Teoría – Tema 5

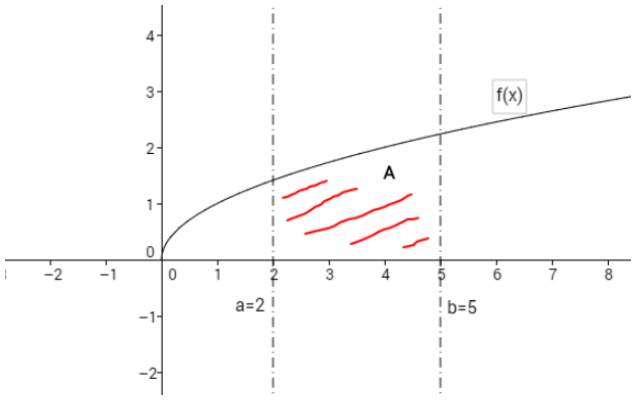
Integral definida. Área encerrada por una curva

Índice de contenido

El problema del cálculo del área

El cálculo integral tuvo su origen en la resolución a la pregunta sobre el **área de una superficie limitada por curvas**. Cuando el recinto acotado es un polígono de lados rectos, usamos fórmulas bien conocidas: área de un triángulo, de un rectángulo, etc. Pero cuando no tenemos un polígono, sino funciones que se cortan, el asunto se complica.

La función $f(x)$ *encierra un área* A *con eje* OX *y rectas verticales* $x=2,\ x=4$



Si $f(x)$ es positiva en el intervalo $[a,b]$, **la integral** $\int_a^b f(x)dx$ **recibe el nombre el área encerrada por la curva de** $f(x)$ **con el eje** OX **entre los límites de integración** $x=a$ **y** $x=b$.

$$Área=\int_a^b f(x)dx$$

Si $f(x)$ es negativa en el intervalo $[a,b]$, **el valor absoluto de la integral** $|\int_a^b f(x)dx|$ **coincide con el área encerrada por la curva de** $f(x)$ **con el eje** OX **entre los límites de integración** $x=a$ **y** $x=b$.

$$Área=-\int_a^b f(x)dx=|\int_a^b f(x)dx|$$

La expresión $\int_a^b f(x)dx$ se denomina **integral definida** de $f(x)$ en $[a,b]$.

Propiedades de la integral definida

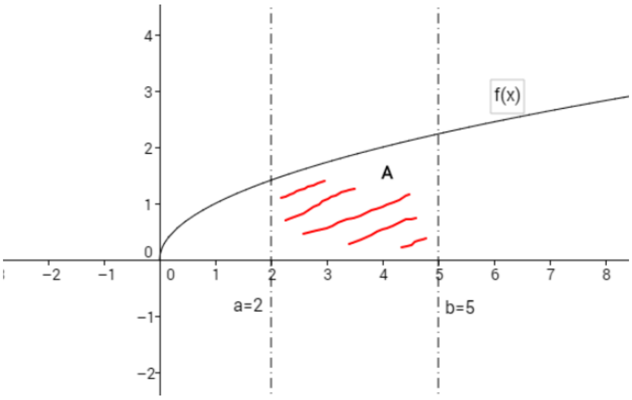
Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y $c \in [a,b]$. La integral definida con límite inferior a y límite superior b cumple:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Es decir: si c está entre los límites a y b podemos romper la integral definida como suma de dos integrales.

Si $f(x)$ es positiva en el intervalo $[a,b]$, **la integral definida** $\int_a^b f(x)dx$ **coincide con el área encerrada por la curva de** $f(x)$ **con el eje** OX **entre los límites de integración** $x=a$ **y** $x=b$.

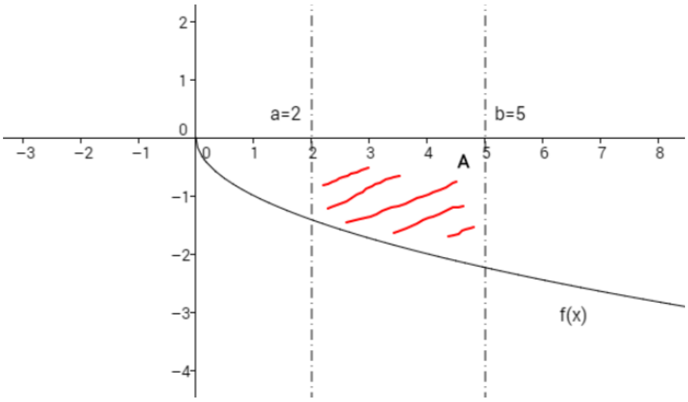
$$\int_a^b f(x)dx \;\; \textit{coincide con área encerrada por } f(x), \textit{ eje } OX \textit{ y límites de integración}$$



¡Ojo! Para poder aplicar esta propiedad es fundamental que **la función esté por encima del eje de abscisas**.

Si está por debajo debemos aplicar el valor absoluto para obtener un valor positivo del área. Si $f(x)$ es negativa en el intervalo $[a,b]$, **el valor absoluto de la integral definida** $\left|\int_a^b f(x)dx\right|$ **coincide con el área encerrada por la curva de** $f(x)$ **con el eje** OX **entre los límites de integración** $x=a$ **y** $x=b$.

$|\int_a^b f(x)dx|$ *coincide con área encerrada por* $f(x)$*, eje OX y límites de integración*



Si los extremos del intervalo $[a,b]$ coinciden ==> $a=b$ ==> el área de la región considerada es cero:

$$\int_a^a f(x)dx=0$$

Si cambiamos el orden de los límites de integración, la integral definida cambia de signo:

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

La integral definida de la suma de funciones $f(x)$ y $g(x)$ es la suma de las integrales definidas:

$$\int_a^b (f(x)+g(x))dx=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b g(x)dx$$

La integral del producto de $k\in\mathbb{R}$ por la función $f(x)$ es igual al producto de $k\in\mathbb{R}$ por la integral de $f(x)$:

$$\int_a^b k\cdot f(x)dx=k\cdot\int_a^b f(x)dx$$

Si $f(x)$ y $g(x)$ son dos funciones positivas en el intervalo $[a,b]$, tales que $f(x)\geq g(x), \forall x\in[a,b]$ (es decir, la gráfica de $f(x)$ siempre permanece por encima de la gráfica de $g(x)$), se cumple:

$$\int_a^b f(x)dx \geq \int_a^b g(x)dx$$

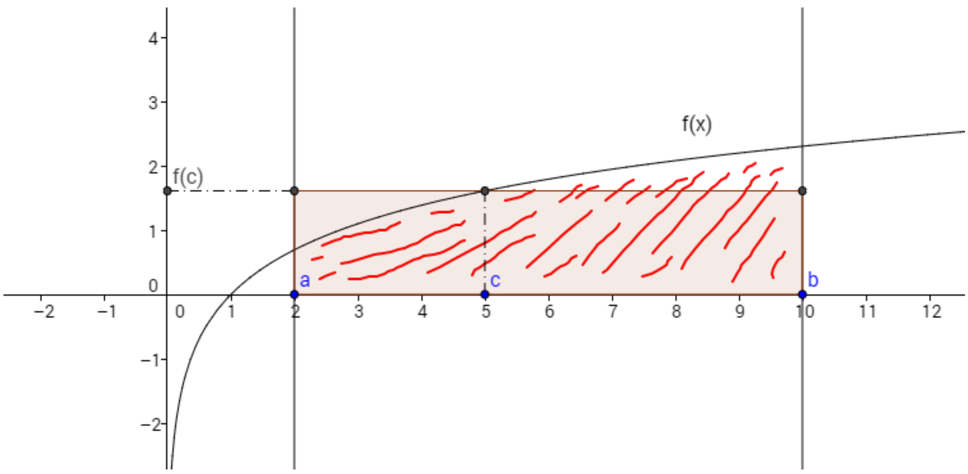
Es decir, el área encerrada por $f(x)$ sobre el eje OX es mayor que el área encerrada por $g(x)$ sobre el eje OX.

Por lo general, **admitiremos que toda función** $f(x)$ **continua en** $[a,b]$ **es integrable en** $[a,b]$. Y también admitiremos que $f(x)$ posee un valor $c\in[a,b]$ que satisface la siguiente relación conocida como **Teorema de la media**:

$$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$

La interpretación geométrica del Teorema de la media nos dice que **existe un valor** $c\in[a,b]$ **tal que el área del rectángulo cuya base mide** $b-a$ **y cuya altura mide** $f(c)$ **es igual al área del recinto cuya medida nos da la integral definida**.

Teorema de la media



Tras estas propiedades de la integral definida, la pregunta que se nos plantea es bastante evidente: **¿Cómo demonios calculo numéricamente** $\int_a^b f(x)\,dx$ **?**

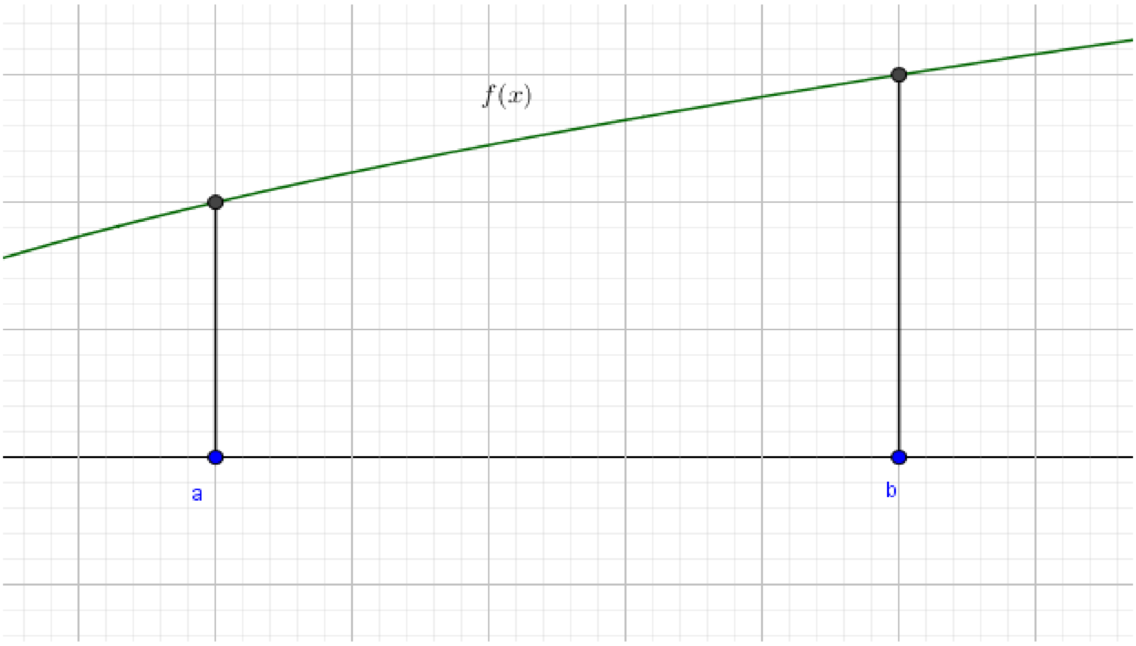
Existe una definición formal de integral definida, análoga a las que vimos en su día para el concepto de límite, de continuidad o de derivabilidad. Vamos a estudiarla, para pasar luego a un método más práctico de operar a través del Teorema fundamental del cálculo integral y de la regla de Barrow.

Definición formal de la Integral de Riemann. Suma superior e inferior

Sea $f(x)$ una función no negativa y continua en el intervalo cerrado $[a,b]$. La gráfica de la función, el eje de abscisas y la rectas verticales $x=a$ y $x=b$ determinan un recinto cerrado de área A.

Si $f(x)$ es una recta, este recinto cerrado tendrá forma de triángulo o de rectángulo. Y el área será fácil de obtener con las fórmulas elementales del área. Pero si $f(x)$ es una curva no rectilínea, la cosa se complica.

Área encerrada por la gráfica $f(x)$ con el eje horizontal en el intervalo $[a,b]$



Podemos aproximar el valor del área de la siguiente forma.

Vamos a tomar una partición del intervalo $[a,b]$. Una partición no es más que un conjunto finitos de valores $P=\{x_0,x_1,x_2,...,x_n\}$, donde $a=x_0<x_1<x_2<...<x_n=b$.

Sabemos que toda función continua en un intervalo cerrado está acotada en dicho intervalo. Recuerda que la menor de las cotas superiores se llama supremo y el mayor de las cotas inferiores se llama ínfimo. Así, todos los intervalos $[x_0,x_1],[x_1,x_2],...,[x_{n-1},x_n]$ tendrán su correspondiente supremo y ínfimo.

Fíjate que al ser $f(x)$ continua en todos los intervalos $[x_0,x_1],[x_1,x_2],...,[x_{n-1},x_n]$, el supremo coincide con el máximo y el ínfimo con el mínimo (Teorema de Bolzano-Weierstrass).

Tendremos n intervalos $[x_0, x_1], [x_1, x_2], ..., [x_{n-1}, x_n]$. Siendo la anchura de cada intervalo la diferencia:

$$\Delta x_i = x_i - x_{i-1} \quad \rightarrow \quad \Delta x_1 = x_1 - x_0 \quad , \quad \Delta x_2 = x_2 - x_1 \quad , \ldots, \quad \Delta x_n = x_n - x_{n-1}$$

El supremo que toma la función en cada intervalo lo llamaremos:

$$E_i = supremo\{f(x) / x \in [x_{i-1} - x_i]\}$$

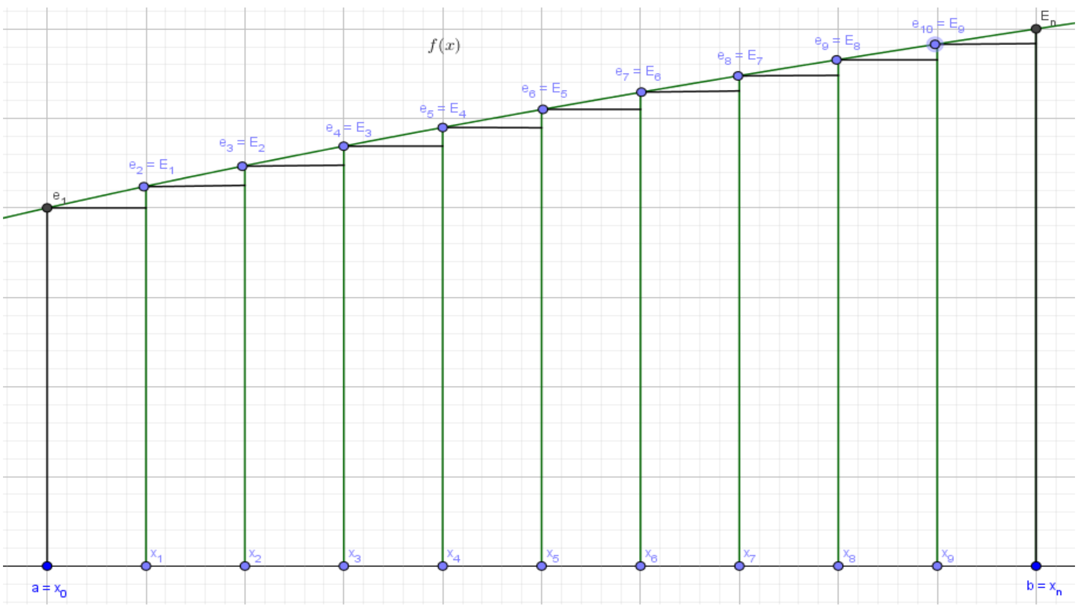
El ínfimo que toma la función en cada intervalo lo llamaremos:

$$e_i = \text{ínfimo}\{f(x) / x \in [x_{i-1} - x_i]\}$$

Si multiplicamos la anchura de un intervalo por su ínfimo, tendremos el área del rectángulo correspondiente. La suma de todos estos rectángulos se llama suma inferior y es una aproximación al área encerrada por la función.

$$\underline{S}(f, P) = e_1 \cdot \Delta x_1 + e_2 \cdot \Delta x_2 + \ldots + e_n \cdot \Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} e_i \Delta x_i$$

Ejemplo de Suma inferior, que aproxima por defecto el área encerrada por la función



Si multiplicamos la anchura de un intervalo por su supremo, tendremos el área del rectángulo correspondiente. La suma de todos estos rectángulos se llama suma superior y es otra aproximación al área encerrada por la función.

$$\overline{S}(f,P)=E_1\cdot\Delta x_1+E_2\cdot\Delta x_2+...+E_n\cdot\Delta x_n=\sum_{i=1}^{n}E_i\Delta x_i$$

La suma inferior aproxima el área A por defecto. Y la suma superior por exceso. Es decir.

$$\underline{S}(f,P)\leq A\leq\overline{S}(f,P)$$

Cuanto más fina sea la partición P, mejor será la aproximación, ya que ambas sumatorias se acercarán cada vez más al valor exacto del área.

Si el intervalo de partida es $[a,b]$, su anchura es $b-a$. Si tomamos una partición que divide $[a,b]$ en n intervalos de igual anchura, la anchura de cada uno de estos intervalos será:

$$\Delta x_i=x_i-x_{i-1}=\frac{b-a}{n}$$

En el caso límite de $n\to\infty$ las dos sumatorias convergerán al valor único del área A. Y ese área se define como la integral definida:

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S}(f,P)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}e_i\Delta x_i=\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\overline{S}(f,P)=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}E_i\Delta x_i$$

$$\int_a^b f(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}f(\varphi_i)\Delta x_i \quad , \quad \varphi_i\in[x_{i-1},x_i]$$

Esta es la definición de función $f(x)$ integrable según Riemann, o R-integrable, sobre el intervalo $[a,b]$. Cualquier función acotada $[a,b]$ es R-integrable. O también podemos decir que cualquier función continua en $[a,b]$ es R-integrable.

Si $f(x)>0$ en $[a,b]$ $\rightarrow$ $\int_a^b f(x)\,dx=A$

Si $f(x)<0$ en $[a,b]$ $\rightarrow$ $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right|=A$

Ejemplo de definición formal de integral de Riemann

Demostrar que el área encerrada por una recta horizontal $f(x)=k$ en el intervalo $[a,b]$ es igual a $A=k(b-a)$ (fórmula del área de un rectángulo: base por altura).

$$\underline{S}(f,P)=\sum_{i=1}^{n} e_i \Delta x_i=\sum_{i=1}^{n} k\,\Delta x_i$$ → Al ser la función constante $e_i=k$

$$\underline{S}(f,P)=\sum_{i=1}^{n} k\,\Delta x_i=k\sum_{i=1}^{n}\Delta x_i=k\sum_{i=1}^{n}(x_i-x_{i-1})=k[(x_1-a)+(x_2-x_1)+...+(b-x_{n-1})]$$

$$\underline{S}(f,P)=k(b-a)$$

De igual forma se demuestra:

$$\overline{S}(f,P)=k(b-a)$$

Por lo tanto:

$$\lim_{n\to\infty}\underline{S}(f,P)=k(b-a)=\lim_{n\to\infty}\overline{S}(f,P) \quad\rightarrow\quad \int_a^b f(x)\,dx=k(b-a)=A$$ c.q.d.

Con la definición formal de integral estamos en disposición de demostrar, por ejemplo, el teorema de la media que enunciamos en el apartado anterior.

$$\int_a^b f(x)\,dx=f(c)(b-a)$$

En efecto. Si la función $f(x)$ es acotada en $[a,b]$, existirá un valor e igual al ínfimo de toda la función en el intervalo y existirá un valor E igual al supremo de toda la función en el intervalo. De esta forma:

$$\forall\, x\in[a,b], e\le f(x)\le E \quad\rightarrow\quad \int_a^b e\,dx\le\int_a^b f(x)\,dx\le\int_a^b E\,dx \quad\rightarrow\quad e\int_a^b dx\le\int_a^b f(x)\,dx\le E\int_a^b dx$$

En el ejemplo resuelto antes, la integral definida de una recta horizontal $f(x)=k$ en $[a,b]$ es $k(b-a)$. Si $k=1$ la integral definida será $(b-a)$.

$$e(b-a)\leq\int_a^b f(x)dx\leq E(b-a) \quad\rightarrow\quad e\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leq E$$

Si llamamos $\mu=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \quad\rightarrow\quad \mu(b-a)=\int_a^b f(x)dx$

De la definición formal de integral $\int_a^b f(x)dx=\lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(\varphi_i)\Delta x_i$, $\varphi_i\in[x_{i-1},x_i]$ sabemos que la integral de $f(x)$ se obtiene a partir de valores $f(\varphi_i)$ que cumplen $\varphi_i\in[x_{i-1},x_i]$.

Por lo tanto podemos afirmar que $\mu=f(c)$ tal que $c\in[a,b]$. Y concluimos:

$$f(c)(b-a)=\int_a^b f(x)dx \quad , \quad c\in[a,b] \quad \text{c.q.d.}$$

Con la definición formal de integral ocurre lo mismo que con la definición formal de derivada o la definición formal de límite. **Cuando las funciones se complican, las definiciones formales son difíciles de operar**.

Por eso buscamos **métodos más prácticos**. Para ello vamos a estudiar, en el siguiente apartado, el **teorema fundamental del cálculo integral y la regla de Barrow**.

Teorema fundamental del cálculo integral. Regla de Barrow

Teorema fundamental del cálculo integral

Si $f(x)$ es una función positiva y continua en $[a,b]$, la función definida por $A(x)=\int_a^x f(x)dx$ es una primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$ y cumple la siguiente igualdad:

$$A'(x)=f(x), \forall x\in[a,b]$$

$A(x)$ coincide con el valor del área encerrada por la curva $f(x)$ con el eje OX y los límites de integración a , x .

La expresión $\int_a^x f(x)dx$ se conoce como integral definida de $f(x)$. Si $x=b$ definimos la integral definida como $\int_a^b f(x)dx$.

El valor del área $\int_a^b f(x)dx$ depende de la forma de la curva generada por $f(x)$ y del intervalo $[a,b]$. Es decir, el resultado final **no depende de la variable** x .

En la definición del teorema fundamental del cálculo integral hemos considerado $a<b$. Si tuviéramos $b<a$ se define la siguiente igualdad:

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx$$

Si en una integral definida se intercambian los límites de integración, la integral definida cambia de signo.

Si $a<b$, llamaremos límite de integración inferior al valor a y límite de integración superior al valor b .

Demostración del Teorema fundamental del cálculo integral.

Sea $x \in [a,b]$ un punto arbitrario del intervalo. Sea $A(x)=\int_a^x f(x)dx$ una función derivable y $f(x)$ una función continua en ese intervalo.

La función $A(x)$ asocia a cada punto $x \in [a,b]$ el área del recinto limitado por la gráfica y el eje horizontal entre los valores de abscisa a y x .

Por la definición formal de derivada por la derecha:

$$A'(x^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{A(x+h)-A(x)}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{\int_a^{x+h} f(x)dx-\int_a^x f(x)dx}{h}=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dx$$

Si aplicamos el teorema de la media, enunciado y demostrado en apartados anteriores:

$$\int_x^{x+h} f(x)dx=f(c)(x+h-x) \quad , \quad c\in[x,x+h] \;\rightarrow\; \int_x^{x+h} f(x)dx=f(c)\cdot h$$

Llevamos este resultado a la expresión de $A'(x^+)$:

$$A'(x^+)=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\int_x^{x+h} f(x)dx=\lim_{h\to 0^+}\frac{1}{h}\cdot f(c)\cdot h=\lim_{h\to 0^+} f(c)=f(x)$$

Donde hemos aplicado que si $si\ c\in[x,x+h], h\to 0^+ \Rightarrow c\to x$ ya que el intervalo $[x,x+h]$ converge a un único punto → $f(c)\to f(x)$.

Si razonamos de manera análoga con la derivada por la izquierda :

$$A'(x^-)=f(x)$$

Como las derivadas laterales coinciden, nuestra función es derivable y cumple:

$$A'(x^+)=A'(x^-)=f(x)\Rightarrow A(x)\ es\ derivable\ y\ A'(x)=f(x)\ \forall x\in[a,b]$$ c.q.d.

Regla o Corolario de Barrow

Sea $f(x)$ una función continua en $[a,b]$ y sea $F(x)$ una primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$. Entonces se cumple: $\int_a^b f(x)dx=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$

Demostración de la regla de Barrow

Si $f(x)$ es continua en $[a,b]$, por el teorema fundamental del cálculo integral, sabemos que $A(x)=\int_a^x f(x)dx$ y que $A(x)$ es una primitiva de $f(x)$ en $[a,b]$.

Por lo tanto $A'(x)=f(x), \forall x\in[a,b]$ y $A(x)$ nos informa del área encerrada

Si $F(x)$ es primitiva de $f(x)$ ==> $F'(x)=f(x)$.

Tenemos dos primitivas de $f(x)$. La primitiva $F(x)$ y la primitiva $A(x)$ que nos informa del área encerrada. Ambas primitivas se distinguen en solo una constante.

$$A(x)=F(x)+\ constante$$

Para $x=a \rightarrow A(a)=F(a)+\ constante$

Recordamos que $A(x)=\int_a^x f(x)dx$. Por las propiedades de la integral definida:

$$A(x=a)=A(a)=\int_a^a f(x)dx=0 \rightarrow 0=F(a)+\ constante \rightarrow constante=-F(a)$$

$$A(x)=F(x)-F(a)$$

Esta igualdad se cumple para cualquier valor $x\in[a,b]$. En particular para $x=b$:

$$A(x=b)=A(b)=F(b)-F(a)$$

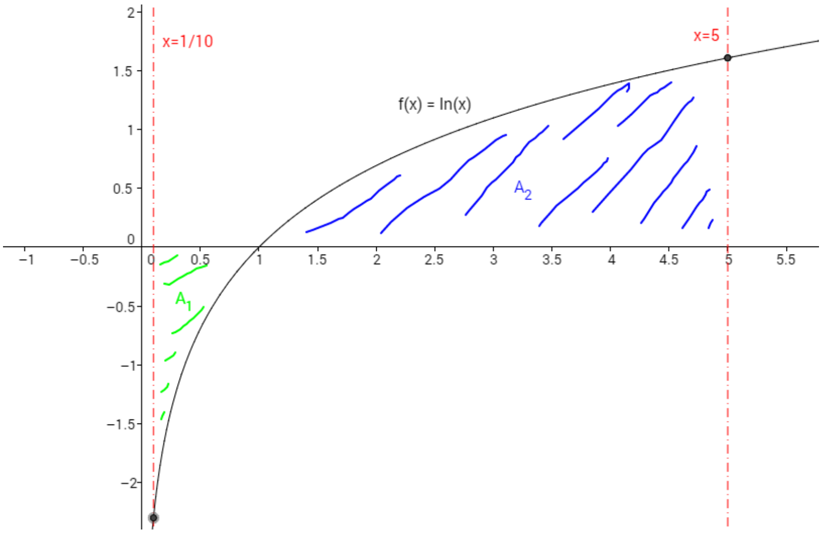
Y de la definición de integral definida: $A(x)=\int_a^x f(x)dx \rightarrow A(b)=\int_a^b f(x)dx$

Igualando los dos resultados obtenidos para $A(b)$ demostramos el corolario de Barrow.

$\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$ c.q.d.

Ejemplo de cálculo de área con la regla de Barrow

Obtener el área encerrada por $f(x)=\ln(x)$ con el eje de abscisas en el intervalo $[\frac{1}{10},5]$.



Al representar gráficamente la curva, vemos que parte de la curva está por debajo del eje de abscisas y parte por encima. Y el corte con el eje OX se produce en $x=1$.

El área total A buscada será (según notación de la gráfica superior):

$$A=A_1+A_2$$

$$A_1 \equiv \text{ } \acute{A}rea \text{ } desde \text{ } x=\frac{1}{10} \text{ } hasta \text{ } x=1 \text{ } \rightarrow \text{ } A_1=-\int_{\frac{1}{10}}^{1} \ln(x)\,dx$$

$$A_2 \equiv \text{ } \acute{A}rea \text{ } desde \text{ } x=1 \text{ } hasta \text{ } x=5 \text{ } \rightarrow \text{ } A_2=\int_{1}^{5} \ln(x)\,dx$$

Por lo tanto, debemos obtener una primitiva de $f(x)=\ln(x)$ y aplicar la regla de Barrow en cada tramo de área definida.

$$\int \ln(x)\,dx=x\cdot\ln(x)-x+C$$

Donde hemos aplicado el método de integración por partes.

Al sustituir en la integral definida no es necesario que usemos la constante C , ya que ésta cancela al aplicar la regla de Barrow.

$$A_1=-\int_{\frac{1}{10}}^{1} \ln(x)\,dx=-[x\cdot\ln(x)-x]_{\frac{1}{10}}^{1}=-[(1\cdot\ln(1)-1)-(\frac{1}{10}\cdot\ln(\frac{1}{10})-\frac{1}{10})]$$

$$A_2=\int_{1}^{5} \ln(x)\,dx=[x\cdot\ln(x)-x]_1^5=[(5\cdot\ln(5)-5)-(1\cdot\ln(1)-1)]$$

Operamos (recuerda que el logaritmo de un cociente es la diferencia del logaritmo del numerador menos el logaritmo del denominador).

$$A_1=-[(0-1)-(\frac{-1}{10}\cdot\ln(10)-\frac{1}{10})]=1-\frac{1}{10}\cdot\ln(10)-\frac{1}{10}=\frac{9}{10}-\frac{1}{10}\cdot\ln(10)$$

$$A_2=[(5\cdot\ln(5)-5)+1]=5\cdot\ln(5)-4$$

Por lo tanto:

$$A=A_1+A_2$$

$$A=\frac{9}{10}-\frac{1}{10}\cdot\ln(10)+5\cdot\ln(5)-4=\frac{-31}{10}-\frac{1}{10}\cdot\ln(10)+5\cdot\ln(5) \;\rightarrow\; A\simeq 4{,}72\ u^2$$