Teoría – Tema 6

Sistemas de ecuaciones lineales

Índice de contenido

¿Qué es una ecuación lineal?

Una ecuación lineal es una igualdad de la forma:

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + ... + a_n x_n = c$$

Donde los términos $a_1, a_2, a_3, ..., a_n$ son los **coeficientes reales** que acompañan a las **incógnitas** $x_1, x_2, x_3, ..., x_n$ respectivamente. Y c es el **término independiente** de la igualdad (no acompaña a ninguna incógnita).

La solución de una ecuación lineal es el conjunto de valores $x_1 = \alpha_1, x_2 = \alpha_2, x_3 = \alpha_3, ..., x_n = \alpha_n$ que satisface la igualdad. A este conjunto de valores se llama **tupla solución**.

La tupla solución se denomina **solución general** de la ecuación. Un valor particular $x_i = \alpha_i$ que partenece a la tupla solución se denomina **solución particular**.

Si tenemos una ecuación lineal de dos incógnitas x_1, x_2 , su representación gráfica será una recta en el plano $(x_1 = x, x_2 = y)$.

Si tenemos una ecuación lineal de tres incógnitas x_1, x_2, x_3 , su representación gráfica será una plano en el sistema tridimensional $(x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z)$.

¿Qué es un sistema de ecuaciones lineales? Representación matricial

Un conjunto de m ecuaciones lineales con n incógnitas cada una, forma un sistema de ecuaciones lineales $m \times n$.

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3+\ldots+a_{1n}x_n=c_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3+\ldots+a_{2n}x_n=c_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3+\ldots+a_{3n}x_n=c_3 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+a_{m3}x_3+\ldots+a_{mn}x_n=c_m \end{pmatrix}$$

El término a_{ij} es el coeficiente de la ecuación i que acompaña a la incógnita x_j . El número i de la ecuación se denomina **fila**, y el valor j de la incógnita x_j se denomina **columna**.

Para representar el **sistema en forma matricial** tomamos únicamente los coeficientes a_{ij} y los ordenamos en filas y columnas:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{pmatrix} \rightarrow \text{Forma matricial del sistema}$$

Si incluimos en la representación matricial del sistema la columna de términos independientes c_i tendremos su **matriz ampliada**:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} & c_2 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} & c_m \end{array}\right) \rightarrow \text{Matriz ampliada del sistema}$$

Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales

Sea un sistema de ecuaciones $m \times n \rightarrow m$ ecuaciones, n incógnitas.

Si $m=n$ tendremos una **matriz cuadrada**, es decir, con el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.

Si $m \neq n$ tendremos una **matriz rectangular**, donde el número de ecuaciones no coincide con el número de incógnitas.

Si en la columna de términos independientes de la matriz ampliada todos los términos son nulos, hablaremos de **sistema homogéneo** $(c_i=0,\ i=1,2,...,m)$. Si al menos uno de los términos independientes es distinto de cero, tendremos un **sistema no homogéneo**.

Si el sistema posee solución, hablamos de **sistema compatible**. Si no posee solución, es un **sistema incompatible**.

Si existe solución y es única, tendremos **sistema compatible determinado (S.C.D.)**. Si existen infinitas soluciones posibles, según el valor de un parámetro, hablaremos de **sistema compatible indeterminado (S.C.I.)**.

En un sistema homogéneo con solución única, su tupla solución tendrá todos los valores particulares nulos: $x_1=0, x_2=0, x_3=0, ..., x_n=0$.

Dos sistemas de ecuaciones se dicen **equivalentes** si poseen las mismas soluciones. Para obtener sistemas equivalentes podemos realizar las siguientes **operaciones de transformación**:

- Multiplicar una ecuación del sistema de partida por un número real, no nulo.
- Cambiar el orden de las ecuaciones. Es decir, cambiar el orden de las filas de la matriz del sistema.
- Cambiar el orden de las incógnitas en todas las ecuaciones. Es decir, cambiar el orden de las columnas de la matriz del sistema.
- Sumar a una ecuación del sistema de partida otra ecuación multiplicada por un número real distinto de cero.
- Añadir o suprimir una ecuación que sea combinación lineal de las demás ecuaciones. **Una ecuación es combinación lineal de las demás cuando puede expresarse como suma de algunas de las otras ecuaciones multiplicadas por números distintos de cero** → $F_i=a \cdot F_j+b \cdot F_k \rightarrow F_i$ es combinación lineal de F_j y F_k .
- Despejar una incógnita de una de las ecuaciones y sustituirla en las demás.