Teoría – Tema 5

Cambio de variable en integrales

Índice de contenido

¿Qué es un cambio de variable?

Sea la integral arbitraria $\int f(x)dx$, donde $f(x)$ es una función de variable real x . Puede ocurrir que la forma de la función sea tan compleja que dificulte enormemente el cálculo de la integral indefinida. Y esta dificultad, a veces, puede resolverse realizando un cambio de variable adecuado.

Supongamos que expresamos la variable x en función de una función $g(t)$ que depende de la variable t . Si llevamos esta relación a la integral, tendremos:

$x=g(t) \quad \rightarrow \quad dx=g'(t)dt$ → Diferenciamos en función de x y en función de t .

$f(x)=f[g(t)]$

$\int f(x)dx=\int f[g(t)]\cdot g'(t)dt$ → Integral que depende de la variable t .

Si conseguimos resolver la integral en función de t , no debemos olvidar **deshacer al final el cambio de variable realizado**. Es decir:

$$x=g(t) \quad \rightarrow \quad g^{-1}(x)=t$$

En consecuencia, la función elegida para el cambio de variable **debe admitir función inversa**, para que podamos deshacer el cambio.

Si tras realizar el cambio de variable en la integral, obtenemos una expresión que depende tanto de x como de t … significa que el cambio de variable no es válido... tendremos que proponer otro.

¿Existe alguna **regla general** que nos permita saber **qué función debemos aplicar en el cambio de variable**? Lamentablemente no. Una posible ayuda es proponer una función que al diferenciar, el resultado de la derivada "se parezca" lo más posible a los términos que tenemos dentro de la integral.

Ejemplo

$$\int \frac{tg[\ln(x)]}{x}dx$$

$$\ln x=t \quad \rightarrow \quad \frac{1}{x}dx=dt \quad \rightarrow \quad dx=x\cdot dt \quad \rightarrow \quad \int \frac{tg[\ln(x)]}{x}dx=\int \frac{tg[t]\cdot x}{x}dt=\int tg(t)dt$$

$\int tg(t)dt=\int \frac{sen\, t}{\cos t}dt=-\ln|\cos(t)|+C$ → deshacer cambio → $-\ln|\cos[\ln(x)]|+C$

Cambio de variable si f(x) es impar en seno

La función $f(x)$ que deseamos integrar es impar en seno si cumple que al sustituir $sen(x)$ por $-sen(x)$, la función cambia de signo. En este caso el cambio de variable a realizar es:

$$\cos(x)=t$$

Ejemplo

$$\int sen^3 x \cdot \cos^4 x\, dx$$

$$\cos x=t \quad \rightarrow \quad -sen\, x\, dx=dt \quad \rightarrow \quad dx=\frac{dt}{-sen\, x}$$

$$\int sen^3 x \cdot \cos^4 x\, dx=\int sen^3 x \cdot t^4 \frac{dt}{-sen\, x}=\int -sen^2 x \cdot t^4 dt=\int (\cos^2 x-1)\cdot t^4 dt=\int (t^2-1)\cdot t^4 dt$$

$\int (t^6-t^4)dt=\frac{t^7}{7}-\frac{t^5}{5}+C$ → deshacer cambio → $\frac{\cos^7 x}{7}-\frac{\cos^5 x}{5}+C$

Cambio de variable si f(x) es impar en coseno

La función $f(x)$ que deseamos integrar es impar en coseno si cumple que al sustituir $\cos(x)$ por $-\cos(x)$, la función cambia de signo. En este caso el cambio de variable a realizar es:

$$sen(x)=t$$

Ejemplo

$$\int sen^4 x\cdot\cos^5 x\,dx$$

$$sen\,x=t \;\rightarrow\; \cos x\,dx=dt \;\rightarrow\; dx=\frac{dt}{\cos x}$$

$$\int sen^4 x\cdot\cos^5 x\,dx=\int t^4\cdot\cos^5 x\,\frac{dt}{\cos x}=\int t^4\cdot\cos^4 x\,dt=\int t^4\cdot[\cos^2 x]^2\,dt=\int t^4\cdot[1-sen^2 x]^2\,dt$$

$$\int t^4\cdot[1-t^2]^2 dt=\int t^4\cdot(1+t^4-2t^2)\,dt=\int t^4+t^8-2t^6\,dt=\frac{t^5}{5}+\frac{t^9}{9}-\frac{2\cdot t^7}{7}$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$\frac{sen^5 x}{5}+\frac{sen^9 x}{9}-\frac{2\cdot sen^7 x}{7}+C$$

Cambio de variable si f(x) es par en el producto sen(x)·cos(x)

La función $f(x)$ que deseamos integrar es par en el producto seno por coseno si cumple que al sustituir simultáneamente $sen(x)$ por $-sen(x)$ y $\cos(x)$ por $-\cos(x)$, la función no cambia de signo. En este caso el cambio de variable a realizar es:

$$tg(x)=t \quad \rightarrow \quad (1+tg^2(x))dx=dt \quad \rightarrow \quad dx=\frac{dt}{1+tg^2(x)} \quad \rightarrow \quad dx=\frac{dt}{1+t^2}$$

Recordamos que la tangente, en un triángulo rectángulo, se obtiene como el cociente entre cateto opuesto y cateto contiguo. Si suponemos que el cateto contiguo vale la unidad, tendremos:

$tg(x)=\frac{t}{1}=t$ → El cateto opuesto mide t y el cateto contiguo 1.

Por lo tanto la hipotenusa del triángulo rectángulo será $\sqrt{1+t^2}$. Y podremos obtener los valores del seno y del coseno en función de t, recordando que el seno es cateto opuesto partido hipotenusa y que el coseno es cateto contiguo partido hipotenusa.

$$sen(x)=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\cos(x)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

Otra forma de demostrar estos valores es partiendo de la relación fundamental de la trigonometría que relaciona tangente y secante:

$$1+tg^2(x)=sec^2(x) \quad \rightarrow \quad 1+t^2=\frac{1}{\cos^2(x)} \quad \rightarrow \quad \cos(x)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$tg(x)=\frac{sen(x)}{\cos(x)} \quad \rightarrow \quad sen(x)=tg(x)\cdot\cos(x) \quad \rightarrow \quad sen(x)=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

Encontraremos integrales donde podremos aplicar este cambio como alguno de los vistos anteriormente. Solo la práctica nos dirá cuál es la mejor opción para resolver cada integral.

Ejemplo

$$\int sen\,x\cdot\cos^3 x\,dx$$

$$tg\,x=t\quad\rightarrow\quad dx=\frac{dt}{1+t^2}$$

$$sen(x)=\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\cos(x)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\int sen\,x\cdot\cos^3 x\,dx=\int\frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\cdot\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^3\frac{dt}{1+t^2}=\int\frac{t}{(1+t^2)^3}dt=\frac{-1}{4}\cdot\frac{1}{(1+t^2)^2}+C$$

Deshacemos el cambio de variable en función de la tangente:

$$I=\frac{-1}{4}\cdot\frac{1}{(1+tg^2 x)^2}+C$$

Que podemos expresar de forma más compacta si el cambio de variable lo hacemos en función del coseno:

$$\cos(x)=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\quad\rightarrow\quad\cos^4(x)=\left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^4=\frac{1}{(1+t^2)^2}\quad\rightarrow\quad I=\frac{-1}{4}\cdot\cos^4(x)+C$$

Cambio de variable si f(x) contiene funciones trigonométricas genéricas

Si no podemos aplicar ninguno de los cambios de variable anteriormente descritos, siempre tendremos la posibilidad de plantear el cambio genérico:

$$tg\left(\frac{x}{2}\right)=t \quad \rightarrow \quad \left[1+tg^2\left(\frac{x}{2}\right)\right]\frac{1}{2}dx=dt \quad \rightarrow \quad [1+t^2]\frac{1}{2}dx=dt \quad \rightarrow \quad dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

Esta expresión relaciona la tangente del ángulo mitad. Para obtener los valores de la tangente, el seno y el coseno de x , debemos recordar la expresión de la tangente de la suma:

$$tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\,\alpha+tg\,\beta}{1-tg\,\alpha\cdot tg\,\beta}$$

Si aplicamos esta igualdad al caso $tg(x)=tg\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)$ nos queda:

$$tg(x)=tg\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\frac{2\cdot tg\frac{x}{2}}{1-tg^2\frac{x}{2}} \quad \rightarrow \quad tg(x)=\frac{2\cdot t}{1-t^2}$$

Si $tg(x)=\frac{2\cdot t}{1-t^2}$ el cateto opuesto vale $2t$ y el cateto contiguo vale $1-t^2$. Por lo tanto, la hipotenusa es igual a $\sqrt{(2t)^2+(1-t^2)^2}=1+t^2$.

El seno resulta → $sen(x)=\frac{2t}{1+t^2}$

El coseno resulta → $\cos(x)=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

Otra forma de demostrar esas expresiones del seno y del coseno, como ya hicimos en el apartado anterior, es utilizar la relación fundamental de la trigonometría que relaciona tangente con secante.

$$1+tg^2(x)=sec^2(x) \quad \rightarrow \quad 1+\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2=\frac{1}{\cos^2 x} \quad \rightarrow \quad 1+\frac{4t^2}{(1-t^2)^2}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{1+t^4-2t^2+4t^2}{(1-t^2)^2}=\frac{1}{\cos^2 x} \quad \rightarrow \quad \frac{1+t^4+2t^2}{(1-t^2)^2}=\frac{1}{\cos^2 x} \quad \rightarrow \quad \frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{1+t^2}{1-t^2}=\frac{1}{\cos x} \quad \rightarrow \quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$tg\, x=\frac{sen\, x}{\cos x} \quad \rightarrow \quad sen(x)=tg(x)\cdot\cos(x) \quad \rightarrow \quad sen(x)=\frac{2t}{1-t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$sen(x)=\frac{2t}{1+t^2}$$

Ejemplo

$$\int \frac{1}{1+sen\, x}\, dx$$

$$tg\left(\frac{x}{2}\right)=t \quad \rightarrow \quad dx=\frac{2}{1+t^2}\, dt$$

$$sen(x)=\frac{2t}{1+t^2}$$

$$\int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}}\frac{2}{1+t^2}\, dt=\int \frac{2}{1+t^2+2t}\, dt=2\int \frac{1}{(1+t)^2}\, dt=\frac{-2}{1+t}+C$$

Deshacemos el cambio de variable en función de la tangente del ángulo mitad:

$$I=\frac{-2}{1+tg\left(\frac{x}{2}\right)}+C$$

Cambio de variable si f(x) contiene sumas y restas de raíces de un mismo radicando elevado a distintos índices.

Sea la integral $\int f(x)dx$. Si la forma de la función $f(x)$ contiene un mismo radicando (por ejemplo x) elevado a distintos índices (por ejemplo $x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{3}{4}}, ...$), podemos plantear el siguiente cambio de variable:

$radicando = t^m$ → Donde m es el mínimo común múltiplo de los índices de las raíces.

Ejemplo

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$$

Radicando: x

Índice de las raíces: $2{,}3 \quad \rightarrow \quad m.c.m. \equiv 6$

Cambio de variable → $x = t^6 \quad \rightarrow \quad dx = 6 \cdot t^5 dt$

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{1-t^{\frac{6}{2}}}{t^{\frac{6}{3}}} \cdot 6 \cdot t^5 dt = 6 \cdot \int \frac{1-t^3}{t^2} \cdot t^5 dt = 6 \cdot \int (1-t^3) \cdot t^3 dt = 6 \cdot \int (t^3 - t^6) dt$$

$$6 \cdot \int t^3 dt - 6 \cdot \int t^6 dt = \frac{6}{4} \cdot t^4 - \frac{6}{7} \cdot t^7 + C$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$x = t^6 \quad \rightarrow \quad \sqrt[6]{x} = t$$

$$I = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{4}{6}} - \frac{6}{7} \cdot x^{\frac{7}{6}} + C = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^2} - \frac{6}{7} \cdot x \cdot \sqrt[6]{x} + C$$

Cambio de variable si f(x) posee radicales.

Sea la integral $\int f(x)dx$. Si $f(x)$ presenta raíces, podemos aplicar los siguientes cambios de variable útiles:

Si $f(x)=R(x,\sqrt{a^2-x^2}) \rightarrow x=a\cdot sen t$

Si $f(x)=R(x,\sqrt{a^2+x^2}) \rightarrow x=a\cdot tg t$

Si $f(x)=R(x,\sqrt{x^2-a^2}) \rightarrow x=a\cdot sec t$

Si $f(x)=R(x,\sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) \rightarrow \frac{ax+b}{cx+d}=t^n$

Ejemplo

$$\int \frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}}dx$$

$$x=sen\,t \rightarrow dx=\cos t\cdot dt$$

$$\int \frac{sen^4 t}{\sqrt{(1-sen^2 t)^3}}\cdot\cos t\,dt=\int \frac{sen^4 t}{\sqrt{(\cos^2 t)^3}}\cdot\cos t\,dt=\int \frac{sen^4 t}{\sqrt{\cos^6 t}}\cdot\cos t\,dt=\int \frac{sen^4 t}{\cos^3 t}\cdot\cos t\,dt$$

$$\int \frac{sen^4 t}{\cos^2 t}dt=\int \frac{(sen^2 t)^2}{\cos^2 t}dt=\int \frac{(1-\cos^2 t)^2}{\cos^2 t}dt=\int \frac{1+\cos^4 t-2\cdot\cos^2 t}{\cos^2 t}dt$$

$$\int \frac{1+\cos^4 t-2\cdot\cos^2 t}{\cos^2 t}dt=\int \frac{1}{\cos^2 t}dt+\int \cos^2 t\,dt-\int 2\,dt=tg(t)+\int \cos^2 t\,dt-2t+C$$

En la suma aparece la integral de $\int \cos^2 t\,dt$, que podemos resolver con un nuevo cambio de variable (por ejemplo $tg(t)=z$) o bien recordando que el coseno al cuadrado podemos relacionarlo con el coseno del ángulo doble:

$$\cos(t)\cdot\cos(t)=\frac{1+\cos(2t)}{2} \rightarrow \int \cos^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int (1+\cos(2t))dt=\frac{t}{2}+\frac{1}{4}sen(2t)+C$$

Por lo tanto, nuestra integral de inicio queda:

$$I=tg(t)-\frac{3t}{2}+\frac{1}{4}sen(2t)+C$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$x=sen\,t \rightarrow arcosen(x)=t$$

$$I = tg(arcosen(x)) - \frac{3 \cdot arcosen(x)}{2} + \frac{1}{4} sen(2 \cdot arcosen(x)) + C$$

La solución podemos expresarla en una forma más compacta recordando la forma del seno del ángulo doble:

$$I = tg(arcosen(x)) - \frac{3 \cdot arcosen(x)}{2} + \frac{1}{2} sen(arcosen(x)) \cdot \cos(arcosen(x)) + C$$

Y la función seno es la inversa del arcoseno, por lo tanto:

$$I = tg(arcosen(x)) - \frac{3 \cdot arcosen(x)}{2} + \frac{x}{2} \cdot \cos(arcosen(x)) + C$$

Con la relación fundamental de trigonometría, podemos expresar el coseno en función del seno:

$$I = tg(arcosen(x)) - \frac{3 \cdot arcosen(x)}{2} + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 - sen^2(arcosen(x))} + C$$

$$I = tg(arcosen(x)) - \frac{3 \cdot arcosen(x)}{2} + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 - x^2} + C$$

Ufff.... vaya telita hasta llegar a la solución final... **Mucho ánimo!!**