# Teoría – Tema 6

# Discusión de sistemas por el método de Gauss

## Índice de contenido

# Método de Gauss

El método de Gauss para resolver sistemas de ecuaciones lineales $m\times n$ consiste en aplicar repetidamente el método de reducción, hasta obtener un sistema escalonado o triangular equivalente.

Un **sistema triangular** es aquel que tiene nulos todos los coeficientes $a_{ij}$ que se encuentran por debajo o por encima de la **diagonal principal** de la matriz del sistema. La diagonal principal está formada por los coeficientes $a_{ii}$, $i=1,2,...,m$ (es decir, el número de la fila coincide con el número de la columna).

¿Cómo podemos obtener el sistema triangular equivalente? Aplicando las **operaciones de transformación** ya conocidas sobre la matriz del sistema: permutar filas, permutar columnas, multiplicar una fila por un número real no nulo, y sumar a una fila el valor de otras filas multiplicadas por números reales no nulos.

Si aplicamos el método de Gauss de manera sucesiva, podríamos hacer nulos todos los coeficientes que no pertenecen a la diagonal principal. Esto es conocido como **diagonalizar** la matriz del sistema, o también método de **Gauss-Jordan**.

**Ejemplo**

Resolver $\begin{Bmatrix} x-2y+4z=1 \\ 4x+y-z=-3 \\ 3x+y+2z=4 \end{Bmatrix}$

Matricial ampliada del sistema → $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & -1 & -3 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$

A la segunda fila le restamos cuatro veces la primera → $F'_2=F_2-4F_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 9 & -17 & -7 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right)$$

A la tercera fila le restamos tres veces la primera fila → $F'_3=F_3-3F_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 9 & -17 & -7 \\ 0 & 7 & -10 & 1 \end{array}\right)$$

La nueva tercera fila será el resultado de multiplicar por nueve la tercera fila y restarle la segunda multiplicada por siete → $F'_3=9\cdot F_3-7\cdot F_2$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 4 & 1 \\ 0 & 9 & -17 & -7 \\ 0 & 0 & 29 & 58 \end{array}\right)$$

De la tercera ecuación podemos despejar la solución particular para $z$.

$$29z=58 \quad \rightarrow \quad z=2$$

Sustituimos en la segunda ecuación para obtener $y$.

$$9y-17\cdot(2)=-7 \quad \rightarrow \quad y=3$$

Y de la primera obtenemos $x$.

$$x-2\cdot(3)+4\cdot(2)=1 \quad \rightarrow \quad x=-1$$

Hemos obtenido una solución particular para cada una de las incógnitas. Nuestra solución general es la tupla $(x,y,z)=(-1,3,2)$.

Esta tupla solución es la única permitida para el sistema, por lo que estamos ante un sistema compatible determinado.

# Discusión de sistemas por el método de Gauss

Si al obtener la matriz triangular equivalente a la matriz ampliada de partida, obtenemos una fila $i$ con todos los términos nulos salvo el término independiente $c_i \neq 0$, tendremos un **absurdo matemático o incongruencia**.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & c_1 \\ 0 & a_{22} & a_{33} & c_2 \\ 0 & 0 & 0 & c_3 \end{array}\right)$$ → Si $c_3 \neq 0$ en la tercera ecuación → $0+0+0=c_3$ → Absurdo

Por lo tanto, si con nuestras operaciones de transformación obtenemos un sistema triangular equivalente donde **aparece un absurdo matemático**, diremos que el **sistema no tiene solución → sistema incompatible**.

Si no obtenemos ningún absurdo matemático, el sistema siempre tendrá solución: será **compatible**.

Si $c_i = 0$ en la fila $i$ donde todos los términos son nulos, no estaremos ante una absurdo matemático, sino ante una igualdad $0=0$ que no aporta información nueva para obtener la solución del sistema. Diremos que la ecuación de la fila $i$ es **combinación lineal** de las otras ecuaciones. Y como no aporta información nueva, podremos desecharla en nuestras operaciones.

Si el sistema posee solución y el **número de filas no nulas en la matriz triangular coincide con el número de incógnitas**, el sistema tiene solución única, por lo que será **compatible determinado**.

Si el sistema posee solución y el **número de filas no nulas es menor que el número de incógnitas**, existen infinitas soluciones, por lo que el sistema es **compatible indeterminado**.

**Ejemplo**

Resolver $\left\{\begin{array}{c} x+y=5 \\ 2x-y=1 \\ -3x+2y=0 \end{array}\right\}$

Matriz ampliada del sistema $3 \times 2$ → $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & 0 \end{array}\right)$

Que podemos transformar por Gauss en el sistema triangular equivalente siguiente:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 5 \\ 0 & -15 & -45 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

El número de filas no nulas es dos, que coincide con el número de incógnitas → sistema compatible determinado.

Si lo resolvemos, obtenemos como solución única $x=2, y=3$ .

**Ejemplo**

Resolver $\left\{\begin{array}{c} x+y+z=4 \\ -x+2y-z=0 \\ 2x-y+2z=0 \end{array}\right\}$

Matriz ampliada del sistema $3\times3$ → $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right)$

Que podemos transformar por Gauss en el sistema triangular equivalente siguiente:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4 \\ 0 & 3 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$$

En la tercera ecuación llegamos a la incongruencia $0=-4$ → no hay solución → sistema incompatible.

**Ejemplo**

Resolver $\left\{\begin{array}{c} 3x-4y=2 \\ 12x-16y=8 \end{array}\right\}$

Matriz ampliada del sistema $2\times2$ → $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 2 \\ 12 & -16 & 8 \end{array}\right)$

Que podemos transformar por Gauss en el sistema triangular equivalente siguiente:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

En la segunda ecuación llegamos a la igualdad $0=0$ → la segunda ecuación es combinación lineal de la primera → infinitas soluciones → sistema compatible indeterminado. Cuando tenemos infinitas soluciones es común tomar una de las incógnitas como parámetro. Por ejemplo, si $y=\lambda$ → podemos expresar la incógnita $x$ en función del parámetro → $3x=2+4\cdot\lambda$ → $x=\dfrac{2+4\cdot\lambda}{3}$

# Sistemas que dependen de parámetros desconocidos

Es bastante común abordar problemas cuya solución implique un sistema lineal que dependa de uno o varios parámetros desconocidos $k_1, k_2 ... \in \mathbb{R}$ . Y estos parámetro aparecen al menos en una de las ecuaciones del sistema.

¿Cómo saber si el sistema tiene o no solución? Y si la tiene, ¿cuándo será compatible determinado y cuándo compatible indeterminado?

Deberemos aplicar lo aprendido en el apartado anterior, tras triangular la matriz ampliada: daremos valores a los parámetros desconocidos, de tal forma que si para algún valor se tiene un absurdo matemático, el sistema no tendrá solución. Y si existe solución, deberemos dictaminar cuántas filas no nulas existen según los posibles valores de los parámetros.

**Ejemplo**

Discutir las posibles solución según el parámetro $a$ en el sistema $\begin{Bmatrix} x-2y=4 \\ 3x+5y=1 \\ 8x-2y=a \end{Bmatrix}$

Matriz ampliada del sistema $3\times2$ $\rightarrow$ $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 5 & 1 \\ 8 & -2 & a \end{array}\right)$

Que podemos transformar por Gauss en el sistema triangular equivalente siguiente:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 11 & -11 \\ 0 & 0 & 11\cdot a-198 \end{array}\right)$$

Para obtener una incongruencia en la tercera fila, necesitamos que $11\cdot a-198\neq0$ . Es decir, si $a\neq\frac{198}{11}$ $\rightarrow$ $a\neq18$ → el sistema no tiene solución → sistema incompatible.

Si $a=18$ la matriz ampliada resulta:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 11 & -11 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

La tercera fila será combinación lineal de las otras dos. El número de filas no nulas que tenemos es dos, que coincide con el número de incógnitas → solución única → sistema compatible determinado, de solución general $x=2, y=-1$ .

**Ejemplo**

Discutir las soluciones según los parámetros $a$ y $b$ del sistema $\begin{cases} 3x-y=2 \\ 2x+a\cdot y=b \end{cases}$

Matriz ampliada del sistema $2\times 2$ $\rightarrow$ $\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ 2 & a & b \end{array}\right)$

Que podemos transformar por Gauss en el sistema triangular equivalente siguiente:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 3 & -1 & 2 \\ 0 & -2-3\cdot a & 4-3\cdot b \end{array}\right)$$

Una vez triangulada la matriz, debemos realizar una discusión de casos según los posibles valores de los parámetros $a$ y $b$ .

**Si** $-2-3\cdot a=0 \rightarrow a=\frac{-2}{3}$

- Si $4-3\cdot b=0 \rightarrow b=\frac{4}{3}$ → La última fila tendrá todos los términos nulos, por lo que solo habrá una fila con términos no nulos y dos incógnitas → Sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones → Podemos tomar como parámetro $y=\lambda$ → De esta forma la incógnita $x$ de la primera ecuación queda $3x=2+\lambda$ .

- Si $4-3\cdot b\neq 0 \rightarrow b\neq\frac{4}{3}$ → Tendremos una incongruencia en la última fila $0=4-3\cdot b$ , por lo que el sistema no tendrá solución → Sistema incompatible.

**Si** $-2-3\cdot a\neq 0 \rightarrow a\neq\frac{-2}{3}$

- Independientemente del valor de $b$ , la matriz triangular tendrá dos filas con términos no nulos y sin albergar ningún absurdo matemático o incongruencia → solución única → sistema compatible determinado para $a\neq\frac{-2}{3}$ y para cualquier valor de $b$ .

## Grados de libertad: sistemas compatibles indeterminados con incógnitas que se convierten en parámetros

En una matriz triangular $m\times n$ ya sabemos, al discutir las soluciones, que podemos tener un sistema compatible indeterminado con infinitas soluciones.

Si en la matriz triangular contamos con $m$ filas no nulas y $n$ columnas, el número de filas es menor que el número de columnas $(m<n)$ , y no aparece ningún absurdo matemático, podemos afirmar que el sistema posee $n-m$ grados de libertad. Y tendremos $n-m$ incógnitas que jugarán el papel de parámetros.

Estos parámetros podrán tomar, en principio, cualquier valor. Y en función de ese valor aparecen las infinitas soluciones del sistema.

**Ejemplo**

Resolver $\begin{Bmatrix} 2x+y-z=3 \\ 3x-2y+4z=0 \end{Bmatrix}$

Matriz ampliada del sistema $2\times 3$ $\rightarrow$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 3 & -2 & 4 & 0 \end{array}\right)$

Que podemos representar de forma triangular:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -7 & 11 & -9 \end{array}\right)$$

Donde tenemos dos filas no nulas y no aparece ninguna incongruencia matemática. Como el número de incógnitas es tres, estamos ante un sistema compatible indeterminado → infinitas soluciones.

Estas infinitas soluciones vienen determinadas, por ejemplo, por la tercera incógnita que pasará a ser un parámetro: $z=\lambda$ .

De esta forma, podemos expresar las otras dos incógnitas en función del parámetro $\lambda$ .

De la segunda fila de la matriz ampliada triangular obtenemos $y$ .

$$-7y+11\lambda=-9 \quad \rightarrow \quad y=\frac{9+11\lambda}{7}$$

Y de la primera fila de la matriz ampliada triangular obtenemos $x$ .

$$2x+y-\lambda=3 \quad \rightarrow \quad 2x=3-y+\lambda \quad \rightarrow \quad 2x=3-\frac{9+11\lambda}{7}+\lambda \quad \rightarrow \quad x=\frac{6-2\lambda}{7}$$

Para cada valor real que pueda tomar el parámetro $\lambda$ , tendremos una tupla solución para la pareja $(x,y)$ .

# Pasar de un sistema con parámetros a un sistema sin parámetros

¿Cómo podemos eliminar los parámetros de un sistema de ecuaciones?

En otras palabras, en un sistema con parámetros ¿es posible obtener un sistema equivalente, o una ecuación donde desaparezca la dependencia a estos parámetros?

Sí se puede. Debemos considerar los parámetros como incógnitas, aplicar el método de Gauss y exigir que el sistema sea compatible (es decir, que no posea ningún absurdo matemático).

**Ejemplo**

Eliminar los parámetros en el sistema $\begin{Bmatrix} x=-p+3q \\ y=p-2q \\ z=p+q \\ t=2q \end{Bmatrix}$

Consideramos los parámetros $p$ y $q$ como incógnitas y planetamos un sistema $4\times 2$ de matriz ampliada → $\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & x \\ 1 & -2 & y \\ 1 & 1 & z \\ 0 & 2 & t \end{array}\right)$

Que podemos representar de forma triangular anulando todos coeficientes $a_{ij}$ que se encuentren por debajo de la diagonal principal (formada por los términos $a_{11}$ y $a_{22}$ ).

$$\left(\begin{array}{cc|c} -1 & 3 & x \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & -3x-4y+z \\ 0 & 0 & -2x-2y+t \end{array}\right)$$

Para que el sistema sea compatible, no pueden aparecer absurdos matemáticos. Por lo que debemos exigir que las dos últimas filas tengan todos sus términos nulos. Es decir:

$$\begin{Bmatrix} -3x-4y+z=0 \\ -2x-2y+t=0 \end{Bmatrix}$$

Este sistema $2\times 4$ es equivalente al de partida y no contiene parámetros $p$ y $q$ .