# Problemas – Tema 6

# Solución a problemas de Sistemas de ecuaciones - Hoja 11 - Todos resueltos

## Hoja 11. Problema 1

1. En un estudio de mercado, se eligen tres productos, A, B y C y cuatro tiendas. En la primera, por una unidad de cada producto cobran, en total, 4.25 euros. En la segunda, 2 unidades de A y 3 de C valen 8.25 euros más que una unidad de B. En la tercera, una unidad de A y 2 de C valen 4 euros más que 2 unidades de B y, en la cuarta, una unidad de B vale 1.25 euros menos que una de C. ¿Tienen A, B y C el mismo precio en las cuatro tiendas o no? Si la respuesta es no, justifique por qué y si la respuesta es sí, diga cuál es ese precio.

Tenemos tres productos A, B, y C, cada uno con su precio. Las incógnitas van a ser los precios de los productos.

Y tenemos cuatro tiendas donde se venden esos productos.

De la tienda 1 planteamos la ecuación → $A+B+C=4{,}25$

De la tienda 2 → $2A+3C=8{,}25+B$

De la tienda 3 → $A+2C=4+2B$

De la tienda 4 → $B=C-1{,}25$

El sistema resultante de cuatro ecuaciones y tres incógnitas es:

$$\rightarrow \begin{Bmatrix} A+B+C=4{,}25 \\ 2A-B+3C=8{,}25 \\ A-2B+2C=4 \\ B-C=-1{,}25 \end{Bmatrix} \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4{,}25 \\ 2 & -1 & 3 & 8{,}25 \\ 1 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & -1{,}25 \end{array}\right) \rightarrow F'_2=F_2-2F_1 \;,\; F'_3=F_3-F_1 \rightarrow$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4{,}25 \\ 0 & -3 & 1 & -0{,}25 \\ 0 & -3 & 1 & -0{,}25 \\ 0 & 1 & -1 & -1{,}25 \end{array}\right) \rightarrow$$

$F_3$ es combinación lineal de $F_2$ , por lo que el sistema equivalente resulta → $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4{,}25 \\ 0 & -3 & 1 & -0{,}25 \\ 0 & 1 & -1 & -1{,}25 \end{array}\right) \rightarrow F'_3 = 3\mathrm{F}_3 + F_2 \rightarrow$

$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 4{,}25 \\ 0 & -3 & 1 & -0{,}25 \\ 0 & 0 & -2 & -4 \end{array}\right) \rightarrow -2\mathrm{C} = -4 \rightarrow C = 2\,€ \rightarrow B = 0{,}75\,€ \rightarrow A = 1{,}5\,€$

Es decir, al existir solución única podemos afirmar que los tres productos se venden al mismo precio en las cuatro tiendas.

# Hoja 11. Problema 2

2. Sea el sistema de ecuaciones $\begin{Bmatrix} x+y+(m+1)z=2 \\ x+(m-1)y+2z=1 \\ 2x+m\cdot y+z=-1 \end{Bmatrix}$

a) Discutir sus posibles soluciones según el valor del parámetro $m\in\mathbb{R}$ .

b) Resolver el sistema, si es posible, para $m=2$ .

a) Planteamos la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m+1 & 2 \\ 1 & m-1 & 2 & 1 \\ 2 & m & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \quad F'_2=F_2-F_1 \quad , \quad F'_3=F_3-2\mathrm{F}_1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m+1 & 2 \\ 0 & m-2 & 1-m & -1 \\ 0 & m-2 & -2\mathrm{m}-1 & -5 \end{array}\right) \rightarrow$$

$$\rightarrow \quad F'_3=F_3-F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & m+1 & 2 \\ 0 & m-2 & 1-m & -1 \\ 0 & 0 & -m-2 & -4 \end{array}\right)$$

Discusión de casos:

- Si $-m-2=0 \rightarrow m=-2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right)$ → Incongruencia en $F_3$ → No hay solución → S.I.
- Si $m-2=0 \rightarrow m=2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -4 & -4 \end{array}\right) \rightarrow$ $F_3$ es combinación lineal de $F_2$ , pos lo que el sistema equivalente resulta $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right)$ → Sistema de dos ecuaciones y tres incógnitas → Infinitas soluciones → S.C.I.
- Si $m\neq-2$ y $m\neq 2$ → Solución única → S.C.D.

b) Para $m=2$ ya hemos razonado que tenemos infinitas soluciones al ser S.C.I. →

$$\rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow \quad z=1 \quad , \quad y=\lambda \rightarrow \quad x=-1-\lambda$$

## Hoja 11. Problema 3

3. Sea el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{matrix} 2a\cdot x+(a^2+a-2)y+2z=2 \\ a\cdot x-y+2z=0 \\ -a\cdot x+y-z=a \end{matrix}\right\}$

a) Discutir sus posibles soluciones según el valor del parámetro $a\in\mathbb{R}$ .

b) Resolver el sistema, si es posible, para $a=-1$ .

a) Planteamos la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2a & a^2+a-2 & 2 & 2 \\ a & -1 & 2 & 0 \\ -a & 1 & -1 & a \end{array}\right) \rightarrow \quad F'_2=2F_2-F_1 \quad , \quad F'_3=F_3+F_2 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2a & a^2+a-2 & 2 & 2 \\ 0 & -a^2-a & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & a \end{array}\right) \rightarrow$$

Discusión de casos:

- Si $-a^2-a=0 \rightarrow a=0 \;,\; a=-1$
  - Si $a=0 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \rightarrow$ Incongruencia en el valor de $z$ en las filas $F_2$ y $F_3$ → No hay solución → S.I.
  - Si $a=-1 \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \rightarrow$ $F_3$ es combinación lineal de $F_2$ → Obtenemos el sistema equivalente → $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right)$ → Infinitas soluciones con un parámetro libre → S.C.I.
- Si $a\neq 0$ y $a\neq -1$ → Solución única -->S.C.D.

b) Para $a=-1$ tenemos la matriz ampliada de un S.C.I. → $\left(\begin{array}{ccc|c} -2 & -2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right) \rightarrow$ $z=-1 \;,\; x=\lambda \rightarrow y=\lambda-2$

# Hoja 11. Problema 4

4. Sea el sistema de ecuaciones $\left\{\begin{matrix} x+y+z=1 \\ x-a\cdot y+z=1 \\ a\cdot x+y+z=4 \end{matrix}\right\}$

a) Resolver cuando el sistema sea compatible indeterminado, según el valor de $a\in\mathbb{R}$ .

b) Inventa y resuelve un sistema de cuatro ecuaciones y tres incógnitas que sea compatible indeterminado.

a) Planteamos la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -a & 1 & 1 \\ a & 1 & 1 & 4 \end{array}\right) \rightarrow \quad F'_2=F_2-F_1 \quad , \quad F'_3=F_3-a\cdot F_1 \quad \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -a-1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a & 4-a \end{array}\right) \rightarrow$$

$\rightarrow$ Intercambiamos $C_2$ con $C_3$ (recordar este cambio de columnas, ya que afecta al orden de las incógnitas) $\rightarrow$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -a-1 & 0 \\ 0 & 1-a & 1-a & 4-a \end{array}\right)$ $\rightarrow$ Intercambiamos $F_2$ con $F_3$ $\rightarrow$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1-a & 1-a & 4-a \\ 0 & 0 & -a-1 & 0 \end{array}\right)$$

Discusión de casos:

- Si $-a-1=0 \quad \rightarrow \quad a=-1 \quad \rightarrow$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$ $\rightarrow$ Llegamos a un sistema equivalente de dos ecuaciones y tres incógnitas $\rightarrow$ Un parámetro libre $\rightarrow$ infinitas soluciones $\rightarrow$ S.C.I.
- Si $1-a=0 \quad \rightarrow \quad a=1 \quad \rightarrow$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \end{array}\right)$ $\rightarrow$ Absurdo en $F_2$ $\rightarrow$ No hay solución $\rightarrow$ S.I.
- Si $a\neq-1$ y $a\neq1$ $\rightarrow$ Solución única $\rightarrow$ S.C.D.

Por lo tanto debemos resolver el sistema para $a=-1$ , ya que es el único caso donde resulta sistema compatible indeterminado $\rightarrow$ $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \end{array}\right) \rightarrow$

Recordamos que la segunda columna indica la incógnita $z$ y la tercera columna la incógnita $y$ . Tomamos como parámetro libre $y=\lambda$ $\rightarrow$ En la primera ecuación nos queda:

$$x+z=1-\lambda \rightarrow x=1-\lambda-z$$

Y en la segunda ecuación:

$$2z=5-2\lambda \rightarrow z=\frac{5-2\lambda}{2}$$

Llevamos este resultado a la primera ecuación donde habíamos despejado $x$ :

$$x=1-\lambda-\frac{5-2\lambda}{2} \rightarrow x=\frac{2-2\cdot\lambda-5+2\lambda}{2} \rightarrow x=\frac{-3}{2}$$

b) Inventa y resuelve un sistema de cuatro ecuaciones y tres incógnitas que sea compatible indeterminado.

$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=0 \\ 2x+2y+2z=2 \\ 4x+4y+4z=4 \end{array}\right\}$ $\rightarrow$ Las filas 3 y 4 son combinación lineal de la primera fila, al ser proporcionales, por lo que podemos reducir el sistema al caso equivalente:

$\left\{\begin{array}{c} x+y+z=1 \\ x+2y+3z=0 \end{array}\right\}$ $\rightarrow$ Si tomamos $x=\lambda$ $\rightarrow$ $\left\{\begin{array}{c} y+z=1-\lambda \\ 2y+3z=-\lambda \end{array}\right\}$ $\rightarrow$ De la primera ecuación podemos despejar:

$$y=1-\lambda-z$$

Que podemos llevarlo a la segunda ecuación:

$$2(1-\lambda-z)+3z=-\lambda \quad \rightarrow \quad 2-2\lambda-2z+3z=-\lambda \quad \rightarrow \quad z=\lambda-2$$

Y por lo tanto:

$$y=1-\lambda-(\lambda-2) \quad \rightarrow \quad y=3-2\lambda$$