociada.

Estos **sistemas homogéneos siempre tendrán solución**: si son S.C.D. tendrán como solución única la trivial, y si son S.C.I. tendrán infinitas soluciones con parámetros de ligadura. El número de filas libres, es decir, el número de vectores que no sean combinación lineal de otros vectores es el rango.

En el estudio del rango podemos aplicar las transformaciones ya conocidas en el estudio de sistemas de ecuaciones por el método de Gauss: intercambiar filas, intercambiar columnas, etc. Estas transformaciones siempre dejan como 0 todos los términos independientes de la última columna de la matriz ampliada. Por eso, a la hora de determinar el rango, **es costumbre trabajar sin la columna final de términos independientes nulos**. Pero no debemos olvidar que, en el fondo, la determinación del rango no es más que plantear el sistema homogéneo de la definición de independencia lineal.

Ejemplo

Calcula el rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \\ 2 & -1 & 5 & -9 \end{pmatrix}$.

Aplicando transformaciones para triangular la matriz por el método de Gauss, llegamos al sistema equivalente $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ → Y sabemos que una fila con todos los términos nulos indica que esa fila es combinación lineal de las otras. Por lo tanto, podemos obviar la tercera fila → $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 5 & 1 & 7 \end{pmatrix}$ → Donde tenemos dos vectores independientes → rango de la matriz es 2 → $rango(A)=2$.

Rango e inversa de una matriz cuadrada

Una primera aplicación del concepto de rango es el siguiente: **una matriz cuadrada de orden n tiene inversa si, y solo si, su rango es n.**

Ejemplo

Calcula el rango de la matriz cuadrada $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ de orden $n=3$.

Aplicando transformaciones para triangular la matriz por el método de Gauss, llegamos al sistema equivalente $\rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ F_3 es combinación lineal de las otras filas $\rightarrow$

Llegamos al sistema equivalente $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ Dos ecuaciones (vectores) linealmente independientes $\rightarrow$ $rango(A)=2\neq 3$ $\rightarrow$ No existe matriz inversa.

En efecto, si intentamos obtener la matriz inversa por alguno de los dos métodos explicados en clase (método directo o método de Gauss-Jordan), se llega a una incongruencia.

Por lo tanto, si nos preguntan decidir si una matriz cuadrada admite o no inversa, estudiamos su rango. Y si nos piden obtener la matriz inversa, aplicamos el método directo o bien el método de Gauss-Jordan.

Ejemplo

¿Posee inversa la matriz cuadrada $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$? En caso afirmativo, obtenerla.

Aplicamos transformaciones elementales para estudiar su rango, y obtenemos la matriz equivalente $\rightarrow$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ $rango(A)=3=orden\ de\ la\ matriz$ $\rightarrow$ Existe la matriz inversa. Podemos aplicar el método de Gauss-Jordan para determinar la inversa:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{-1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{-1}{4} & -1 & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right)$$