Teoría – Tema 7

Matrices como conjunto de vectores

Índice de contenido

El espacio vectorial n-dimensional

Vamos a **repasar, de manera concisa,** la teoría de vectores y espacios vectoriales trabajados el curso pasado en 1ºBachillerato. Para un estudio completo, con demostraciones rigurosas y ejemplos, recomiendo **visitar la sección de la web de la asignatura destinado a vectores en 1ºBachillerato**: http://danipartal.net/matematicas-I.php

El curso pasado trabajamos principalmente en dos dimensiones (V^2). Este curso lo haremos en tres dimensiones (V^3). Por lo general, podemos hacerlo para n-dimensiones (V^n).

El objeto de repasar, en el tema de 2ºBachillerato sobre matrices, los contenidos de espacios vectoriales es triple:

- Comprender una matriz como un conjunto de vectores filas o vectores columnas.
- Aplicar los conceptos de dependencia e independencia lineal de vectores en una resolución más eficiente de los problemas clásicos de sistemas de ecuaciones.
- Preparar el terreno al último bloque de contenidos del curso: geometría en tres dimensiones.

En 3 dimensiones, hablamos de puntos tridimensionales. Es decir, con tres coordenadas. Estas coordenadas suelen representarse gracias a tres ejes perpendiculares entre sí: eje OX, eje OY, eje OZ.

Dos puntos son iguales si sus componentes son iguales y están en el mismo orden.

$(a,b,c),(d,e,f)\in\mathbb{R}^3$

$(a,b,c)=(d,e,f)$ <==> $a=d,b=e,c=f$

Por lo tanto, un punto viene representado por una terna de valores ordenados: un primer valor para el eje OX, un segundo valor para el eje OY y un tercer valor para el eje OZ.

Estos puntos son elementos de $\mathbb{R}^3$ y admiten una **operación interna llamada suma**.

Suma de elementos de R^3

$(a,b,c),(d,e,f)\in\mathbb{R}^3$

$(a,b,c)+(d,e,f)=(a+d,b+e,c+f)\in\mathbb{R}^3$

También podemos definir una operación externa: producto de un escalar por un punto tridimensional.

Producto de escalar por terna ordenada

$k \in \mathbb{R}$ → escalar

$(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ → terna ordenada

$k \cdot (a,b,c) = (k \cdot a, k \cdot b, k \cdot c) \in \mathbb{R}^3$

El paso de la terna ordenada de los puntos de $\mathbb{R}^3$ al concepto de vector en tridimensional es inmediato.

Definición de vector

Dados dos puntos A y B, llamamos vector $\vec{AB}$ al segmento orientado que va del punto A al punto B. Al punto A se le llama **origen** del vector, y al punto B **extremo**.

Dados dos puntos $A(a_x, a_y, a_z)$ y $B(b_x, b_y, b_z)$, las coordenadas del vector $\vec{AB}$ vienen dadas por:

$x = b_x - a_x$

$y = b_y - a_y$

$y = b_z - a_z$

$\vec{AB} = (x, y, z)$

Otra opción sería representar el vector con una **letra minúcula**: $\vec{u} = (x, y, z)$. En este caso asumimos que trabajamos con el representante canónico del vector, con origen el punto $O(0,0)$ y extremo $P = (x, y)$, de tal forma que las coordenadas del vector se obtienen aplicando las siguientes diferencias: $\vec{u} = \vec{OP} = (x-0, y-0, z-0) = (x, y, z)$.

Estos vectores ya no son puntos de $\mathbb{R}^3$, sino que se forman a partir de puntos de $\mathbb{R}^3$. Y en su formación aparecen los conceptos ya conocidos de módulo, dirección y sentido.

El **módulo** del vector es la longitud del segmento determinado por los puntos origen y extremo.

La **dirección** es la recta que une los puntos origen y extremo, y la de sus rectas paralelas.

El **sentido** es el del recorrido desde el origen al extremo.

Y estos vectores pueden sumarse de manera análoga a como sumamos puntos en $\mathbb{R}^3$ y pueden ser multiplicados por un escalar. Hablaremos pues de una nueva entidad matemática: el espacio vectorial $(V^3,+,\cdot)$ con su operación interna suma de vectores y su operación externa producto de escalar por vector. Los elementos de V^3 ya no son una terna ordenada, sino vectores. Es decir, $\vec{u}\in V^3$.

Todo lo dicho hasta aquí es valido para n-dimensiones, dando lugar el espacio vectorial $(V^n,+,\cdot)$.

La dirección del vector $\vec{u}=(x,y,z)$ es la marcada por la recta que une sus dos extremos .

El sentido del vector apunta del origen al final .

El módulo es la longitud del vector, que en tres dimensiones resulta una expresión análoga a la de dos dimensiones:

$$\text{módulo}\equiv|\vec{u}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

Un vector $\vec{u}$ es unitario si **su módulo es la unidad** <==> $|\vec{u}|=1$

Si en un vector arbitrario $\vec{u}$ no unitario, dividimos cada componente por su módulo, el resultado es un nuevo vector con la misma dirección y sentido que $\vec{u}$ pero de módulo unidad. A este proceso se le denomina **normalización de un vector**.

Es costumbre representar los vectores unitarios de la forma $\hat{u}$, en vez de con la flecha tradicional de vector.

$$\text{vector unitario}\equiv\hat{u}=\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}$$

Combinación lineal de vectores y sistema generador

Sea el vector $\vec{u} \in V^3$. Decimos que es **combinación lineal** de otros tres vectores $\vec{v}\,,\ \vec{w}\,, \vec{t} \in V^3$ si podemos expresar $\vec{u}$ de la forma:

$$\vec{u} = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w} + \gamma \cdot \vec{t}$$

Un conjunto de vectores se dice que es un **sistema generador** de los vectores del espacio vectorial al que pertenecen, si cualquier vector de dicho espacio puede expresarse como combinación lineal de ese conjunto de vectores.

En tres dimensiones, diremos que el conjunto formado por $\vec{v}$, $\vec{w}$ y $\vec{t}$ son un sistema generador en V^3 si para cualquier vector $\vec{u} = (x\,,\,y\,,\,z) \in V^3$ se cumple:

$$(x\,,\,y\,,\,z) = \alpha \cdot \vec{v} + \beta \cdot \vec{w} + \gamma \cdot \vec{t}$$

En general, para un sistema generador en V^n necesitaremos al menos n-vectores.

Dependencia e independencia lineal

Un conjunto de vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ del espacio vectorial tridimensional son **linealmente dependientes** si cumplen:

$\alpha\cdot\vec{u}_1+\beta\cdot\vec{u}_2+\gamma\cdot\vec{u}_3=\vec{0}$ → con al menos un coeficiente α,β,γ no nulo.

A un sistema de vectores linealmente dependientes se le denomina **sistema ligado de vectores**. El factor $\vec{0}$ indica el vector nulo.

Un conjunto de vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ del espacio vectorial tridimensional son **linealmente independientes** si se cumple:

$\alpha\cdot\vec{u}_1+\beta\cdot\vec{u}_2+\gamma\cdot\vec{u}_3=\vec{0}$ → con $\alpha=\beta=\gamma=0$ → Todos los coeficientes nulos.

A un sistema de vectores linealmente independientes se le denomina **sistema libre vectores**. El factor $\vec{0}$ indica el vector nulo.

Si aplicamos nuestros conocimientos en resolución de sistemas ecuaciones, podemos comprender que las definiciones de dependencia e independencia lineal generan sistemas de ecuaciones homogéneo. Y sabemos que un sistema homogéneo siempre tiene como válida la solución trivial $\alpha=\beta=\gamma=0$.

Pues bien, si el **sistema es compatible determinado** (solución única $\alpha=\beta=\gamma=0$), estaremos ante **vectores linealmente independientes**.

Y si el sistema admite **infinitas soluciones (existen parámetros) será compatible indeterminado y estaremos ante vectores linealmente dependientes** (existe una ligadura entre ellos, marcada por los parámetros de ligadura).

Todo lo dicho puede generalizarse, obviamente, para el espacio vectorial n-dimensional V^n .

Bases de un espacio vectorial

Una base de un espacio vectorial es un conjunto de vectores que es **sistema generador y linealmente independiente**.

Definición de base de un espacio vectorial

Un conjunto de vectores $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$, $\vec{u}_3$ forman una base del espacio vectorial tridimensional si son un sistema generador y son linealmente independientes.

Un espacio vectorial posee infinitas bases. Todas las bases de un espacio vectorial están formadas por el mismo número de vectores. Este número es la **dimensión del espacio vectorial**.

En V^2 todas las bases estarán formadas por dos vectores. En V^3 todas las bases estarán formadas por tres vectores. En general, en V^n todas las bases estarán formadas por n-vectores.

Si los vectores que forman una base son **perpendiculares dos a dos**, decimos que nuestra base es **ortogonal**.

Si **además de ser perpendiculares dos a dos**, todos los vectores de la base son **unitarios**, hablaremos de base **ortonormal**.

Por definición, **toda base ortonormal es ortogonal**, pero no al revés.

¿Cuántas bases ortogonales tiene un espacio vectorial? Infinitas.

¿Cuántas bases ortonormales tiene un espacio vectorial? Infinitas.

¿Existe alguna "base ortonormal" de especial interés? Sí, aquella base formada por vectores unitarios con origen el sistema de referencia y dirección coincidente con los ejes cartesianos. Es la que se conoce como **base canónica** del espacio vectorial.

Base canónica

En $V^2 \rightarrow \hat{i}=(1,0)$, $\hat{j}=(0,1)$

En $V^3 \rightarrow \hat{i}=(1,0,0)$, $\hat{j}=(0,1,0)$, $\hat{k}=(0,0,1)$

…

En $V^n \rightarrow \hat{i}=(1,0,0,\ldots,0)$, $\hat{j}=(0,1,0,\ldots,0)$,…, $\hat{n}=(0,0,0,\ldots,1)$

Matrices como vectores filas o vectores columnas

¿Cómo aplicar la teoría de espacios vectoriales al trabajo con matrices?

Muy sencillo. Podemos ver una matriz como una composición de filas, y cada fila como un vector. O lo que es lo mismo: podemos ver la matriz como una composición de columnas, y cada como columna como un vector.

De esta manera, **conceptos que podemos aplicar a vectores podemos aplicarlos a las matrices que generan en su conjunto**.

Y hay un concepto importante de vectores: **independencia lineal**, que va a dar lugar al concepto de **rango**, que a su vez utilizaremos para determinar de una manera alternativa más eficiente dos realidades ya trabajadas y, que a veces, son algo tediosas de operar:

- Decidir si una matriz admite o no inversa, y calcularla.
- Discutir las posibles soluciones de un sistema de ecuaciones y resolverlo.

Pues... allá vamos!!