Teoría – Tema 5

Integración por partes

Índice de contenido

¿Qué significa integrar por partes?

Sea la integral arbitraria $\int f(x)dx$. El método de integración por partes plantea que $\int f(x)dx$ puede expresarse como dos partes diferenciadas: como un producto de funciones más una integral más sencilla que la de partida.

Supongamos que tenemos el producto de funciones $u(x)\cdot v(x)$. Su derivada será:

$$\frac{d[u(x)\cdot v(x)]}{dx}=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$$

Si integramos esta expresión, obtenemos:

$$\int \frac{d[u(x)\cdot v(x)]}{dx}dx=\int u'(x)\cdot v(x)dx+\int u(x)\cdot v'(x)dx$$

La integral y la derivada son procesos inversos, por lo que:

$$u(x)\cdot v(x)=\int u'(x)\cdot v(x)dx+\int u(x)\cdot v'(x)dx$$

Reordenamos:

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)-\int u'(x)\cdot v(x)dx$$

Si conseguimos expresar $\int f(x)dx$ como $\int u(x)\cdot v'(x)dx$, tendremos la integral del producto de una función derivable $u(x)$ y de una función integrable $v'(x)$. Y el resultado será igual al producto $u(x)\cdot v(x)$ más una nueva integral $\int u'(x)\cdot v(x)dx$.

Si **la nueva integral** $\int u'(x)\cdot v(x)dx$ **es más sencilla que la original** $\int f(x)dx$, tendrá sentido aplicar el método por partes. En caso contrario, debemos buscar otra opción.

La clave reside en saber qué parte de la integral de partida juega el papel $u(x)$ y que parte es $v'(x)$. El razonamiento debe ser el siguiente: la parte que pueda derivarse será $u(x)$ y la parte que pueda integrarse fácilmente será $v'(x)$. De $u(x)$ pasamos a $u'(x)$ diferenciando, y de $v'(x)$ pasamos a $v(x)$ integrando.

Ejemplo

Sea $\int x \cdot cos(x)\,dx$. Consideramos la siguiente identificación de términos:

$u=x$ → diferenciamos → $du=dx$
$dv=\cos(x)dx$ → integramos → $v=sen(x)$

Por lo tanto podemos desarrollar la integral de partida de la siguiente forma:

$$\int u(x)\cdot v'(x)dx=u(x)\cdot v(x)-\int u'(x)\cdot v(x)dx$$
$$\int x\cdot\cos(x)dx=x\cdot sen(x)-\int sen(x)dx$$

Donde observamos que la nueva integral que resulta tras aplicar partes es inmediata:

$$\int x\cdot\cos(x)dx=x\cdot sen(x)+\cos(x)+C$$

Este método es muy potente, y especialmente útil cuando podemos distinguir en la integral de partida términos "muy distintos entre sí". Como en el ejemplo anterior, por un lado x y por otro lado $\cos(x)$.