

Teoría – Tema 5

Cambio de variable en integrales

Índice de contenido

¿Qué es un cambio de variable?.....	2
Cambio de variable si $f(x)$ es impar en seno.....	3
Cambio de variable si $f(x)$ es impar en coseno.....	4
Cambio de variable si $f(x)$ es par en el producto $\text{sen}(x) \cdot \text{cos}(x)$	5
Cambio de variable si $f(x)$ contiene funciones trigonométricas genéricas.....	7
Cambio de variable si $f(x)$ contiene sumas y restas de raíces de un mismo radicando elevado a distintos índices.....	9
Cambio de variable si $f(x)$ posee radicales.....	10

¿Qué es un cambio de variable?

Sea la integral arbitraria $\int f(x)dx$, donde $f(x)$ es una función de variable real x . Puede ocurrir que la forma de la función sea tan compleja que dificulte enormemente el cálculo de la integral indefinida. Y esta dificultad, a veces, puede resolverse realizando un cambio de variable adecuado.

Supongamos que expresamos la variable x en función de una función $g(t)$ que depende de la variable t . Si llevamos esta relación a la integral, tendremos:

$$x=g(t) \rightarrow dx=g'(t)dt \rightarrow \text{Diferenciamos en función de } x \text{ y en función de } t.$$

$$f(x)=f[g(t)]$$

$$\int f(x)dx=\int f[g(t)]\cdot g'(t)dt \rightarrow \text{Integral que depende de la variable } t.$$

Si conseguimos resolver la integral en función de t , no debemos olvidar **deshacer al final el cambio de variable realizado**. Es decir:

$$x=g(t) \rightarrow g^{-1}(x)=t$$

En consecuencia, la función elegida para el cambio de variable **debe admitir función inversa**, para que podamos deshacer el cambio.

Si tras realizar el cambio de variable en la integral, obtenemos una expresión que depende tanto de x como de t ... significa que el cambio de variable no es válido... tendremos que proponer otro.

¿Existe alguna **regla general** que nos permita saber **qué función debemos aplicar en el cambio de variable**? Lamentablemente no. Una posible ayuda es proponer una función que al diferenciar, el resultado de la derivada "se parezca" lo más posible a los términos que tenemos dentro de la integral.

Ejemplo

$$\int \frac{tg[\ln(x)]}{x} dx$$

$$\ln x=t \rightarrow \frac{1}{x} dx=dt \rightarrow dx=x \cdot dt \rightarrow \int \frac{tg[\ln(x)]}{x} dx=\int \frac{tg[t] \cdot x}{x} dt=\int tg(t) dt$$

$$\int tg(t) dt=\int \frac{\text{sent}}{\text{cost}} dt=-\ln|\cos(t)|+C \rightarrow \text{deshacer cambio} \rightarrow -\ln|\cos[\ln(x)]|+C$$

Cambio de variable si $f(x)$ es impar en seno

La función $f(x)$ que deseamos integrar es impar en seno si cumple que al sustituir $\text{sen}(x)$ por $-\text{sen}(x)$, la función cambia de signo. En este caso el cambio de variable a realizar es:

$$\cos(x) = t$$

Ejemplo

$$\int \text{sen}^3 x \cdot \cos^4 x \, dx$$

$$\cos x = t \rightarrow -\text{sen} x \, dx = dt \rightarrow dx = \frac{dt}{-\text{sen} x}$$

$$\int \text{sen}^3 x \cdot \cos^4 x \, dx = \int \text{sen}^3 x \cdot t^4 \frac{dt}{-\text{sen} x} = \int -\text{sen}^2 x \cdot t^4 \, dt = \int (\cos^2 x - 1) \cdot t^4 \, dt = \int (t^2 - 1) \cdot t^4 \, dt$$

$$\int (t^6 - t^4) \, dt = \frac{t^7}{7} - \frac{t^5}{5} + C \rightarrow \text{deshacer cambio} \rightarrow \frac{\cos^7 x}{7} - \frac{\cos^5 x}{5} + C$$

Cambio de variable si $f(x)$ es impar en coseno

La función $f(x)$ que deseamos integrar es impar en coseno si cumple que al sustituir $\cos(x)$ por $-\cos(x)$, la función cambia de signo. En este caso el cambio de variable a realizar es:

$$\text{sen}(x) = t$$

Ejemplo

$$\int \text{sen}^4 x \cdot \cos^5 x \, dx$$

$$\text{sen } x = t \rightarrow \cos x \, dx = dt \rightarrow dx = \frac{dt}{\cos x}$$

$$\int \text{sen}^4 x \cdot \cos^5 x \, dx = \int t^4 \cdot \cos^5 x \cdot \frac{dt}{\cos x} = \int t^4 \cdot \cos^4 x \, dt = \int t^4 \cdot [\cos^2 x]^2 \, dt = \int t^4 \cdot [1 - \text{sen}^2 x]^2 \, dt$$

$$\int t^4 \cdot [1 - t^2]^2 \, dt = \int t^4 \cdot (1 + t^4 - 2t^2) \, dt = \int t^4 + t^8 - 2t^6 \, dt = \frac{t^5}{5} + \frac{t^9}{9} - \frac{2 \cdot t^7}{7}$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$\frac{\text{sen}^5 x}{5} + \frac{\text{sen}^9 x}{9} - \frac{2 \cdot \text{sen}^7 x}{7} + C$$

■ Cambio de variable si $f(x)$ es par en el producto $\text{sen}(x) \cdot \text{cos}(x)$

La función $f(x)$ que deseamos integrar es par en el producto seno por coseno si cumple que al sustituir simultáneamente $\text{sen}(x)$ por $-\text{sen}(x)$ y $\text{cos}(x)$ por $-\text{cos}(x)$, la función no cambia de signo. En este caso el cambio de variable a realizar es:

$$\text{tg}(x) = t \rightarrow (1 + \text{tg}^2(x)) dx = dt \rightarrow dx = \frac{dt}{1 + \text{tg}^2(x)} \rightarrow dx = \frac{dt}{1 + t^2}$$

Recordamos que la tangente, en un triángulo rectángulo, se obtiene como el cociente entre cateto opuesto y cateto contiguo. Si suponemos que el cateto contiguo vale la unidad, tendremos:

$$\text{tg}(x) = \frac{t}{1} = t \rightarrow \text{El cateto opuesto mide } t \text{ y el cateto contiguo } 1.$$

Por lo tanto la hipotenusa del triángulo rectángulo será $\sqrt{1+t^2}$. Y podremos obtener los valores del seno y del coseno en función de t , recordando que el seno es cateto opuesto partido hipotenusa y que el coseno es cateto contiguo partido hipotenusa.

$$\text{sen}(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\text{cos}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

Otra forma de demostrar estos valores es partiendo de la relación fundamental de la trigonometría que relaciona tangente y secante:

$$1 + \text{tg}^2(x) = \text{sec}^2(x) \rightarrow 1 + t^2 = \frac{1}{\text{cos}^2(x)} \rightarrow \text{cos}(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\text{tg}(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\text{cos}(x)} \rightarrow \text{sen}(x) = \text{tg}(x) \cdot \text{cos}(x) \rightarrow \text{sen}(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

Encontraremos integrales donde podremos aplicar este cambio como alguno de los vistos anteriormente. Solo la práctica nos dirá cuál es la mejor opción para resolver cada integral.

Ejemplo

$$\int \operatorname{sen} x \cdot \cos^3 x \, dx$$

$$\operatorname{tg} x = t \rightarrow dx = \frac{dt}{1+t^2}$$

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}$$

$$\int \operatorname{sen} x \cdot \cos^3 x \, dx = \int \frac{t}{\sqrt{1+t^2}} \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^3 \frac{dt}{1+t^2} = \int \frac{t}{(1+t^2)^3} dt = \frac{-1}{4} \cdot \frac{1}{(1+t^2)^2} + C$$

Deshacemos el cambio de variable en función de la tangente:

$$I = \frac{-1}{4} \cdot \frac{1}{(1+\operatorname{tg}^2 x)^2} + C$$

Que podemos expresar de forma más compacta si el cambio de variable lo hacemos en función del coseno:

$$\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{1+t^2}} \rightarrow \cos^4(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}\right)^4 = \frac{1}{(1+t^2)^2} \rightarrow I = \frac{-1}{4} \cdot \cos^4(x) + C$$

Cambio de variable si $f(x)$ contiene funciones trigonométricas genéricas

Si no podemos aplicar ninguno de los cambios de variable anteriormente descritos, siempre tendremos la posibilidad de plantear el cambio genérico:

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)=t \rightarrow [1+\operatorname{tg}^2\left(\frac{x}{2}\right)]\frac{1}{2}dx=dt \rightarrow [1+t^2]\frac{1}{2}dx=dt \rightarrow dx=\frac{2}{1+t^2}dt$$

Esta expresión relaciona la tangente del ángulo mitad. Para obtener los valores de la tangente, el seno y el coseno de x , debemos recordar la expresión de la tangente de la suma:

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}$$

Si aplicamos esta igualdad al caso $\operatorname{tg}(x)=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)$ nos queda:

$$\operatorname{tg}(x)=\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\right)=\frac{2\cdot\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} \rightarrow \operatorname{tg}(x)=\frac{2\cdot t}{1-t^2}$$

Y recordamos, como ya hicimos en el apartado anterior, la relación fundamental de la trigonometría que relaciona tangente con secante, para obtener las expresiones del seno y el coseno en función de t .

$$1+\operatorname{tg}^2(x)=\sec^2(x) \rightarrow 1+\left(\frac{2t}{1-t^2}\right)^2=\frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow 1+\frac{4t^2}{(1-t^2)^2}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{1+t^4-2t^2+4t^2}{(1-t^2)^2}=\frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow \frac{1+t^4+2t^2}{(1-t^2)^2}=\frac{1}{\cos^2 x} \rightarrow \frac{(1+t^2)^2}{(1-t^2)^2}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\frac{1+t^2}{1-t^2}=\frac{1}{\cos x} \rightarrow \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \rightarrow \operatorname{sen}(x) = \operatorname{tg}(x) \cdot \cos(x) \rightarrow \operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1-t^2} \cdot \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

Ejemplo

$$\int \frac{1}{1+\operatorname{sen} x} dx$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right) = t \rightarrow dx = \frac{2}{1+t^2} dt$$

$$\operatorname{sen}(x) = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\int \frac{1}{1+\frac{2t}{1+t^2}} \cdot \frac{2}{1+t^2} dt = \int \frac{2}{1+t^2+2t} dt = 2 \int \frac{1}{(1+t)^2} dt = \frac{-2}{1+t} + C$$

Deshacemos el cambio de variable en función de la tangente del ángulo mitad:

$$I = \frac{-2}{1+\operatorname{tg}\left(\frac{x}{2}\right)} + C$$

Cambio de variable si $f(x)$ contiene sumas y restas de raíces de un mismo radicando elevado a distintos índices.

Sea la integral $\int f(x) dx$. Si la forma de la función $f(x)$ contiene un mismo radicando (por ejemplo x) elevado a distintos índices (por ejemplo $x^{\frac{1}{2}}, x^{\frac{1}{3}}, x^{\frac{3}{4}}, \dots$), podemos plantear el siguiente cambio de variable:

$\text{radicando} = t^m \rightarrow$ Donde m es el mínimo común múltiplo de los índices de las raíces.

Ejemplo

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx$$

Radicando: x

Índice de las raíces: $2, 3 \rightarrow m.c.m. \equiv 6$

Cambio de variable $\rightarrow x = t^6 \rightarrow dx = 6 \cdot t^5 dt$

$$\int \frac{1-\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}} dx = \int \frac{1-t^{\frac{6}{2}}}{t^{\frac{6}{3}}} \cdot 6 \cdot t^5 dt = 6 \cdot \int \frac{1-t^3}{t^2} \cdot t^5 dt = 6 \cdot \int (1-t^3) \cdot t^3 dt = 6 \cdot \int (t^3 - t^6) dt$$

$$6 \cdot \int t^3 dt - 6 \cdot \int t^6 dt = \frac{6}{4} \cdot t^4 - \frac{6}{7} \cdot t^7 + C$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$x = t^6 \rightarrow \sqrt[6]{x} = t$$

$$I = \frac{3}{2} \cdot x^{\frac{4}{6}} - \frac{6}{7} \cdot x^{\frac{7}{6}} + C = \frac{3}{2} \cdot \sqrt[3]{x^2} - \frac{6}{7} \cdot x \cdot \sqrt[6]{x} + C$$

Cambio de variable si $f(x)$ posee radicales.

Sea la integral $\int f(x) dx$. Si $f(x)$ presenta raíces, podemos aplicar los siguientes cambios de variable útiles:

$$\text{Si } f(x) = R(x, \sqrt{a^2 - x^2}) \rightarrow x = a \cdot \text{sen } t$$

$$\text{Si } f(x) = R(x, \sqrt{a^2 + x^2}) \rightarrow x = a \cdot \text{tg } t$$

$$\text{Si } f(x) = R(x, \sqrt{x^2 - a^2}) \rightarrow x = a \cdot \text{sec } t$$

$$\text{Si } f(x) = R(x, \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}) \rightarrow \frac{ax+b}{cx+d} = t^n$$

Ejemplo

$$\int \frac{x^4}{\sqrt{(1-x^2)^3}} dx$$

$$x = \text{sen } t \rightarrow dx = \text{cos } t \cdot dt$$

$$\int \frac{\text{sen}^4 t}{\sqrt{(1-\text{sen}^2 t)^3}} \cdot \text{cos } t dt = \int \frac{\text{sen}^4 t}{\sqrt{(\text{cos}^2 t)^3}} \cdot \text{cos } t dt = \int \frac{\text{sen}^4 t}{\sqrt{\text{cos}^6 t}} \cdot \text{cos } t dt = \int \frac{\text{sen}^4 t}{\text{cos}^3 t} \cdot \text{cos } t dt$$

$$\int \frac{\text{sen}^4 t}{\text{cos}^2 t} dt = \int \frac{(\text{sen}^2 t)^2}{\text{cos}^2 t} dt = \int \frac{(1-\text{cos}^2 t)^2}{\text{cos}^2 t} dt = \int \frac{1+\text{cos}^4 t - 2 \cdot \text{cos}^2 t}{\text{cos}^2 t} dt$$

$$\int \frac{1+\text{cos}^4 t - 2 \cdot \text{cos}^2 t}{\text{cos}^2 t} dt = \int \frac{1}{\text{cos}^2 t} dt + \int \text{cos}^2 t dt - \int 2 dt = \text{tg}(t) + \int \text{cos}^2 t dt - 2t + C$$

En la suma aparece la integral de $\int \text{cos}^2 t dt$, que podemos resolver con un nuevo cambio de variable (por ejemplo $\text{tg}(t) = z$) o bien recordando que el coseno al cuadrado podemos relacionarlo con el coseno del ángulo doble:

$$\text{cos}(t) \cdot \text{cos}(t) = \frac{1+\text{cos}(2t)}{2} \rightarrow \int \text{cos}^2 t dt = \frac{1}{2} \int (1+\text{cos}(2t)) dt = \frac{t}{2} + \frac{1}{4} \text{sen}(2t) + C$$

Por lo tanto, nuestra integral de inicio queda:

$$I = \text{tg}(t) - \frac{3t}{2} + \frac{1}{4} \text{sen}(2t) + C$$

Deshacemos el cambio de variable:

$$x = \text{sen } t \rightarrow \text{arcosen}(x) = t$$

$$I = \operatorname{tg}(\operatorname{arccos}(x)) - \frac{3 \cdot \operatorname{arccos}(x)}{2} + \frac{1}{4} \operatorname{sen}(2 \cdot \operatorname{arccos}(x)) + C$$

La solución podemos expresarla en una forma más compacta recordando la forma del seno del ángulo doble:

$$I = \operatorname{tg}(\operatorname{arccos}(x)) - \frac{3 \cdot \operatorname{arccos}(x)}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{sen}(\operatorname{arccos}(x)) \cdot \cos(\operatorname{arccos}(x)) + C$$

Y la función seno es la inversa del arccoseno, por lo tanto:

$$I = \operatorname{tg}(\operatorname{arccos}(x)) - \frac{3 \cdot \operatorname{arccos}(x)}{2} + \frac{x}{2} \cdot \cos(\operatorname{arccos}(x)) + C$$

Con la relación fundamental de trigonometría, podemos expresar el coseno en función del seno:

$$I = \operatorname{tg}(\operatorname{arccos}(x)) - \frac{3 \cdot \operatorname{arccos}(x)}{2} + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2(\operatorname{arccos}(x))} + C$$

$$I = \operatorname{tg}(\operatorname{arccos}(x)) - \frac{3 \cdot \operatorname{arccos}(x)}{2} + \frac{x}{2} \cdot \sqrt{1 - x^2} + C$$

Uff... vaya telita hasta llegar a la solución final... **Mucho ánimo!!**