Problemas – Tema 6

Solución a problemas de Sistemas de ecuaciones - Hoja 12 - Todos resueltos

Hoja 12. Problema 1

1. Los gastos diarios de tres estudiantes, Marta, Raúl y Pedro suman 51.5 euros. Si a los que gasta Marta se le suma el triple de la diferencia entre los gastos de Raúl y Pedro, obtenemos lo que gasta Pedro. Ocho veces la diferencia entre el gasto de Raúl y el de Marta es igual al gasto de Marta. ¿Cuánto gasta cada uno?

El enunciado del problema permite plantear un sistema de 3 ecuaciones y 3 incógnitas:

x → gastos de Marta

y → gastos de Raúl

z → gastos de Pedro

$$\begin{Bmatrix} x+y+z=51{,}5 \\ x+3(y-z)=z \\ 8(y-x)=x \end{Bmatrix} \rightarrow \begin{Bmatrix} x+y+z=51{,}5 \\ x+3y-4z=0 \\ -9x+8y=0 \end{Bmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 51{,}5 \\ 1 & 3 & -4 & 0 \\ -9 & 8 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Aplicamos las siguientes transformaciones: $F'_2=F_2-F_1$, $F'_3=F_3+9\cdot F_1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 51{,}5 \\ 0 & 2 & -5 & -51{,}5 \\ 0 & 17 & 9 & 463{,}5 \end{array}\right) \rightarrow F'_3=2\cdot F_3-17\cdot F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 51{,}5 \\ 0 & 2 & -5 & -51{,}5 \\ 0 & 0 & 103 & 1802{,}5 \end{array}\right)$$

Soluciones: $103z=1802{,}5 \rightarrow z=17{,}5\,€ \rightarrow y=18\,€ \rightarrow x=16\,€$

Hoja 12. Problema 2

2. Sea el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{matrix} a\cdot x+7y+5z=0 \\ x+a\cdot y+z=3 \\ y+z=-2 \end{matrix}\right\}$

a) Discutir sus posibles soluciones según el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$.

b) Resolver el sistema, si es posible, para $a=4$.

c) Resolver el sistema, si es posible, para $a=2$.

a) Planteamos la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 5 & 0 \\ 1 & a & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \rightarrow \text{intercambiamos } F_3 \text{ con } F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 1 & a & 1 & 3 \end{array}\right) \rightarrow F'_3=aF_3-F_1$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & a^2-7 & a-5 & 3a \end{array}\right) \rightarrow F'_3=F_3-(a^2-7)F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -a^2+a+2 & 2a^2+3a-14 \end{array}\right)$$

Discusión de casos:

- Si $-a^2+a+2=0 \rightarrow a=-1$, $a=2$
  - Si $a=-1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -15 \end{array}\right) \rightarrow$ Absurdo en F_3 → No hay solución → S.I.
  - Si $a=2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$ F_3 es combinación lineal de las otras filas → Infinitas soluciones → S.C.I.
- Si $a=0 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -15 \end{array}\right) \rightarrow$ Obtenemos un sistema equivalente de 3 ecuaciones y dos incógnitas y , z con solución única, que en el sistema inicial generan un único valor para x → S.C.D.
- En general, si $a\neq-1$, $a\neq2$ → Solución única → S.C.D.

b) Para $a=4 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 4 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -10 & 30 \end{array}\right) \rightarrow$ S.C.D. $\rightarrow \quad z=-3 \rightarrow \quad y=1 \rightarrow \quad x=2$

c) Para $a=2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 7 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$ S.C.I. $\rightarrow \quad x=\lambda \rightarrow \quad y=5+\lambda \rightarrow \quad z=-7-\lambda$

Hoja 13. Problema 3

3. Sea el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{matrix} x-y+m\cdot z=0 \\ m\cdot x+2y+z=0 \\ -x+y+2m\cdot z=0 \end{matrix}\right\}$

a) Discutir sus posibles soluciones según el valor del parámetro $m\in\mathbb{R}$.

b) Resolver el sistema, si es posible, para $m=-2$.

a) Planteamos la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & 0 \\ m & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 2\mathrm{m} & 0 \end{array}\right) \rightarrow F'_2=F_2-mF_1 \quad , \quad F'_3=F_3+F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & m & 0 \\ 0 & 2+m & 1-m^2 & 0 \\ 0 & 0 & 3\mathrm{m} & 0 \end{array}\right)$$

Discusión de casos:

- Si $m=0 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ → Infinitas soluciones → S.C.I.
- Si $m=-2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -6 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$ F_3 es combinación lineal de F_2 → obtenemos el sistema equivalente $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$ → Infinitas soluciones → S.C.I.
- Si $m\neq 0$, $m\neq -2$ → Solución única → S.C.D.

b) Para $m=-2$, como ya analizamos → $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right)$ → Infinitas soluciones → S.C.I. → $z=0$ → $y=\lambda$ → $x=\lambda$

Hoja 14. Problema 4

4. Sea el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{matrix} a\cdot x+(2a+1)y-az=1 \\ a\cdot x+y-a\cdot z=-2b \\ a\cdot y+(1-a)z=b \end{matrix}\right\}$

a) Discutir sus posibles soluciones según el valor de los parámetro $a,b\in\mathbb{R}$.

b) Resolver el sistema cuando sea compatible indeterminado.

c) Para $a=-1$ y $b=0$ el sistema es compatible determinado. Añadir una cuarta ecuación para que el nuevo sistema sea incompatible.

a) Planteamos la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} a & 2a+1 & -a & 1 \\ a & 1 & -a & -2b \\ 0 & a & 1-a & b \end{array}\right) \rightarrow F'_2=F_2-F_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2a+1 & -a & 1 \\ 0 & -2a & 0 & -2b-1 \\ 0 & a & 1-a & b \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow F'_3=2\cdot F_3+F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} a & 2a+1 & -a & 1 \\ 0 & -2a & 0 & -2b-1 \\ 0 & 0 & 2-2a & -1 \end{array}\right)$$

Discusión de casos:

- Si $2-2a=0 \rightarrow a=1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2b-1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right)$ → Absurdo en F_3 → No hay solución → S.I.
- Si $a=0 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2b-1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$
  - Si $-2b-1=0 \rightarrow b=\frac{-1}{2} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right)$ → Obtenemos un sistema equivalente con dos ecuaciones y dos incógnitas y , z con solución única, y la variable x puede tomar cualquier valor en el sistema de partida ya que va multiplicada por un factor 0 en las tres ecuaciones → La variable x funciona como un parámetro libre → Infinitas soluciones → S.C.I.

- ◦ Si $-2b-1\neq 0 \rightarrow b\neq\frac{-1}{2}$ → Absurdo en F_2 → No hay solución → S.I.
- En general, si $a\neq 0$ y $a\neq 1$ → Solución única → S.C.D.

b) El sistema es compatible indeterminado para $a=0$ y $b=\frac{-1}{2}$, donde obtenemos el sistema equivalente → $\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \end{array}\right) \rightarrow z=\frac{-1}{2}$, $y=1$, siendo la variable x un parámetro libre $x=\lambda$.

c) Para $a=-1$ y $b=0$ el sistema es compatible determinado y la matriz ampliada queda de la forma → $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \left\{\begin{array}{c} x-y+z=1 \\ 2y=-1 \\ 4z=-1 \end{array}\right\}$ → Donde las soluciones únicas son $z=\frac{-1}{4}$, $y=\frac{-1}{2} \rightarrow x=\frac{-3}{4}$ → Por lo tanto una cuarta ecuación que podríamos añadir para obtener una incongruencia es, por ejemplo, $x=0$ ya que contradice al valor solución obtenido anteriormente. Nuestro sistema incompatible sería → $\left\{\begin{array}{c} x-y+z=1 \\ 2y=-1 \\ 4z=-1 \\ x=0 \end{array}\right\}$